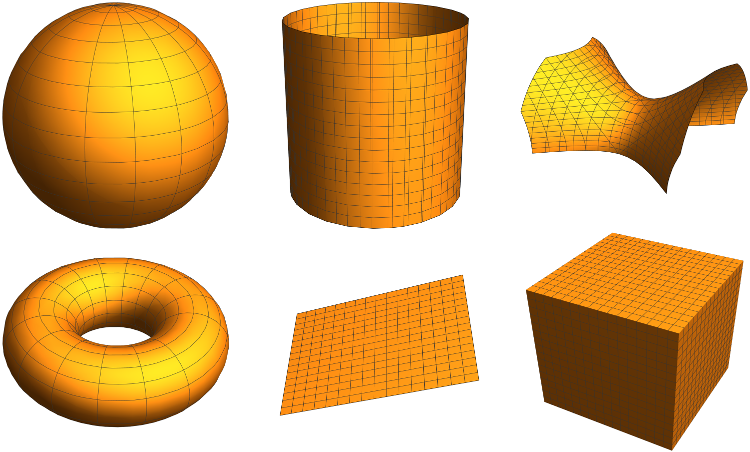
La courbure et les polyèdres

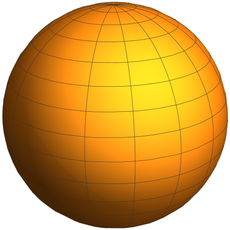
Jake Levinson
Université de Montréal

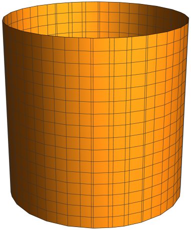
31 mai 2023

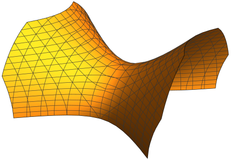
Quelques surfaces courbées et non courbées

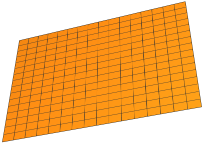


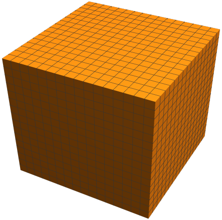
Quelques surfaces courbées et non courbées







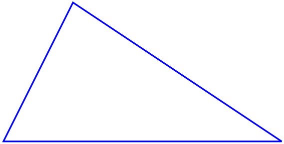




Plan d'aujourd'hui

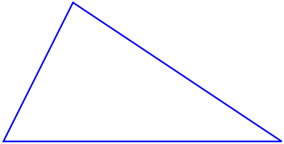
- Qu'est-ce que la courbure?
- Polyèdres
- Caractéristique d'Euler
- Théorèmes de Descartes et de Gauss–Bonnet

Triangles inscrits sur une surface

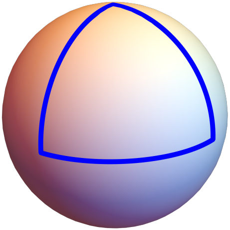


$\sum$ angles internes $= 180^\circ$

Triangles inscrits sur une surface

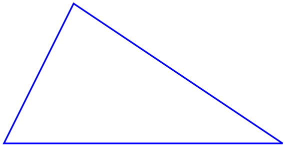


vs

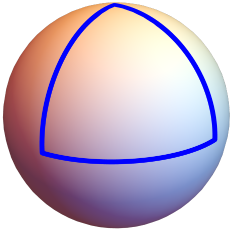


$\sum$ angles internes $= 180^\circ$

Triangles inscrits sur une surface



vs

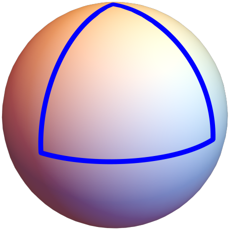


$\sum$ angles internes $= 180^\circ$

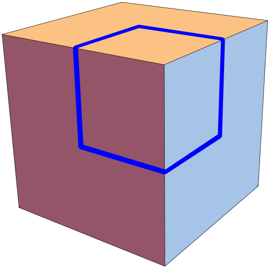
$90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 270^\circ$

Le fait que la somme n'équivaut pas à 180° indique la présence de courbure.

Un chemin triangulaire



$\approx$

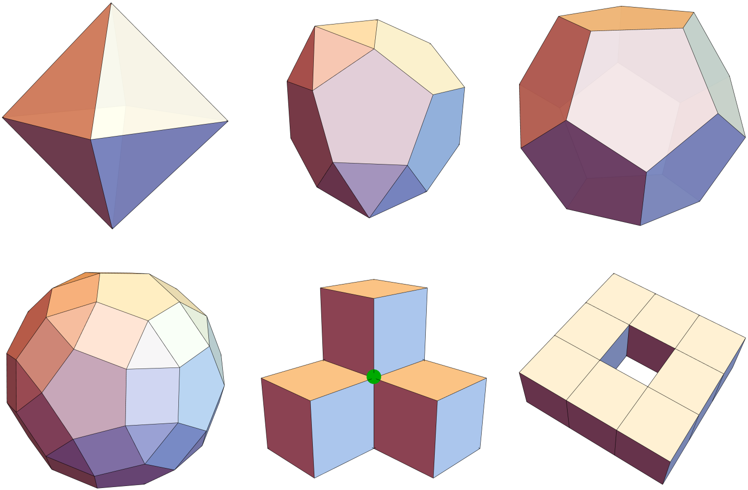


Le cube est un **polyèdre**: un solide à faces planes polygonales.

