Tambours, billards et Gauss

Iosif Polterovich

Université de Montréal

Découvrir le monde mathématique, mai 2023

Vibration d'une corde

Considérons une corde de guitare (ou d'un autre instrument) de longueur l.

Pour simplifier le calcul, on suppose que $l = \pi$.

Question: comment trouver les frequences des sons?

Problème de Sturm–Liouville

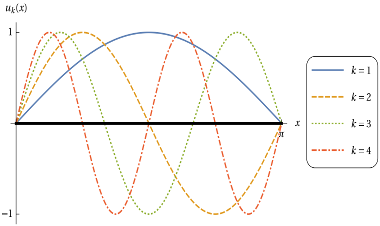
L'équation des ondes nous ramène à un problème de *Sturm-Liouville*:

$$-u'' = \lambda u, \quad u(0) = u(\pi) = 0.$$

Ici $u(x)$ est l'amplitude de vibration.

On cherche les valeurs propres λ et les fonctions propres u qui sont les solutions de ce problème.

Les harmoniques



$$u_k(x) = \sin kx, \quad k = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

$$\lambda_k = 1, 4, 9, 16, \ldots$$

Les fréquences correspondent aux $\sqrt{\lambda_k}$.

Corollaire Les instruments à cordes sont harmoniques: les fréquences des partiels sont des multiples entiers de la fréquence fondamentale.

Vibration d'un tambour carré

(Ça existe! Par exemple, à Pérou.)

Le problème de Sturm-Liouville est remplacé par un problème spectrale pour le laplacien:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Problème aux valeurs propres de Dirichlet

Soit $\Omega = [0, \pi] \times [0, \pi]$. On obtient le problème suivant pour $(x, y) \in \Omega$:

$$-\Delta u(x, y) = \lambda u(x, y), \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

La condition frontière de Dirichlet signifie que la peau de tambour est bien attachée.

Séparation des variables: on cherche

$$u(x, y) = v(x)w(y), \;\; v(0) = v(\pi) = w(0) = w(\pi) = 0.$$

Si $v(x)$, $w(x)$ sont les solutions du problème de Sturm-Liouville avec les valeurs propres $\lambda^{(v)}$, $\lambda^{(w)}$, on a

$$-\Delta\left(v(x)w(y)\right) = -v''(x)w(y) - v(x)w''(y) = (\lambda^{(v)} + \lambda^{(w)})v(x)w(y).$$

Les valeurs propres d'un carré

Autrement dit, les solutions sont les *produits* des solutions pour une corde vibrante, et les valeurs propres sont les **sommes** des valeurs propres pour une corde vibrante!

$$\lambda_{m,n} = m^2 + n^2, \quad m, n = 1, 2, \ldots$$

$$u_{m,n} = \sin(mx)\sin(ny).$$

Les premières valeurs propres sont $2, 5, 5, 8, 10, 10, \ldots$

Remarque Est-ce que le tambour carré est harmonique? NON! En fait, aucun tambour *homogène* n'est harmonique. Cependant, si on permet une membrane non-homogène, on peut construire un tambour presque harmonique:

Un tabla. Le dayan (à gauche) est presque harmonique.

Un petit détour: multiplicités

Rappellons notre suite: $2, 5, 5, 8, 10, 10, \ldots$

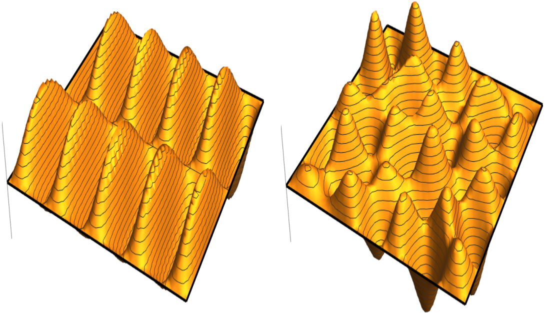
On a des multiplicités! Est-ce que les valeurs propres sont au plus doubles? NON!

$$85 = 9^2 + 2^2 = 7^2 + 6^2.$$

La structure des multiplicités est bien comprise, et c'est une question interéssante en théorie des nombres:

Combien façons y-a-t-il pour répresenter un entier comme une somme de deux carrés?

