UNELE PROPRIETĂŢI DE SEPARARE ALE HIPERSUPRAFEŢELOR

OCTAV CORNEA

În lucrarea de faţă ne propunem să introducem şi să studiem un invariant topologic asociat unei varietăţi M compactă, conexă, orientabilă şi de dimensiune $n \geqslant 2$. Acest invariant, numit genul lui M, notat $C(M)$, este dat de $\max\{N(A) : A$ subvarietate compactă, orientabilă, de codimensiune 1 a lui M cu $A \cap \mathrm{Bd}(M) = \mathrm{Bd}(A)$ şi $N(M - A) = 1\}$ aici $N(X)$ este numărul de componente conexe ale lui $X \subset M$.

Prima secţiune este dedicată definirii genului şi stabilirii unor proprietăţi de bază ale sale. În cea de a doua secţiune se demonstrează, în cazul diferenţiabil, aditivitatea invariantului discutat faţă de suma conexă.

Notaţii. Fie Y o mulţime finită. Vom nota prin $|Y|$ numărul elementelor lui Y. Dacă $B \subset X$ şi X este un spaţiu topologic vom nota prin $a(B)$ aderenţa lui B şi prin $N(B)$ numărul de componente conexe ale lui B (presupunînd că acest număr este finit). Fie B un spaţiu topologic şi $A \subset B$ o mulţime conexă. Spunem că A *disconectează* (*sau împarte*) pe B dacă există o componentă conexă T a lui B cu $T = A \cup A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $(A_1 \cup A_2) \cap A = \emptyset$, $a(A_1) \cap a(A_2) = A$. Diferenţa a două mulţimi A şi B va fi notată $A - B$. Vom nota prin V_r^n clasa varietăţilor diferenţiabile de ordin $r \in N^* \cup \{\infty\}$, dimensiune $n \geqslant 2$, compacte, orientabile, conexe, cu bord. Pentru simplificare vom nota $V^n = V_\infty^n$. Fie $M \in V_r^n$ vom nota prin $V_h(M)$ clasa subvarietăţilor lui M, compacte, orientabile, de codimensiune h şi pentru care bordul este egal cu intersecţia bordului lui M cu subvarietatea respectivă. Pentru o varietate M vom nota prin $\mathrm{Bd}(M)$ bordul ei. Prin urmare avem pentru $M \in V_r^n$, $N \in V_h(M)$, $1 \leqslant h \leqslant n$, $\mathrm{Bd}(N) = \mathrm{Bd}(M) \cap N$. Dacă G_1, G_2 sînt grupuri şi $f : G_1 \to G_2$ este morfism, prin $\mathrm{Ker}(f)$ notăm nucleul său, prin $\mathrm{Im}(f)$ imaginea sa iar prin $G_1|\mathrm{Ker}(f)$ grupul factor corespunzător. Dacă cele două grupuri sînt izomorfe, scriem $G_1 \cong G_2$. Dacă G este un grup abelian finit generat notăm prin $\mathrm{rg}(G)$ rangul său. Vom lucra numai cu omologie şi coomologie cu coeficienţi întregi. Pentru $M \in V_r^n$ şi $N \in V_1(M)$ conexă notăm prin $[N]$ clasa de omologie a lui N în $H_{n-1}(M)$ iar prin $[N]^*$ clasa duală lui $[N]$ în $H^1(M)$. Vom nota prin $i_*^V : H_{n-1}(V) \to H_{n-1}(M)$ morfismul indus de incluziunea $V \subset M$, unde $V \in V_1(M)$.

1. DEFINIŢIA GENULUI

Fie $M \in V_r^n$ şi fie $C(M) = \sup\{N(A) : A \in V_1(M),\ N(M - A) = 1\}$. Vom spune că $C(M)$ este genul lui M.

Observaţii. 1. Evident pentru orice $M \in V_r^n$ avem $C(M) \geqslant 0$.

2. Genul este invariant la homeomorfisme.

STUD. CERC. MAT., TOM 40, NR. 4, P. 289–296, BUCUREŞTI, 1988

Propoziţia ce urmează ne arată că varietăţile din clasa considerată au o comportare „paşnică" faţă de gen.