Objectif d'aujourd'hui

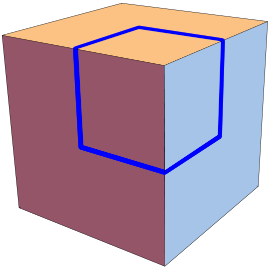
Définir la **courbure** des polyèdres en termes d'angles.

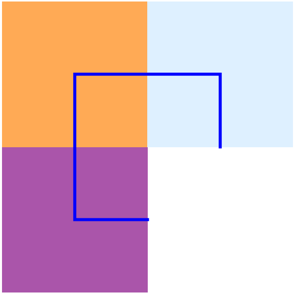
Quelques polyèdres



Lignes droites et angles sur un polyèdre

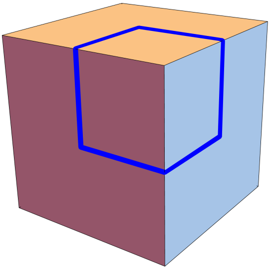
On ne considère pas comme "angles" les tournures / plis correspondant seulement au passage d'une face à une autre:

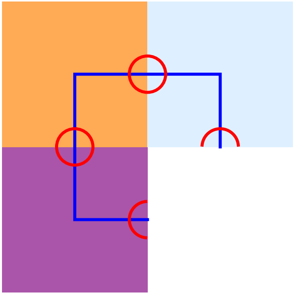




Lignes droites et angles sur un polyèdre

On ne considère pas comme “angles” les tournures / plis correspondant seulement au passage d’une face à une autre:

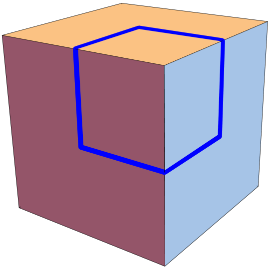


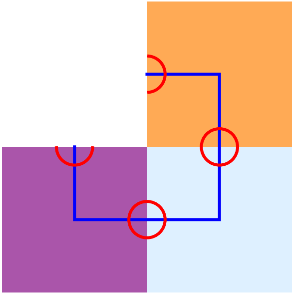


Aux 3 points encerclés, le chemin se déplie en ligne droite.

Lignes droites et angles sur un polyèdre

On ne considère pas comme “angles” les tournures / plis correspondant seulement au passage d'une face à une autre:

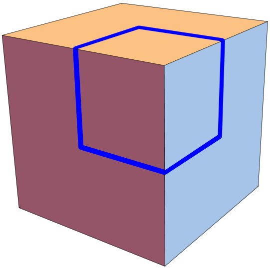


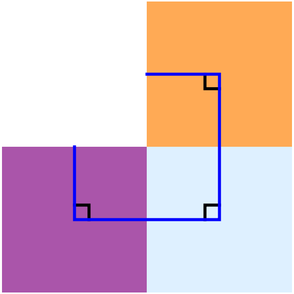


Aux 3 points encerclés, le chemin se déplie en ligne droite.

Lignes droites et angles sur un polyèdre

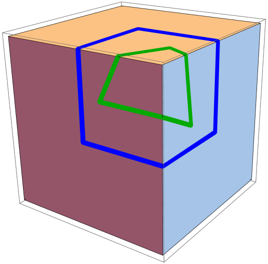
On ne considère pas comme “angles” les tournures / plis correspondant seulement au passage d'une face à une autre:

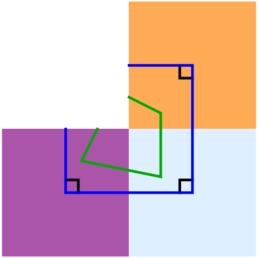




Aux 3 points encerclés, le chemin se déplie en ligne droite.
Aux vrais sommets, les angles mesurent $90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 270^\circ$.

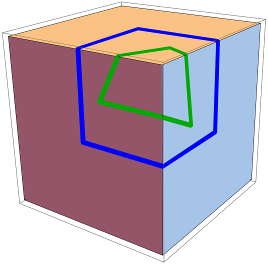
Un autre choix de triangle

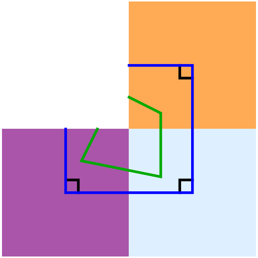




Si l'on tourne le carré orange 90° à la gauche, les deux segments verts se joignent en ligne droite.

Un autre choix de triangle

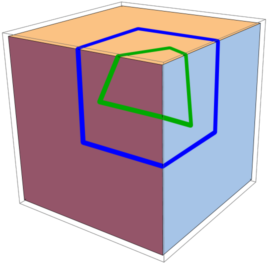


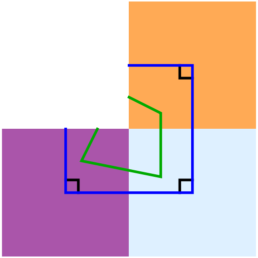


Si l'on tourne le carré orange 90° à la gauche, les deux segments verts se joignent en ligne droite.

Somme des angles: moins évident... mais clairement $> 180°$.