Fonctions propres d'une valeur propre multiple: un exemple

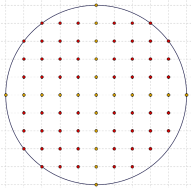


Deux fonctions propres sur un carré unit/é correspondantes à la valeur propre 85. À la gauche, c'est $\sin(2x)\sin(9y)$. À la droite, c'est plus compliquée!

Problème du cercle de Gauss

Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

Question Combien de points aux coordonnées entières (m, n) sont trouvées à l'intérieur d'un disque D_r du rayon r, quand $r \to \infty$?



Compte des points entiérs

Posons $\mathcal{N}(r)$ = #{points entiers dans D_r } = # $\{m, n \in \mathbb{Z} \,|m^2 + n^2 < r^2\}$.

(On reconnaît les valeurs propre du carré!)

Théorème (Gauss, 1810s)

$$\mathcal{N}(r) = \pi r^2 + \mathcal{R}(r), \quad \mathcal{R}(r) = O(r).$$

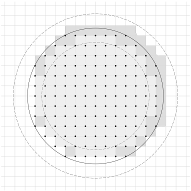
Démonstration. À chaque point (m, n) on associe un carré unité t.q. (m, n) est son sommet sud-ouest. Alors, si $m^2 + n^2 < r^2$, ce carré est contenu dans un disque du rayon $r + \sqrt{2}$, et donc

$$\mathcal{N}(r) < \mathrm{Aire}(D_{r+\sqrt{2}}) = \pi(r + \sqrt{2})^2. \quad \text{(I)}$$

De même façon, si un carré a une intersection non-vide avec un disque $D_{r-\sqrt{2}}$, alors $m^2 + n^2 < r^2$, et donc

$$\mathcal{N}(r) > \mathrm{Aire}(D_{r-\sqrt{2}}) = \pi(r - \sqrt{2})^2. \quad \text{(II)}$$

Compte des points entiers-2



En mettant (I) et (II) ensemble on obtient

$$\mathcal{N}(r) = \pi r^2 + \mathcal{R}(r),$$

où

$$|\mathcal{R}(r)| < 2\pi\sqrt{2}\, r + 2\pi = O(r). \qquad \square$$

Problème du cercle de Gauss: trouver la borne optimale sur le reste $\mathcal{R}(r)$.

Conjecture de Hardy–Landau

Conjecture (Hardy–Landau, 1916)

$$\mathcal{R}(r) = O\left(r^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Si juste, la borne est optimale.

C'est un problème ouvert extraordinaire en théorie analytique des nombres, relié aux autres questions importants, comme le problème de diviseurs de Dirichlet *(compter la somme de nombres des diviseurs de tout les entiers jusqu'au r)*.

1903-06 Voronoi, Sierpinski: $\frac{2}{3} = 0.6666\ldots$

(améliorations par plusieurs grands mathématiciens)

2017 Bourgain *(medaille Fields 1994)* — Watt: $\frac{517}{824} = 0.6274\ldots$

Progrès dans ≈ 120 ans: < 0.04!

La loi de Weyl-1

Soit $N(\lambda) = \#\{\lambda_i < \lambda\}$ la fonction de compte des valeurs propres. Le résultat de Gauss donne pour un carré $\pi \times \pi$:

$$N(\lambda) = \frac{\pi}{4}\lambda + O(\sqrt{\lambda})$$

Rappellons que m, n sont positifs, d'oú le facteur $\frac{1}{4}$: on s'intéresse seulement du quadrant positif dans un cercle du rayon $\sqrt{\lambda}$.

En fait, cette asymptotique est un cas spécial d'un théorème fondamental en géométrie spectrale s'appelle **la loi de Weyl**.

Hermann Weyl (1885–1955)

La loi de Weyl-2

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine planaire borné. Considérons le problème de Dirichlet sur Ω:

$$-\Delta u = \lambda u, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Théorème (Weyl, 1911; conjecturé par Lord Rayleigh en 1905)

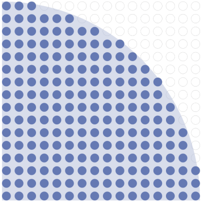
$$N(\lambda) = \frac{\text{Aire}(\Omega)}{4\pi}\lambda + o(\lambda)$$

Remarque: on peut *entendre* l'aire!