Propoziţia 1. *Pentru orice* $M \in V_r^n$, $C(M)$ *este finit.*

Demonstraţie. Vom analiza mai întîi cazul în care $\operatorname{Bd}(M) = \emptyset$. Fie $A \in V_1(M)$. Din teorema generalizată a lui Jordan [1] avem $N(M-A) = N(M) + \operatorname{rg}(\operatorname{Ker}(i_*^A))$. Să presupunem că A nu disconectează pe M; observînd că în acest caz $N(M) = N(M-A) = 1$ rezultă $\operatorname{rg}(\operatorname{Ker}(i_*^A)) = 0$. Pe de altă parte $N(A) = \operatorname{rg}(H_{n-1}(A))$. Rezultă $N(A) = \operatorname{rg}(\operatorname{Im}(i_*^A)) \leqslant \operatorname{rg}(H_{n-1}(M))$ şi deci pentru cazul $\operatorname{Bd}(M) = \emptyset$ am obţinut $C(M) \leqslant \operatorname{rg}(H_{n-1}(M))$. Trecem la cazul $\operatorname{Bd}(M) \neq \emptyset$. Fie $A \in V_1(M)$ astfel încît A nu disconectează pe M şi fie $\widetilde{M}$ dublul lui M iar $\tilde{A}$ dublul lui A. Putem presupune că $\widetilde{M}$ conţine pe $\tilde{A}$ astfel încît $\tilde{A} \in V_1(\widetilde{M})$. Se observă însă imediat că $\tilde{A}$ nu disconectează pe $\widetilde{M}$. (Dacă $x \in \operatorname{Bd}(M)$, atunci există un drum ce uneşte pe x cu orice alt punct din M). Avem $N(A) \leqslant N(\tilde{A})$. După cum am arătat mai înainte $N(\tilde{A}) \leqslant \operatorname{rg}(H_{n-1}(\widetilde{M}))$ deci $C(M) \leqslant \operatorname{rg}(H_{n-1}(\widetilde{M}))$.

Observaţii. 3. Dacă $M \in V_r^n$, $\operatorname{Bd}(M) = \emptyset$ şi $H_{n-1}(M) = 0$, atunci $C(M) = 0$. În particular sferele de dimensiune cel puţin 2 au $\overleftarrow{\text{genul}}$ nul.

4. Din propoziţia de mai sus a rezultat şi $C(M) \leqslant C(\widetilde{M})$ cînd $\operatorname{Bd}(M) \neq \emptyset$ iar $\widetilde{M}$ este dublul lui M. În particular discurile de dimensiune cel puţin 2 au $\overleftarrow{\text{genul}}$ nul.

5. Fie $M \in V_r^n$ cu $\operatorname{Bd}(M) = \emptyset$. Din demonstraţia anterioară rezultă $C(M) = \max\{\operatorname{rg}(\operatorname{Im}(i_*^A)) : A \in V_1(M),\ N(M-A) = 1\}$.

6. Denumirea invariantului nu este abuzivă. Se observă cu ajutorul unor argumente destul de simple că dacă $H \in V_r^2$ cu $\operatorname{Bd}(H) = \emptyset$, atunci $\overleftarrow{\text{genul}}$ lui H coincide cu genul clasic al lui H, adică cu numărul de toruri prin a căror sumă conexă se obţine H.

7. Dacă $M \in V^n$ este simplu conexă, atunci $C(M) = 0$. Într-adevăr, dacă $A \in V_1(M)$ este conexă şi nu disconectează pe M, atunci există un drum închis, continuu, g ce intersectează transvers pe A iar numărul de intersecţie al lui g cu A (mod 2) este 1. Pe de altă parte, întrucît g este contractibil (căci M este simplu conexă) rezultă că acest număr este 0. Prin urmare $N(M-A) = 2$ şi $C(M) = 0$.

Rezultatul ce urmează ne arată că invariantul introdus aduce unele informaţii despre modul în care o varietate este disconectată de o hipersuprafaţă a sa din clasa considerată.

Fie $M \in V_r^n$ şi $A \in V_1(M)$. Fie $D(M, A) = N(A) - N(M-A) + 1$ şi $D(M) = \sup\{D(M, A) : A \in V_1(M)\}$.

Teorema 1. *Pentru* $M \in V_r^n$ *avem* $D(M) = C(M)$.

Demonstraţie. Inegalitatea $C(M) \leqslant D(M)$ este trivială întrucît dacă $A \in V_1(M)$ nu disconectează pe M, atunci $N(A) = D(M, A)$. Să demonstrăm $D(M) \leqslant C(M)$. Fie $C(M) = p$. Dacă arătăm că pentru orice $A \in V_1(M)$, există $B \in V_1(M)$ cu $N(B) = p$ şi $D(M, B) = D(M, A)$, atunci teorema este demonstrată. Într-adevăr, $D(M, B) = p - N(M - B) + 1 \leqslant p$. Reiese de aici că pentru orice $A \in V_1(M)$ avem $D(M, A) \leqslant p$ şi deci $D(M) \leqslant C(M)$. Este suficient să arătăm că pentru orice $A \in V_1(M)$ cu $N(A) > p$ există $B \in V_1(M)$ cu $D(M, A) = D(M, B)$ şi $N(B) < N(A)$.

Vom introduce acum o noţiune utilă.

DEFINIŢIE. Fie $M \in V_r^n$ şi $C \in V_1(M)$. Spunem că o familie C' de componente conexe ale lui C formează un *sistem maximal nedisconectant* (*sistem MN*) al lui C faţă de M dacă orice componentă conexă E a lui C, $E \notin C'$, disconectează mulţimea $M - \cup (H : H \in C')$.