Un autre choix de triangle

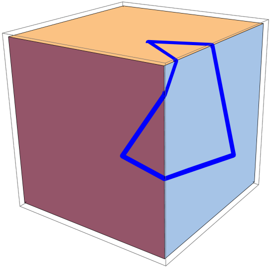


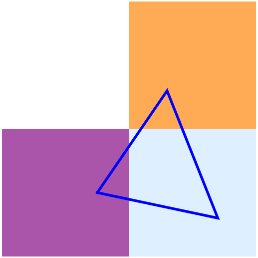


Si l'on tourne le carré orange 90° à la gauche, les deux segments verts se joignent en ligne droite.

Somme des angles: moins évident... mais clairement $> 180°$.
(En fait: encore 270°! Mais pourquoi?)

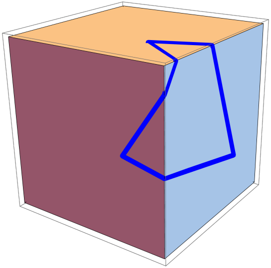
Triangles n'entourant aucun sommet ?

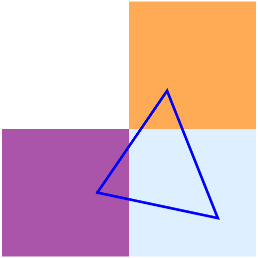




Évidemment, un tel triangle aurait une somme des angles de 180°.

Triangles n'entourant aucun sommet ?



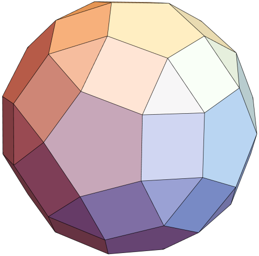


Évidemment, un tel triangle aurait une somme des angles de 180°.

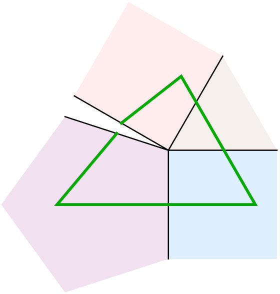
Conclusion: "La courbure se trouve aux sommets".

Théorème: La somme des angles prend un valeur constant

Théorème: La somme des angles prend un valeur constant

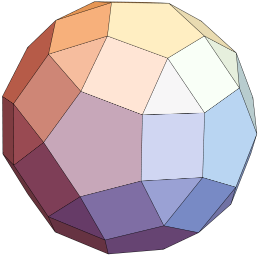


Le rhombicosidodecaèdre

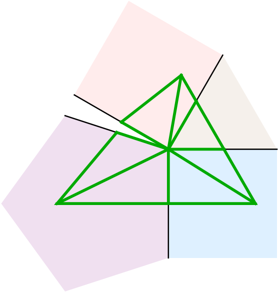


Triangle courbé

Théorème: La somme des angles prend un valeur constant



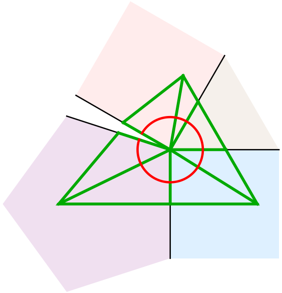
Le rhombicosidodecaèdre



Triangle courbé
subdivisé en $n = 7$ triangles

Théorème: La somme des angles prend un valeur constant

$A = \sum$ angles autour de p

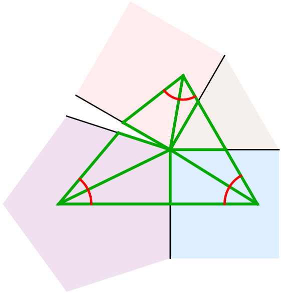


Triangle courbé
subdivisé en $n = 7$ triangles

Théorème: La somme des angles prend un valeur constant

$A = \sum$ angles autour de p

$B = \sum$ angles du triangle courbé



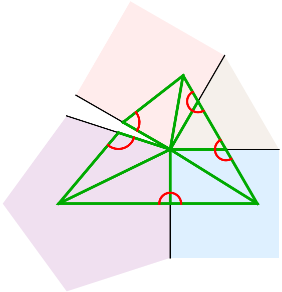
Triangle courbé
subdivisé en $n = 7$ triangles

Théorème: La somme des angles prend un valeur constant

$A = \sum$ angles autour de p

$B = \sum$ angles du triangle courbé

$$\begin{aligned} C &= \sum \text{autres angles} \\ &= (n-3) \cdot 180^\circ \end{aligned}$$



Triangle courbé
subdivisé en $n = 7$ triangles

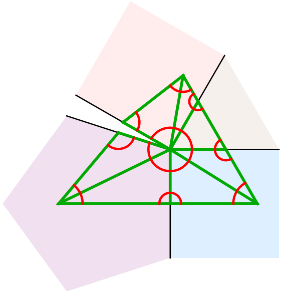
Théorème: La somme des angles prend un valeur constant