Question: peut-on améliorer la borne sur le reste?

Étudions d'abord le cas du carré en plus de detail.

Le vrai quart



Pour améliorer le reste, il faut calculer le quart des points entiers du disque de façon plus précise.

Puisque $m, n > 0$, les deux démi-axes sont **exclus**.

Mais on a quatre démi-axes au total, et donc un *vrai* quart contient **un démi-axe**.

Dans $D_{\sqrt{\lambda}}$ on a à peu près $\sqrt{\lambda}$ points entiers sur un démi-axe.

Alors, il faut soustraire $\sqrt{\lambda}$ de notre formule pour $N(\lambda)$.

Asymptotique à deux termes

En prenant en considération les contributions des axes, on obtient une formule asymptotique à deux termes:

$$N(\lambda) = \frac{\pi}{4}\lambda - \sqrt{\lambda} + o(\sqrt{\lambda}).$$

Weyl a conjecturé en 1911 qu'un résultat similaire est vrai pour tout domaine suffisamment régulière:

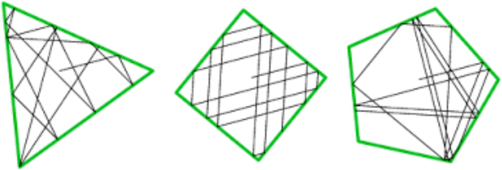
Conjecture (Weyl, 1911)

$$N(\lambda) = \frac{\mathrm{Aire}(\Omega)}{4\pi}\lambda - \frac{L(\partial\Omega)}{4\pi}\sqrt{\lambda} + o(\sqrt{\lambda}).$$

Cette conjecture est toujours ouverte, mais elle a été démontré en 1980 par V. Ivrii (présentement a U. Toronto) sous une condition suivante assez étonnante.

Un jeu de billard

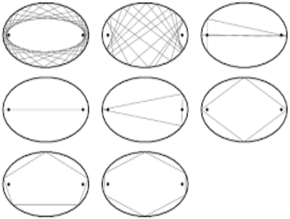
Un billard mathématique est un système dynamique très intéressant.



L'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion.

Trajectoires périodiques

Les trajectoires **périodiques** de billards sont de l'importance particulière.



Trajectoires périodiques d'un billard elliptique (*source: Wolfram MathWorld*)

À priori, il est clair que parmi toutes les trajectoires possibles, les trajéctoires périodiques sont asséz rares.

Trajectoires périodiques-2

Toute trajectoire de vitesse unité est uniquement défini par son point de départ et sa direction.

On peut donc identifier l'espace de toutes les trajectoires avec un certain espace de trois dimensions.

On peut aussi définir une *mésure* (i.e. volume) sur cet espace.

Théorème (Ivrii, 1980) La conjecture de Weyl est vrai si la mesure des trajectoires périodiques de billard dans Ω est **nulle**.

On dit qu'un tel domaine Ω respecte la condition de *non-périodicité*.

Remarque *Pourquoi une condition dynamique?*

La réponse est reliée au principe de correspondance de Bohr en mécanique quantique!

Trajectoires périodiques-3

Conjecture (Ivrii) Tous les domaines euclidiens respectent la condition de non-périodicité.

C'est un problème ouvert important en théorie des systèmes dynamiques.

Remarque Un billard **sphérique** est périodique: toutes les trajéctoires sont fermées! (ces sont les grandes cercles) .... et l'analogue de conjecture de Weyl *n'est pas vrai* sur une sphère!

Remarques finales

- En mathématiques, plusieurs sujets différents sont interconnectés.
  Il y a souvent de liens étonnant entre les domaines apparement éloignés.
- Il y a plusieurs problèmes avec des formulations simples qui sont **très** difficiles.
- Peu importe la théorie des nombres, la géométrie, ou l'analyse, vous pouvez étudier tout au DMS!

Après la pause: Étudier les billards dans un disque et dans un carré et caractériser les trajectories périodiques.