LEMA 1. *Fie $M \in V_r^n$ cu $C(M) = p$. Orice $A \in V_1(M)$ cu $N(A) > p$ admite un sistem MN faţă de M ce are p elemente.*

Demonstraţia lemei 1. Fie A° familia componentelor conexe ale lui A. Alegem $A' \subset A^\circ$ astfel încît $|A'| = p$ şi $N(M - \cup (H : H \in A'))$ să fie minim (faţă de alte alegeri ale lui A'). Vom arăta că dacă $E \in A^\circ$ dar $E \notin A'$, atunci E disconectează pe $M - \cup (H : H \in A'$. Fie $Z = A' \cup \{E\}$. Dacă pentru orice $G \in Z$, G nu disconectează mulţimea $M - \cup (L : L \in Z, L \neq G)$, atunci rezultă că $\cup (L : L \in Z)$ nu disconectează pe M ceea ce contrazice $C(M) = p$ (Z are $p + 1$ elemente). Fie deci $G \in Z$ ce disconectează pe $M - \cap (H : H \in Z, H \neq G)$. Dacă E nu disconectează pe $M - \cup (H : H \in A')$, atunci $G \neq E$ şi rezultă că G disconectează pe $M - \cup (L \in Z : L \neq E, L \neq G)$ (altfel întrucît E nu disconectează pe $M - \cup (L \in Z : L \neq E)$ rezultă că G nu disconectează pe $M - \cup (L \in Z : L \neq G)$). Obţinem $N(M - \cup (L \in Z : L \neq E)) > N(M - \cup (L \in Z : L \neq G))$ ceea ce contrazice minimalitatea rezultată din alegerea lui A'. Evident A' este chiar sistemul MN căutat.

Să revenim la teorema noastră.

Pentru $H \in V_1(M)$ vom nota prin B_H respectiv C_H, două mulţimi prima avînd ca elemente componentele conexe ale lui H iar cea de a doua componentele conexe ale lui $M - H$. Fie $A \in V_1(M)$ cu $N(A) > p$. Lema anterioară ne asigură că putem alege din familia B_A un sistem MN, A', (faţă de M) ce are p elemente. Fie $Y \in B_A$, $Y \notin A'$, se observă că Y împarte o componentă conexă a mulţimii $M - \cup (L : L \in B_A, L \neq Y)$ în două părţi pe care le notăm Y_1 şi Y_2. Să considerăm $B = A - Y$. Rezultă $B \in V_1(M)$, $B_B = B_A - \{Y\}$ şi $C_B = (C_A - \{Y_1, Y_2\}) \cup \{Y_1 \cup Y_2 \cup Y\}$. Prin urmare $D(M, A) = D(M, B)$ iar $N(B) < N(A)$.

Observaţii. 8. Fie $M \in V_r^n$, $\mathrm{Bd}(M) = \emptyset$ şi $A \in V_1(M)$. Din teorema lui Jordan (deja menţionată) obţinem $N(M - A) = 1 + \mathrm{rg}\,(\mathrm{Ker}(i_*^A))$. Avem $D(M, A) = N(A) - N(M - A) + 1 = \mathrm{rg}(H_{n-1}(A)) - \mathrm{rg}(\mathrm{Ker}\,(i_*^A) = \mathrm{rg}(\mathrm{Im}(i_*^A))$. Rezultă $C(M) = \max\{\mathrm{rg}(\mathrm{Im}(i_*^A)) : A \in V_1(M)\}$.

9. Din demonstraţia teoremei reiese că dacă C' este un sistem MN pentru $C \in V_1(M)$ faţă de M iar $B = \cup (L : L \in C')$ atunci $B \in V_1(M)$ şi $D(M, C) = D(M, B) \leqslant N(B)$.

În urma unor sugestii şi observaţii ale lui Ştefan Papadima a reieşit valabilitatea următoarelor rezultate ce aduc o precizare importantă asupra gradului de „fineţe'' al genului.

PROPOZIŢIA 2. *a. Fie $M \in V^n$ şi $N \in V^n$ cu $Bd(M) = Bd(N) = \emptyset$. Dacă M şi N sînt echivalente omotopic atunci $C(M) = C(N)$.*

b. Fie $M \in V_r^n$, $Bd(M) = \emptyset$. Sînt echivalente afirmaţiile $C(M) = 0$ şi $H_{n-1}(M) = 0$.

Demonstraţie. a. Fie $f : M \to N$ şi $g : N \to M$ funcţiile ce asigură echivalenţa omotopică a lui M cu N. Observăm că f induce la omologie un izomorfism între $H_{n-1}(M)$ şi $H_{n-1}(N)$. Fie $V \in V_1(N)$ cu $N(V) = C(N)$ şi $N(N - V) = 1$. Printr-un argument de transversalitate putem presupune că $f^{-1}(V) = W \in V_1(M)$. Se verifică imediat că $\mathrm{rg}(\mathrm{Im}(i_*^W)) = \mathrm{rg}(\mathrm{Im}(i_*^V))$ şi deci $C(M) \geq C(N)$. Inegalitatea contrară se deduce în mod analog.