$A = \sum$ angles autour de p

$B = \sum$ angles du triangle courbé

$$C = \sum \text{autres angles} \\ = (n-3) \cdot 180^\circ$$

$A + B + C = n \cdot 180^\circ$



Triangle courbé
subdivisé en $n = 7$ triangles

Théorème: La somme des angles prend un valeur constant

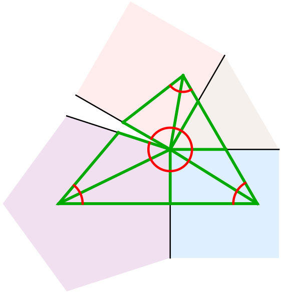
$A = \sum$ angles autour de p

$B = \sum$ angles du triangle courbé

$C = \sum$ autres angles
$\quad = (n-3) \cdot 180^\circ$

$A + B + C = n \cdot 180^\circ$

$\rightsquigarrow \quad A + B = 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$



Triangle courbé
subdivisé en $n = 7$ triangles

Théorème: La somme des angles prend un valeur constant

$A = \sum$ angles autour de p

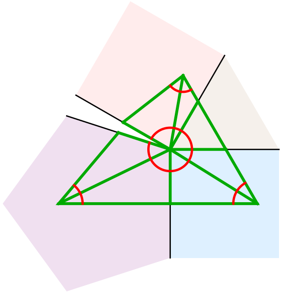
$B = \sum$ angles du triangle courbé

$C = \sum$ autres angles
$\quad = (n-3) \cdot 180^\circ$

$A + B + C = n \cdot 180^\circ$

$\rightsquigarrow \quad A + B = 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$

$\rightsquigarrow \quad \underbrace{B - 180^\circ}_{\text{excès}} = \underbrace{360^\circ - A}_{\text{manque}}$



Triangle courbé
subdivisé en $n = 7$ triangles

Théorème: La somme des angles prend un valeur constant

$A = \sum$ angles autour de p

$B = \sum$ angles du triangle courbé

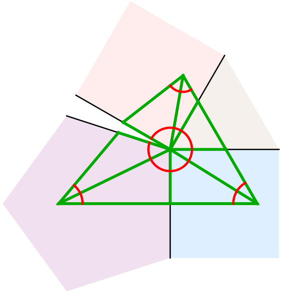
$C = \sum$ autres angles
$= (n-3) \cdot 180^\circ$

$A + B + C = n \cdot 180^\circ$

$\rightsquigarrow \quad A + B = 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$

$\rightsquigarrow \quad \underbrace{B - 180^\circ}_{\text{excès}} = \underbrace{360^\circ - A}_{\text{manque}}$

Noter que $360^\circ - A$ ne dépend pas sur le choix de triangle.



Triangle courbé
subdivisé en $n = 7$ triangles

La courbure à un point d'un polyèdre

Soit P un polyèdre et $p \in P$ un point.

Définition

La **courbure de** P **à** p est par définition

$$\mathrm{K}(P, p) = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ,$$

où α, β, γ sont les angles internes de tout triangle entourant uniquement p.

La courbure à un point d'un polyèdre

Soit P un polyèdre et $p \in P$ un point.

Définition

La **courbure de** P **à** p est par définition

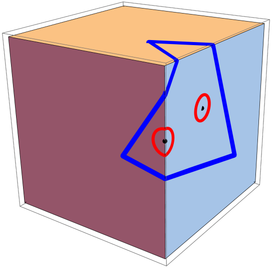
$$\mathrm{K}(P, p) = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ,$$

où α, β, γ sont les angles internes de tout triangle entourant uniquement p.
Également,

$$\mathrm{K}(P, p) = 360^\circ - (\theta_1 + \cdots + \theta_k),$$

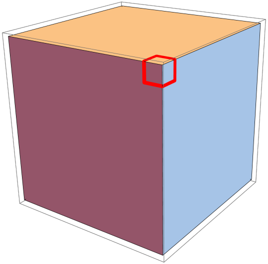
où $\theta_1, \ldots, \theta_k$ sont les angles autour de p sur P.

Courbure du cube



$$\mathrm{K}(P, p) = 0$$

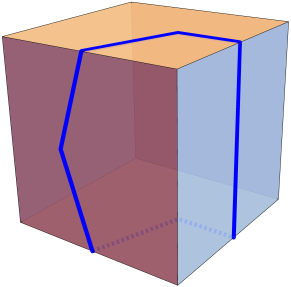
si p n'est pas un sommet

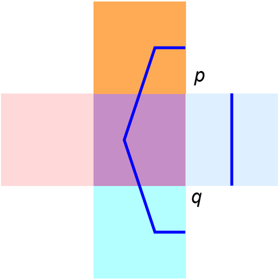


Au sommet:

$$\mathrm{K}(P, p) = 360^\circ - 3 \cdot 90^\circ = 90^\circ$$
$$= 270^\circ - 180^\circ.$$

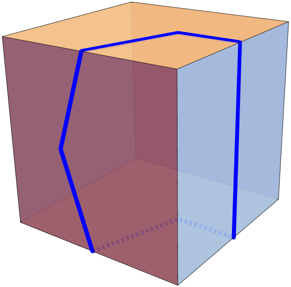
Courbure totale

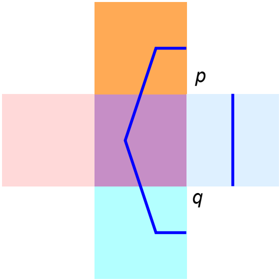




Défi: Montrer que la somme des angles internes vaut $180^\circ + K(P,p) + K(P,q)$.