b. Fie $[M; S^1]$ mulţimea claselor de omotopie ale aplicaţiilor continue $g: M \to S^1$(S^1 este sfera 1-dimensională) şi fie $f^*: H^1(S^1) \to H^1(M)$ morfismul indus la coomologie de o funcţie continuă $f: M \to S^1$. Este valabil următorul fapt ce se obţine (eventual) ca o consecinţă simplă a unei teoreme din [2], p. 428 : Există un element $i \in H^1(S^1)$ şi o bijecţie $J: [M; S^1] \to H^1(M)$ definită prin $J(f) = f^*(i)$. Revenind la problema noastră remarcăm că în virtutea observaţiei 8 ne rămîne să demonstrăm că $C(M) = 0$ implică $H_{n-1}(M) = 0$. Presupunem $H_{n-1}(M) \neq 0$. Fie $a \in H_{n-1}(M)$, $a \neq 0$ şi fie $f = J^{-1}(a^*)$ (a^* este dualul lui a, $a^* \in H^1(M)$). Există un punct $p \in S^1$ astfel încît $[p]^* = i$ şi $f^{-1}(p) = V \in V_1(M)$. Avem însă $[V]^* = f^*(i) = J(f) = a^*$. Rezultă $[V] = a$. Observînd că $H_{n-1}(M)$ este liber şi aplicînd teorema lui Jordan relativ la V obţinem $C(M) \geq 1$.

Observaţie. 10. Punctul *b* al propoziţiei anterioare ne arată că egalitatea genului cu 0 (în cazul discutat) este pusă în evidenţă de structura grupului fundamental al lui M. Mai exact avem echivalenţă între $C(M) = 0$ şi $\mathrm{rg}(H_1(M)) = 0$ căci întrucît M este compactă, $\mathrm{rg}(H_1(M)) = \mathrm{rg}(H^1(M)) = \mathrm{rg}(H_{n-1}(M))$.

2. O PROPRIETATE DE ADITIVITATE

Rezultatul principal pe care ni-l propunem în această secţiune este conţinut în teorema ce urmează.

TEOREMA 2. *Fie $M \in V^n$ cu $Bd(M) = \emptyset$ şi $M_3 \subset M$, $M_3 \in V_1(M)$, astfel încît $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$ cu $M_1 \cap M_2 = \mathrm{Bd}(M_1) = \mathrm{Bd}(M_2) = M_3$. Fie $B \in V_1(M)$ ce intersectează pe M_3 după o subvarietate a lui M din $V_2(M)$. Dacă $C(M_3) = 0$, $N(M_3) = 1$, atunci $D(M, B) \leqslant C(M_1) + C(M_2)$.*

Demonstraţie. Lui $A \in V_1(M)$ îi vom asocia numărul $N(A \cap M_3)$ numit complexitatea lui A. Pentru $p \in \mathbf{N}^*$ fie $F_p = \{A \in V_1(M) : A \cap M_3 = E$ cu $E = \emptyset$ sau $E \in V_2(M)$, $D(M, A) \geq p\}$. Observăm că dacă A este de complexitate 0, atunci $A = A_1 \cup A_2$ cu $A_1 \subset M_1$, $A_2 \subset M_2$, $A_1 \cap M_3 = A_2 \cap M_3 = \emptyset$. Obţinem $N(A) = N(A_1) + N(A_2)$, $N(M - A) = N(M_1 - A_1) + N(M_2 - A_2) - 1$ şi deci $D(M, A) = D(M_1, A_1) + D(M_2, A_2) \leqslant C(M_1) + C(M_2)$. Să presupunem că pentru orice $r \in \mathbf{N}^*$ există o metodă care să ne conducă de la un element A de complexitate nenulă din F_r la un alt element $A' \in F_r$ reducînd complexitatea (adică astfel încît A' să fie de complexitate strict mai mică decît A). Dacă aplicăm repetat de un număr suficient de mare de ori metoda reductivă pornind de la hipersuprafaţa B din enunţ pe care o considerăm aparţinînd lui F_t cu $t = D(M, B)$, vom obţine o hipersuprafaţă $B' \in F_t$ de complexitate 0. În acest caz avem $D(M, B) \leqslant D(M, B') \leqslant C(M_1) + C(M_2)$ ceea ce încheie demonstraţia modulo descrierea metodei reductive.

Ne este necesară o observaţie simplă.

LEMA 2. *Fie $T \in V^n$ cu* $\mathrm{Bd}(T) = \emptyset$ *şi* $L \in V_1(T)$. *Dacă $C(T) = 0$, atunci există o componentă conexă S a lui L pentru care există o componentă conexă T' a lui $T - S$ astfel încît $T' \cap L = \emptyset$.*

Demonstraţia lemei 2. Întrucît $C(T) = 0$ rezultă că orice $L \in V_1(T)$, L conexă, disconectează pe T. Procedăm prin inducţie după $N(L)$. Cazul

$N(L) = 1$ a fost menționat mai sus. Presupunem rezultatul stabilit pentru
$N(L) \leqslant m$. Fie acum $L \in V_1(M)$ astfel încît $N(L) = m + 1$. Eliminăm
din L o componentă conexă a sa L_1. Rezultă că există o componentă
conexă L_2 a lui L pentru care o componentă T_1 a lui $T - L_2$ intersec-
tează pe L cel mult după L_1. Adică $T_1 \cap L = \emptyset$ sau $T_1 \cap L = L_1$. Dacă
$T_1 \cap L = \emptyset$, atunci L_2 este componenta conexă a lui L ce satisface pro-
prietatea dorită. Dacă $T_1 \cap L = L_1$ rezultă că L_1 împarte pe T_1 în două
părți T_1' și T_1''. Una dintre acestea, de pildă T_1', va fi mărginită și de L_2.
În schimb T_1'' nu va fi mărginită decît de L_1 și $T_1'' \cap L = \emptyset$.

Metoda reductivă. Fie $A \in V_1(M)$ de complexitate nenulă și $A \cap M_3 \in$
$\in V_2(M)$. Notăm prin A^0 mulțimea componentelor conexe ale lui A și
prin E^0 mulțimea componentelor conexe ale lui $E = A \cap M_3$. Fie $H \in A^0$.
Dacă H disconectează pe $M - \cup\ (K \in A^0 : K \neq H)$, atunci prin elimi-
narea lui H din A^0, ca în teorema 1, se obține $A' \in V_1(M)$ cu $D(M, A') =$
$= D(M, A)$ și complexitatea lui A' va fi mai mică (nu neapărat strict)
decît complexitatea lui A. Prin urmare putem considera că orice $G \in A^0$
nu disconectează pe $M - \cup\ (K \in A^0 : K \neq G)$. Din lema 2 rezultă că
există $F \in E^0$ astfel încît una dintre componentele lui $M_3 - F$ să nu inter-
secteze pe A. Fie această componentă (a lui $M_3 - F$) U. Fie N elementul
lui A^0 pentru care $F \subset N$. Fie W o vecinătate bigulerată a lui M_3 în M
și M_3', M_3'' copii difeomorfe ale lui M_3 situate în W de o parte și de alta a
lui M_3 cu $M_3' \subset M_1$, $M_3'' \subset M_2$. Fie W_1 componenta conexă, deschisă,
a lui W cuprinsă între M_3' și M_3''. Fie $V = W_1 \cap N$. Alegem pe W sufi-
cient de mică astfel încît fiecare componentă conexă a lui V să conțină
un singur element din E^0. Fie X componenta conexă a lui V ce conține
pe F. Mulțimea X este mărginită de două mulțimi F' și F'' cu $F' \subset M_3' \cap$
$\cap N$, $F'' \subset M_3'' \cap N$. Dacă W este suficient de mică, atunci F' respectiv
F'' se vor comporta în M_3' și M_3'' exact cum se comportă F în M_3. Mai
exact, $a(X)$ disconectează $a(W_1)$ iar $F' \in V_1(M_3')$, $F'' \in V_1(M_3'')$, $F' \cup F'' =$
$= \mathrm{Bd}(a(X))$ și în plus F' și F'' delimitează în M_3' respectiv M_3'' cîte o parte
U' respectiv U'' a mulțimilor $M_3' - N$ și $M_3'' - N$ astfel încît $U' \cap A =$
$= \emptyset$, $U'' \cap A = \emptyset$ iar U', U'' și U sînt incluse în aceeași componentă
conexă Q a lui $a(W_1) - a(X)$. Să considerăm mulțimea $A'' = (A - X) \cup$
$\cup\ U' \cup U''$. Această mulțime este, după o eventuală rotunjire a colțu-
rilor, o hipersuprafață $A' \in V_1(M)$. În mod evident ea are complexitatea
mai mică decît A. Rămîne să demonstrăm $D(M, A) \leqslant D(M, A')$. Fie
$R = M - \cup\ (K \in A^\circ : K \neq N)$ și fie $N' = (N - X) \cup U' \cup U''$. Știm
că N nu disconectează pe R. Este suficient să arătăm că una dintre com-
ponentele conexe ale lui N' nu disconectează pe R. Să observăm că pentru
ca o componentă conexă a lui $S \in V_1(M)$, $S \subset R$, să nu disconecteze pe R
este suficient să existe un drum continuu în R al cărui număr de
intersecție (mod 2) cu S să fie 1. În particular, rezultă că există un drum
r continuu în R al cărui număr de intersecție (mod 2) cu N este 1. Să
observăm că numărul de intersecție al lui r cu N' (mod 2) este tot 1.
Într-adevăr, putem presupune $r \cap N \cap X = \emptyset$. Pe de altă parte, numă-
rul de intersecție (mod 2) al lui r cu $X \cup U' \cup U''$ este 0 întrucît $X \cup$
$\cup\ U' \cup U''$ disconectează pe R. Obținem $r \cap N' = (r \cap N) \cup (r \cap (U' \cup$
$\cup\ U''))$ dar $r \cap (U' \cup U'') = r \cap (X \cup U' \cup U'')$. Rezultă că numărul
de intersecție (mod 2) al lui r cu N' este 1 întrucît este egal cu numărul
de intersecție (mod 2) al lui r cu N.