Courbure totale



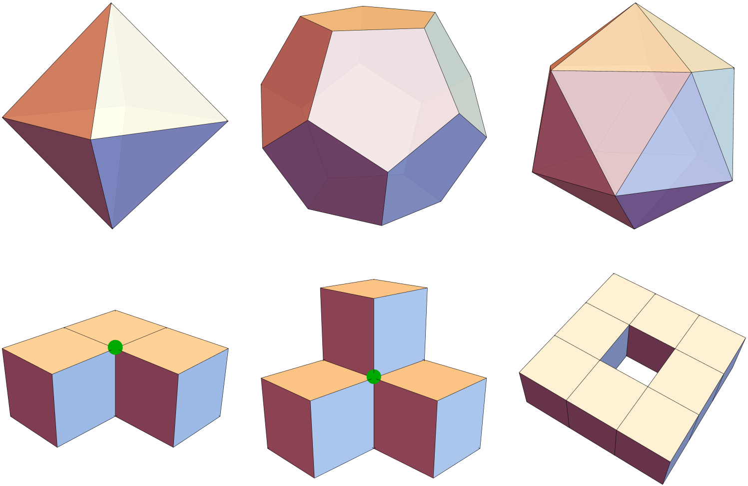


Défi: Montrer que la somme des angles internes vaut $180^\circ + K(P,p) + K(P,q)$.

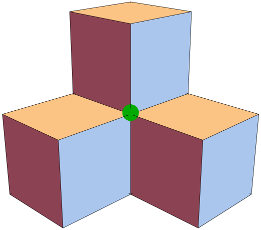
Définition

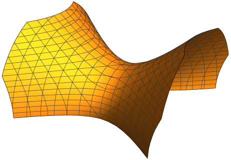
La **courbure totale de** P, $K(P)$, est la somme des courbures $\mathrm{K}(P,p)$ de tous les sommets $p \in P$.

À vous de jouer!

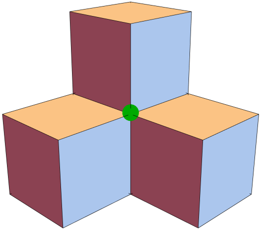


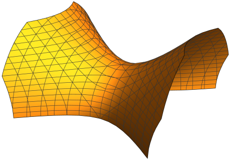
Courbure négative et surfaces hyperboliques



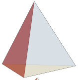
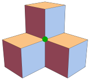
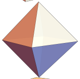
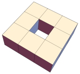
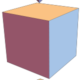
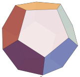
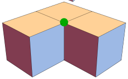


Courbure négative et surfaces hyperboliques

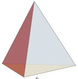
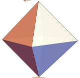
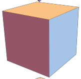
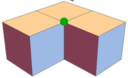


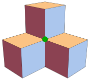
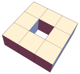
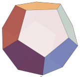
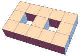


Kale vert

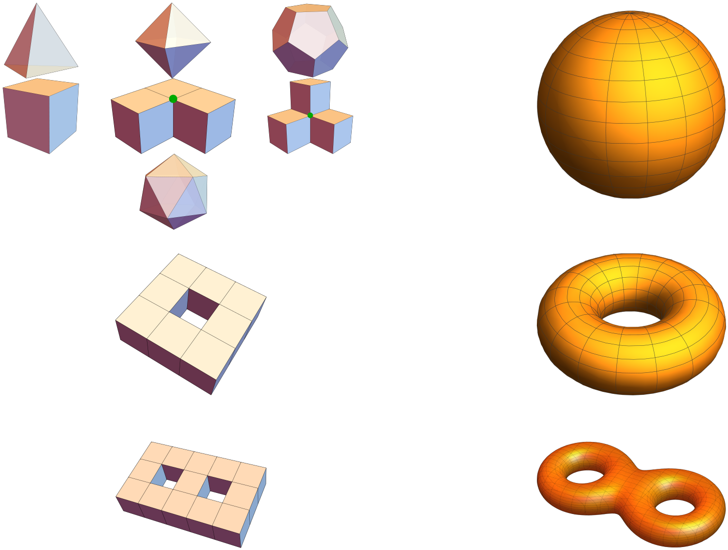
Polyèdre	$K(P,p)$	$K(P)$	Polyèdre	$K(P,p)$	$K(P)$
	180°	720°		-180°	720°
	120°	720°		$\pm 90^\circ$	0°
	90°	720°		36°	720°
	-90°	720°		60°	720°

La courbure totale

Polyèdre	$K(P,p)$	$K(P)$
	180°	720°
	120°	720°
	90°	720°
	-90°	720°

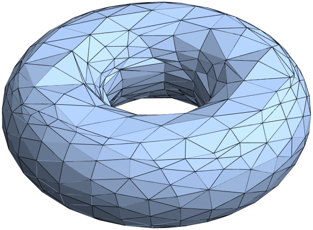
Polyèdre	$K(P,p)$	$K(P)$
	-180°	720°
	$\pm 90^\circ$	0°
	36°	720°
	60°	720°
	$\pm 90^\circ$	-720°

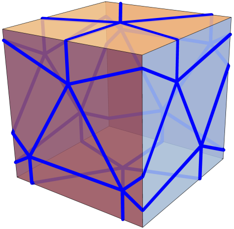
La courbure totale et la **topologie** du polyèdre



Calculation de courbure totale

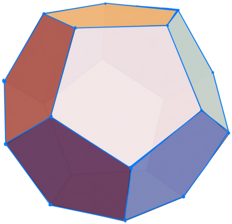
- **Théorème (Descartes)**: La courbure totale ne dépend que sur la **topologie** du polyèdre.
- *Topologie: l'étude des propriétés d'objets préservées par déformations continues.*
- Une **triangulation** d'une surface P est une partition de P en triangles, telle que l'intersection de deux triangles est une arête commune, un sommet commun, ou vide.





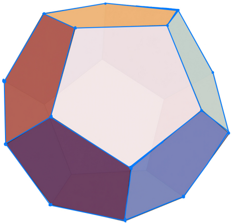
Calculation de courbure totale

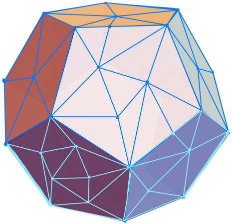
Soit P un polyèdre. Choisissons une triangulation de P incluant tous les arêtes et sommets de P.



Calculation de courbure totale

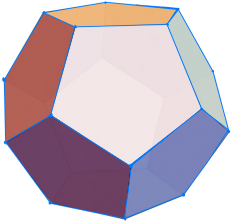
Soit P un polyèdre. Choisissons une triangulation de P incluant tous les arêtes et sommets de P.

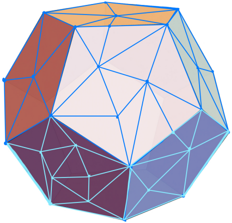




Calculation de courbure totale

Soit P un polyèdre. Choisissons une triangulation de P incluant tous les arêtes et sommets de P.



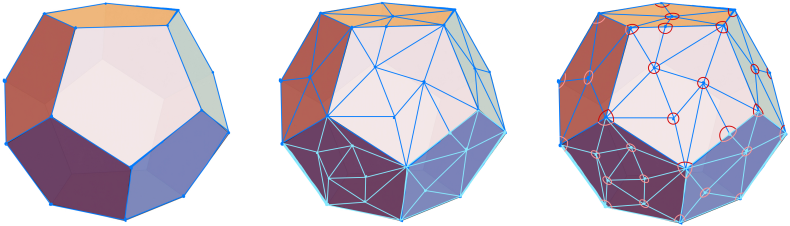


Soit:

- f le nombre de triangles (faces de la triangulation),
- a le nombre d'arêtes de la triangulation
- s le nombre de sommets de la triangulation

Calculation de courbure totale

Soit P un polyèdre. Choisissons une triangulation de P incluant tous les arêtes et sommets de P.

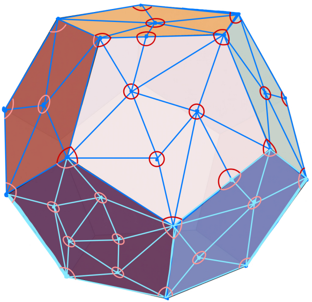


Soit:

- f le nombre de triangles (faces de la triangulation),
- a le nombre d'arêtes de la triangulation
- s le nombre de sommets de la triangulation

Calculons $S =$ la somme de tous les angles.

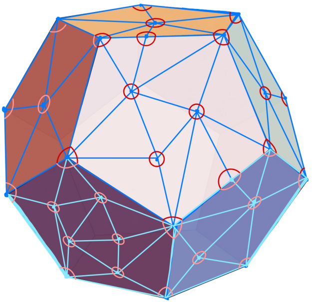
La somme des angles d'une triangulation



1. Par construction, tous les **triangles** sont planaires. La somme est donc

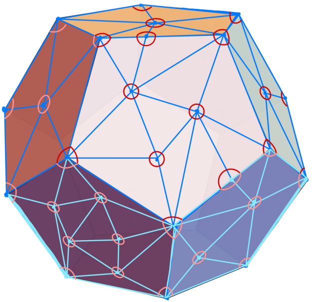
$$S = 180^\circ \cdot f.$$

La somme des angles d'une triangulation



1. Par construction, tous les **triangles** sont planaires. La somme est donc
$$S = 180^\circ \cdot f.$$
2. La somme des angles entourant p est
$$360^\circ - k(P, p)$$
(360° si p n'est pas un sommet de P).

La somme des angles d'une triangulation



1. Par construction, tous les **triangles** sont planaires. La somme est donc

$$S = 180^\circ \cdot f.$$

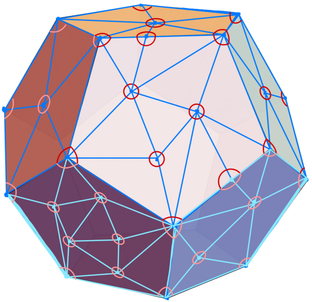
2. La somme des angles entourant p est

$$360^\circ - k(P,p)$$

(360° si p n'est pas un sommet de P).

$$\text{Donc,} \quad S = \sum_p (360^\circ - k(P,p))$$
$$= 360^\circ \cdot s - k(P).$$

La somme des angles d'une triangulation



1. Par construction, tous les **triangles** sont planaires. La somme est donc

$$S = 180^\circ \cdot f.$$

2. La somme des angles entourant p est

$$360^\circ - k(P, p)$$

(360° si p n'est pas un sommet de P).

$$\text{Donc,} \quad S = \sum_p (360^\circ - k(P, p)) = 360^\circ \cdot s - k(P).$$

Alors, $180^\circ \cdot f = 360^\circ \cdot s - k(P) \quad \rightsquigarrow \quad k(P) = 360^\circ \cdot (s - f/2).$

La caractéristique d'Euler

$$\rightsquigarrow \quad \frac{k(P)}{360^\circ} = s - f/2.$$

La caractéristique d'Euler

$$\rightsquigarrow \quad \frac{k(P)}{360^\circ} = s - f/2.$$

Observations:

- la côté gauche dépend seulement sur P, pas sur le choix de triangulation.
- la côté droite dépend sur le nombre de composantes de la triangulation, mais pas sur les angles de P.