$N(L) = 1$ a fost menționat mai sus. Presupunem rezultatul stabilit pentru $N(L) \leqslant m$. Fie acum $L \in V_1(M)$ astfel încît $N(L) = m + 1$. Eliminăm din L o componentă conexă a sa L_1. Rezultă că există o componentă conexă L_2 a lui L pentru care o componentă T_1 a lui $T - L_2$ intersectează pe L cel mult după L_1. Adică $T_1 \cap L = \emptyset$ sau $T_1 \cap L = L_1$. Dacă $T_1 \cap L = \emptyset$, atunci L_2 este componenta conexă a lui L ce satisface proprietatea dorită. Dacă $T_1 \cap L = L_1$ rezultă că L_1 împarte pe T_1 în două părți T_1' și T_1''. Una dintre acestea, de pildă T_1', va fi mărginită și de L_2. În schimb T_1'' nu va fi mărginită decît de L_1 și $T_1'' \cap L = \emptyset$.

Metoda reductivă. Fie $A \in V_1(M)$ de complexitate nenulă și $A \cap M_3 \in V_2(M)$. Notăm prin A^0 mulțimea componentelor conexe ale lui A și prin E^0 mulțimea componentelor conexe ale lui $E = A \cap M_3$. Fie $H \in A^0$. Dacă H disconectează pe $M - \cup\,(K \in A^0 : K \neq H)$, atunci prin eliminarea lui H din A^0, ca în teorema 1, se obține $A' \in V_1(M)$ cu $D(M, A') = D(M, A)$ și complexitatea lui A' va fi mai mică (nu neapărat strict) decît complexitatea lui A. Prin urmare putem considera că orice $G \in A^0$ nu disconectează pe $M - \cup\,(K \in A^0 : K \neq G)$. Din lema 2 rezultă că există $F \in E^0$ astfel încît una dintre componentele lui $M_3 - F$ să nu intersecteze pe A. Fie această componentă (a lui $M_3 - F$) U. Fie N elementul lui A^0 pentru care $F \subset N$. Fie W o vecinătate bigulerată a lui M_3 în M și M_3', M_3'' copii difeomorfe ale lui M_3 situate în W de o parte și de alta a lui M_3 cu $M_3' \subset M_1$, $M_3'' \subset M_2$. Fie W_1 componenta conexă, deschisă, a lui W cuprinsă între M_3' și M_3''. Fie $V = W_1 \cap N$. Alegem pe W suficient de mică astfel încît fiecare componentă conexă a lui V să conțină un singur element din E^0. Fie X componenta conexă a lui V ce conține pe F. Mulțimea X este mărginită de două mulțimi F' și F'' cu $F' \subset M_3' \cap N$, $F'' \subset M_3'' \cap N$. Dacă W este suficient de mică, atunci F' respectiv F'' se vor comporta în M_3' și M_3'' exact cum se comportă F în M_3. Mai exact, $a(X)$ disconectează $a(W_1)$ iar $F' \in V_1(M_3')$, $F'' \in V_1(M_3'')$, $F' \cup F'' = \mathrm{Bd}(a(X))$ și în plus F' și F'' delimitează în M_3' respectiv M_3'' cîte o parte U' respectiv U'' a mulțimilor $M_3' - N$ și $M_3'' - N$ astfel încît $U' \cap A = \emptyset$, $U'' \cap A = \emptyset$ iar U', U'' și U sînt incluse în aceeași componentă conexă Q a lui $a(W_1) - a(X)$. Să considerăm mulțimea $A'' = (A - X) \cup U' \cup U''$. Această mulțime este, după o eventuală rotunjire a colțurilor, o hipersuprafață $A' \in V_1(M)$. În mod evident ea are complexitatea mai mică decît A. Rămîne să demonstrăm $D(M, A) \leqslant D(M, A')$. Fie $R = M - \cup\,(K \in A^\circ : K \neq N)$ și fie $N' = (N - X) \cup U' \cup U''$. Știm că N nu disconectează pe R. Este suficient să arătăm că una dintre componentele conexe ale lui N' nu disconectează pe R. Să observăm că pentru ca o componentă conexă a lui $S \in V_1(M)$, $S \subset R$, să nu disconecteze pe R este suficient să existe un drum continuu în R al cărui număr de intersecție (mod 2) cu S să fie 1. În particular, rezultă că există un drum r continuu în R al cărui număr de intersecție (mod 2) cu N este 1. Să observăm că numărul de intersecție al lui r cu N' (mod 2) este tot 1. Într-adevăr, putem presupune $r \cap N \cap X = \emptyset$. Pe de altă parte, numărul de intersecție (mod 2) al lui r cu $X \cup U' \cup U''$ este 0 întrucît $X \cup U' \cup U''$ disconectează pe R. Obținem $r \cap N' = (r \cap N) \cup (r \cap (U' \cup U''))$ dar $r \cap (U' \cup U'') = r \cap (X \cup U' \cup U'')$. Rezultă că numărul de intersecție (mod 2) al lui r cu N' este 1 întrucît este egal cu numărul de intersecție (mod 2) al lui r cu N.

Pentru a pune în evidență unele consecințe importante ale teoremei 2 ne este necesar rezultatul ce urmează.