La caractéristique d'Euler

$$\rightsquigarrow \quad \frac{k(P)}{360^\circ} = s - f/2.$$

Observations:

- la côté gauche dépend seulement sur P, pas sur le choix de triangulation.
- la côté droite dépend sur le nombre de composantes de la triangulation, mais pas sur les angles de P.

La quantité $s - f/2$ se nomme la **caractéristique d'Euler de P**. Elle s'écrit également

$$\chi(P) = s - a + f = \text{sommets} - \text{arêtes} + \text{faces}.$$

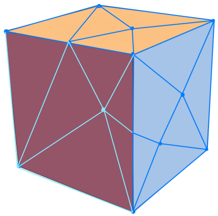
(Chaque triangle contenait 3 arêtes, et chaque arête se trouvait sur deux triangles, donc $a = \frac{3}{2}f$.)

La caractéristique d'Euler et la topologie

Caractéristique d'Euler

La **caractéristique d'Euler** d'un polyèdre P est la quantité $\chi(P) = s - a + f$, pour toute triangulation de P (n'importe quelle).

Elle ne dépend pas sur le choix de triangulation,

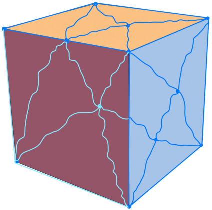


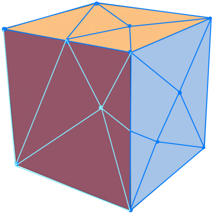
La caractéristique d'Euler et la topologie

Caractéristique d'Euler

La **caractéristique d'Euler** d'un polyèdre P est la quantité $\chi(P) = s - a + f$, pour toute triangulation de P (n'importe quelle).

Elle ne dépend pas sur le choix de triangulation,
ni sur l'utilisation de lignes droites,



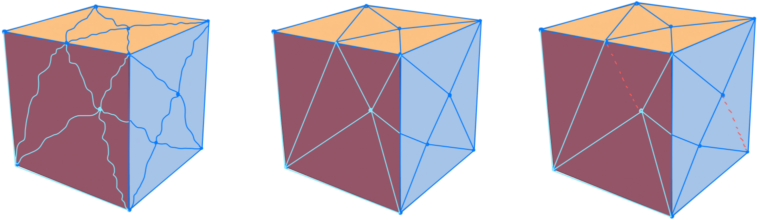


La caractéristique d'Euler et la topologie

Caractéristique d'Euler

La **caractéristique d'Euler** d'un polyèdre P est la quantité $\chi(P) = s - a + f$, pour toute triangulation de P (n'importe quelle).

Elle ne dépend pas sur le choix de triangulation,
ni sur l'utilisation de lignes droites,
ni sur l'utilisation de triangles!

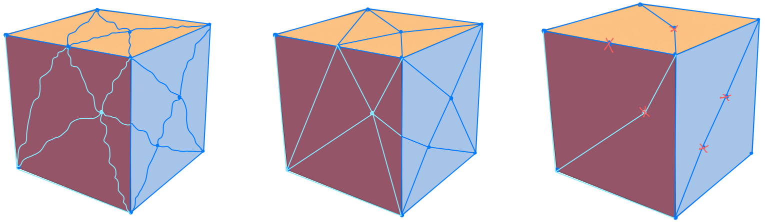


La caractéristique d'Euler et la topologie

Caractéristique d'Euler

La **caractéristique d'Euler** d'un polyèdre P est la quantité $\chi(P) = s - a + f$, pour toute triangulation de P (n'importe quelle).

Elle ne dépend pas sur le choix de triangulation,
ni sur l'utilisation de lignes droites,
ni sur l'utilisation de triangles!

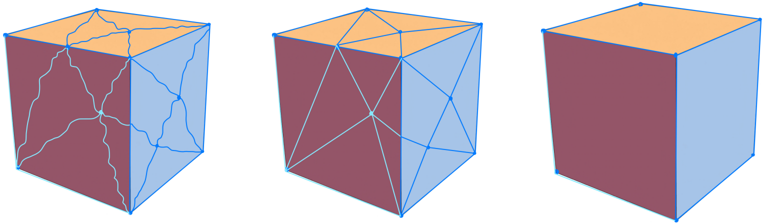


La caractéristique d'Euler et la topologie

Caractéristique d'Euler

La **caractéristique d'Euler** d'un polyèdre P est la quantité $\chi(P) = s - a + f$, pour toute triangulation de P (n'importe quelle).