LEMA 3. *Fie $M \in V^n$ cu* $\mathrm{Bd}(M) = \emptyset$ *și* $A \in V_1(M)$ *conexă astfel încît:* $M = M_1 \cup A \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = A = \mathrm{Bd}(M_1) = \mathrm{Bd}(M_2)$ *și fie* $B \in V_1(M)$ *ce intersectează pe* A. *Există o vecinătate bigulerată* U *a lui* A *ce include* $A' \in V_1(M)$, A' *și* A *difeomorfe,* $M = M_1' \cup A' \cup M_2'$, $M_1' \cap M_2' = A' = \mathrm{Bd}(M_1') = \mathrm{Bd}(M_2')$ *și astfel încît* $A' \cap B = V_2(M)$ *sau* $A' \cap B = \emptyset$.

Această lemă este un caz particular al teoremei de transversalitate a lui Thom. În cele ce urmează vom prezenta o demonstrație simplă a lemei.

Demonstrația lemei 3. Fie U o vecinătate bigulerată a lui A. Putem alege pe U suficient de mică astfel încît $a(U) - U$ să aibă două componente conexe A_1 și A_2 și să putem defini o funcție $f : a(U) \to [a, b] \subset \mathbf{R}$ cu următoarele proprietăți: $f(A_1 \cup A_2) = \{a, b\}$, există $y \in [a, b]$ astfel încît $A = f^{-1}(y)$, f este de clasă C^∞ și nu are puncte critice. Restricția funcției f la $B \cap a(U)$ o vom nota prin h. Din teorema lui Sard rezultă că există o valoare regulată $z \in (a, b)$ a lui h. Dacă putem alege z astfel încît $h^{-1}(z) \neq \emptyset$ rezultă că $h^{-1}(z) \in V_2(M)$. Pe de altă parte, conform unui rezultat simplu de teorie Morse [3], $A' = f^{-1}(z)$ se găsește în $V_1(M)$ și este difeomorfă cu A. Hipersuprafața A' va fi chiar cea căutată. Dacă $h^{-1}(z) = \emptyset$, atunci similar $A' = f^{-1}(z)$ și rezultă $A' \cap B = \emptyset$.

COROLARUL 1. *Fie* M, M_1, M_2 *și* M_3 *ca în teorema 2. Avem* $C(M) \leqslant C(M_1) + C(M_2)$.

Demonstrație. Fie $B \in V_1(M)$. Dacă $B \cap M_3 = \emptyset$, atunci evident $D(M, B) \leqslant C(M_1) + C(M_2)$. Dacă $B \cap M_3 \neq \emptyset$ găsim M_3' ca în lema 3 și rezultă $M = M_1' \cup M_3' \cup M_2'$ cu $M_1' \cap M_2' = M_3'$. Alegînd în lema 3 pe U suficient de mică, putem obține pe M_i' difeomorf cu $M_i (i = 1, 2)$. Prin urmare $C(M_1') = C(M_1)$ și $C(M_2') = C(M_2)$. Rezultă din teorema 2 $D(M, B) \leqslant C(M_1') + C(M_2') = C(M_1) + C(M_2)$.

COROLARUL 2. *Fie* M_1, $M_2 \in V^n$, $n \geqslant 3$, cu $\mathrm{Bd}(M_1) = \mathrm{Bd}(M_2) = \emptyset$. *Avem* $C(M_1 \# M_2) = C(M_1) + C(M_2)$, *unde* $M_1 \# M_2$ *este suma conexă a lui* M_1 *cu* M_2.

Demonstrație. Fie $D_i \subset M_i$ un disc deschis n-dimensional, $i = 1, 2$. Presupunem că „lipirea" lui M_1 cu M_2 se face după frontierele lui D_1 și D_2 care se identifică dînd naștere lui $S \in V_1(M_1 \# M_2)$. Fie $B \in V_1(M_1 \# M_2)$. Folosind lema 3 rezultă că putem considera că $B \cap S = \emptyset$ sau că $B \cap S = C \in V_2(M_1 \# M_2)$. Întrucît S este difeomorfă cu o sferă de dimensiune cel puțin 2, rezultă că $C(S) = 0$ și ne putem situa în condițiile teoremei 2. Conform demonstrației acestei teoreme rezultă că putem găsi $B' \in V_1(M_1 \# M_2)$ cu $B' \cap S = \emptyset$ și $D(M_1 \# M_2, B) \leqslant D(M_1 \# M_2, B')$. Prin urmare este suficient să analizăm cazul în care $B \cap S = \emptyset$. Rezultă că $B = B_1 \cup B_2$ cu $B_1 \in V_1(M_1 - D_1)$ și $B_2 \in V_1(M_2 - D_2)$. Se observă ușor că întrucît $B_i \cap S = \emptyset$ rezultă $D(M_i - D_i, B_i) = D(M_i, B_i)$ pentru $i = 1, 2$. Pe de altă parte, $D(M_1 \# M_2, B) = D(M_1 - D_1, B_1) + D(M_2 - D_2, B_2)$. Obținem astfel $C(M_1 \# M_2) \leqslant C(M_1) + C(M_2)$. Pentru a obține inegalitatea contrară considerăm în M_i o hipersuprafață $B_i \in V_1(M)_i$ pentru care $D(M_i, B_i) = C(M_i)$ și alegem discurile $D_i \subset M_i$ astfel încît $D_i \cap B_i = \emptyset$, $i = 1, 2$. Lipim apoi pe M_1 cu M_2 după frontierele lui D_1 și D_2. Avem $D(M_1 \# M_2, B_1 \cup B_2) = C(M_1) + C(M_2)$.