Elle ne dépend pas sur le choix de triangulation,
ni sur l'utilisation de lignes droites,
ni sur l'utilisation de triangles!



Théorème de Descartes

Théorème (Descartes)

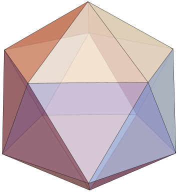
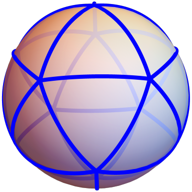
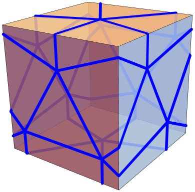
La caractéristique d'Euler (et donc la courbure totale) d'un polyèdre P ne dépend que sur la topologie de P.

Théorème de Descartes

Théorème (Descartes)

La caractéristique d'Euler (et donc la courbure totale) d'un polyèdre P ne dépend que sur la topologie de P.

Exemple. Transporter une triangulation de l'icosaèdre au cube:


$\rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow$


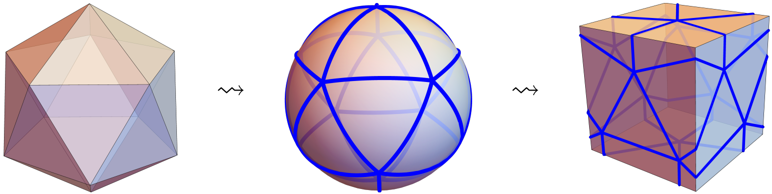
Donc $\chi(\text{icosaèdre}) = \chi(\text{cube})$.

Théorème de Descartes

Théorème (Descartes)

La caractéristique d'Euler (et donc la courbure totale) d'un polyèdre P ne dépend que sur la topologie de P.

Exemple. Transporter une triangulation de l'icosaèdre au cube:



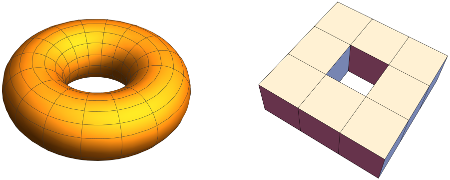
Donc $\chi(\text{icosaèdre}) = \chi(\text{cube})$.

Conclusion. Tout polyèdre *homéomorphe à une sphère* aurait

$$\chi(P) = \chi(\text{sphère}) = \chi(\text{cube}) = 2.$$

Le tore?

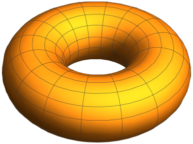
Par contre, le **tore** ne peut être triangulée de la même façon:

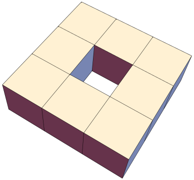


on a $\chi(\text{tore}) = 32 - 64 + 32 = 0$.

Le tore?

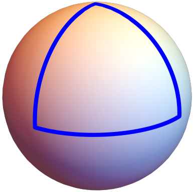
Par contre, le **tore** ne peut être triangulée de la même façon:



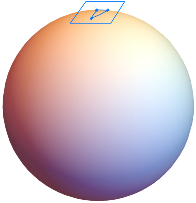


on a $\chi(\text{tore}) = 32 - 64 + 32 = 0$.
C'est donc **impossible** de transporter une triangulation "sphérique" à une tore.

Coda: Comment définir la courbure d'une sphère?



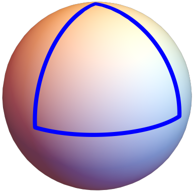
$3 \cdot 90 = 270^\circ$



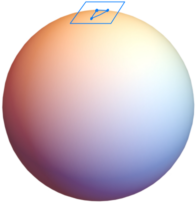
$\approx 180^\circ$

Évidemment, l'excès angulaire dépend sur la taille du triangle.

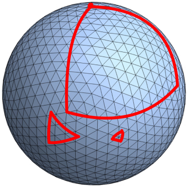
Coda: Comment définir la courbure d'une sphère?



$3 \cdot 90 = 270^\circ$



$\approx 180^\circ$



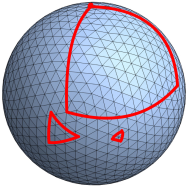
$180^\circ + \sum_p K(P,p)$

Évidemment, l'excès angulaire dépend sur la taille du triangle.

Idée

Utiliser un polyèdre avec $N \gg 0$ sommets. Prendre $\lim_{N \to \infty}$.

Noter que la courbure à un seul point approche 0. Il faut parler de **densité de courbure**.



Dans la limite $N \to \infty$, la somme des courbures devient

$$\lim_{N\to\infty} \sum_p K(P,p) = \iint_R K(P,p)\,dA,$$

l'intégrale de la densité de courbure sur la région R enfermée par le triangle.
L'analogue du "chemin droit" se nomme la **géodésique**.

Théorème de Gauss–Bonnet

L'analogue du théorème de Descartes sur la courbure des polyédres:

Théorème (Gauss–Bonnet ∼1820s)

Sur une surface lisse P on a $\displaystyle\iint_P K(P,p)dA = 2\pi \cdot \chi(P).$

La courbure et la caractéristique d'Euler font partie de la **géométrie différentielle** et de la **topologie algébrique**. Ce n'est que le début d'une histoire très riche!

Merci!

- Ford, N. "Curvature of polyhedra," `https://nicf.net/articles/curvature-of-polyhedra/`