Observații finale. Teorema 2 ca și corolariile ei capătă o importanță sporită în cazul în care varietățile cu care lucrăm admit o descompunere ca sume conexe de varietăți mai simple (de pildă dacă sînt valabile niște rezultate similare celor din [4], [5]). Astfel iată cîteva aplicații în cazul varietăților tridimensionale. Pentru $N \in V^3$ cu $\mathrm{Bd}(N) = \emptyset$ fie $n(N)$ numărul de componente difeomorfe cu $S^1 \times S^2$ ce apar în descompunerea lui N ca sumă conexă de varietăți prime. (Vezi [4] și [5].) Se observă ușor că $C(N) \geqslant n(N)$. Fie acum $M \in V^3$, $\mathrm{Bd}(M) = \emptyset$, M ireductibilă. Dacă M nu este Haken, atunci $C(M) = 0$ (M e ireductibilă dacă orice sferă scufundată în M mărginește o bilă; dacă, în plus, M nu este Haken, atunci orice $H \in V_1(M)$ de gen nenul este compresibilă adică există un disc D scufundat în M astfel încît $D \cap H = \mathrm{Bd}(D)$ și $\mathrm{Bd}(D)$ nu este contractibilă în H). Într-adevăr, fie $A \in V_1(M)$ conexă astfel încît $N(M - A) = 1$. Cum genul lui A nu poate fi 0, rezultă că există discul $D \cap M$ astfel încît în urma unei chirurgii după $\mathrm{Bd}(D) = D \cap A$ să obținem $A' \in V_1(M)$ de gen strict mai mic decît genul lui A. Printr-un argument simplu (de pildă bazat pe numere de intersecție) se obține $D(M, A') \geqslant D(M, A) = 1$. Se aplică apoi același procedeu lui A' și continuînd astfel vom obține o sferă scufundată în M ce nu disconectează pe M. Acest fapt contrazice însă ireductibilitatea lui M. Prin urmare $C(M) = 0$. Aplicînd corolarul 2 rezultă că o sumă conexă de varietăți ireductibile și care nu sînt Haken are genul 0. Se poate demonstra că $C(S^1 \times S^2) = 1$. Rezultă în final că pentru $M \in V^3$, $\mathrm{Bd}(M) = \emptyset$, relația $C(M) > n(M)$ implică faptul că există o componentă ireductibilă (în descompunerea lui M ca sumă conexă de varietăți prime) ce este Haken. Incidental, folosind și propoziția 2, rezultă pentru $M \in V^3$ cu $\mathrm{Bd}(M) = \emptyset$, M ireductibilă, că $\mathrm{rg}(H_1(M)) \neq 0$ implică faptul că M este Haken, rezultat ce apare și în [6].

Primit la redacție în 11 iunie 1987
Forma revizuită în 26 august 1987

Facultatea de Matematică
Universitatea din București

BIBLIOGRAFIE

1. A. Dold, *Lectures on algebraic topology*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.
2. E. H. Spanier, *Algebraic topology*. McGraw Hill, New York, 1966.
3. M. W. Hirsch, *Differential topology*. Springer Verlag, New York, 1976.
4. H. Kneser, *Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten*. Jbr. Deutsch Math. Verein, *38* (1929), 248–280.
5. J. Milnor, *A unique factorization theorem for 3-manifolds*. Amer. J. Math., *84* (1962), 1–7.
6. W. Jaco, *Lectures on three-manifolds topology*. CBMC Reginal conference series in math. **43** (1980).

SOME SEPARATION PROPERTIES

ABSTRACT

Let M be a compact, orientable, connected, n-dimensional ($n \geqslant 2$), smooth manifold. For $B \subset M$ let $N(B)$ be the number of the connected components of B and let $V_1(M) = \{A \subset M$: A is a codimension one, orientable, compact submanifold of M with $\mathrm{Bd}(A) = \mathrm{Bd}(M) \cap A\}$. Let $C(M) = \sup\{N(A) : A \in V_1(M),\ N(M - A) = 1\}$.

In the first section of the paper we prove that $C(M)$ is finite, that $C(M) = \sup\{N(A) - N(M - A) + 1 : A \in V_1(M)\}$, that $C(M) \leqslant \mathrm{rg}(H_{n-1}(M))$ when $\mathrm{Bd}(M) = \emptyset$ and also that, in this case, $C(M) = 0$ implies $H_{n-1}(M) = 0$. We also prove that $C(M)$ is a homotopical invariant.

In the second section we prove that $C(M \# N) = C(M) + C(N)$, $M \# N$ being the connected sum of the manifolds M and N. As a simple consequence it results that if M is 3-dimensional, $\mathrm{Bd}(M) = \emptyset$, and $C(M) > n(M)$ then the prime decomposition of M contains a factor which is a Haken manifold. Here $n(M)$ is the number of $S^1 \times S^2$ appearing in the prime decomposition of M.