Topologie et visualisation

Maxime Fortier Bourque

1. Déformations

Un topologiste est quelqu’un qui ne sait pas faire la différence entre une tasse à café et un beigne.

La topologie est la discipline mathématique qui s'intéresse (entre autres) aux objets à déformation près.

C’est quoi une déformation?

C’est un mouvement continu dans le temps.

On s’imagine que les objets sont faits de caoutchouc très élastique.

On peut les plier, tordre, étirer, compresser.

On ne peut pas déchirer ou coller des bouts distincts ensemble.

Exercice 0

Regrouper les lettres de l’alphabet selon si on peut les déformer les unes dans les autres.

A B C D E F G H I J K L M N
O P Q R S T U V W X Y Z

Solution

C E F G H I J K L M

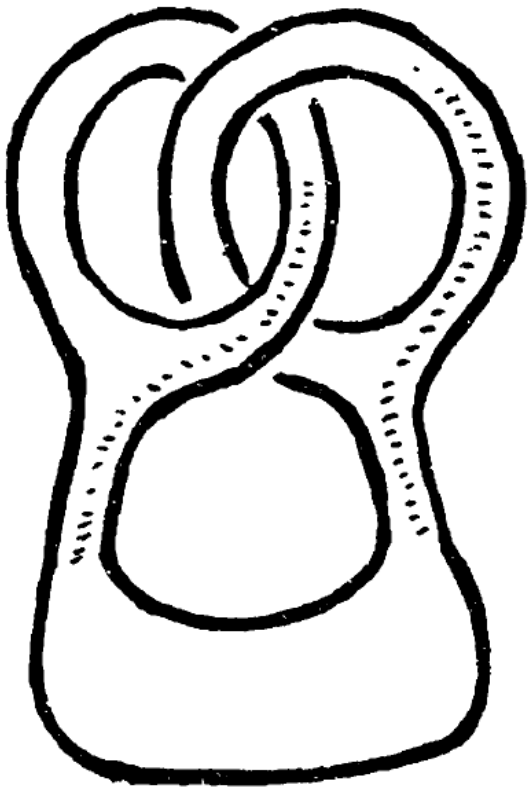
N S T U V W X Y Z

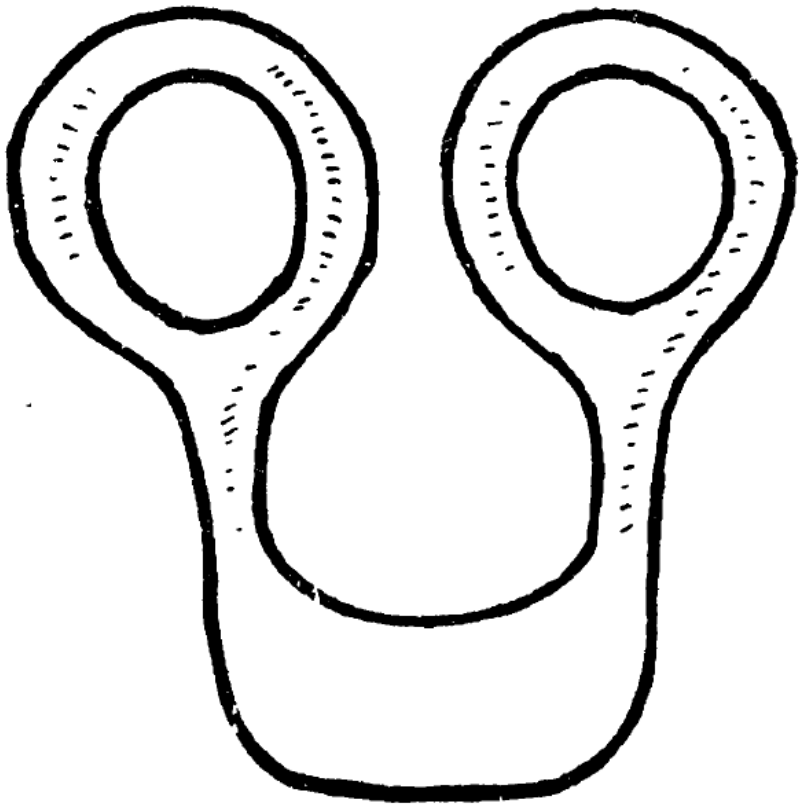
B

A D O P Q R

Exercice 1

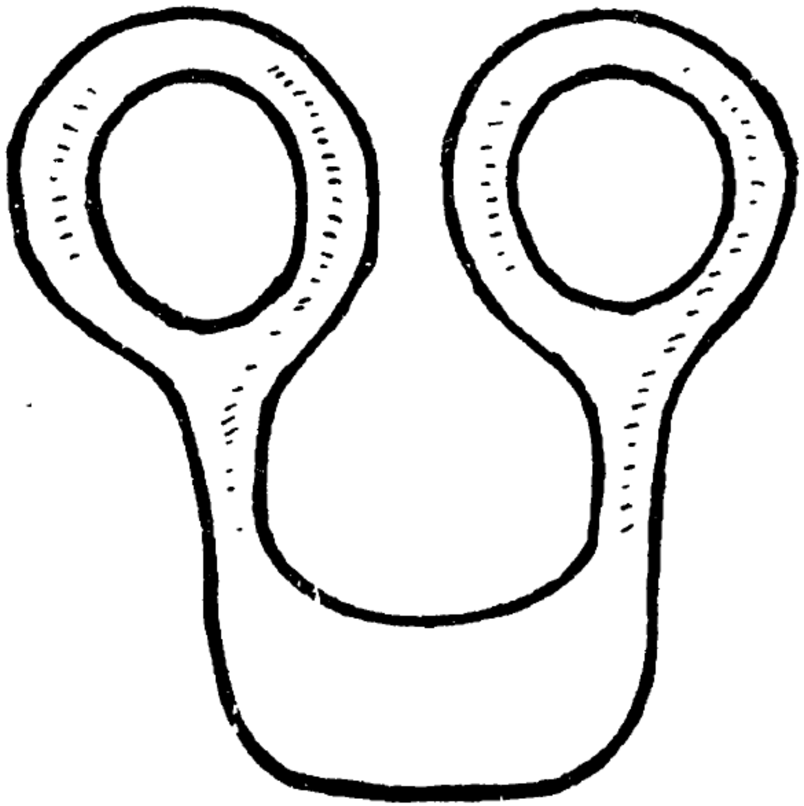
Montrer (à l’aide d’une suite de dessins) qu’il est possible de déformer l’image de gauche (un bretzel lié) en celle de droite (un bretzel non lié).





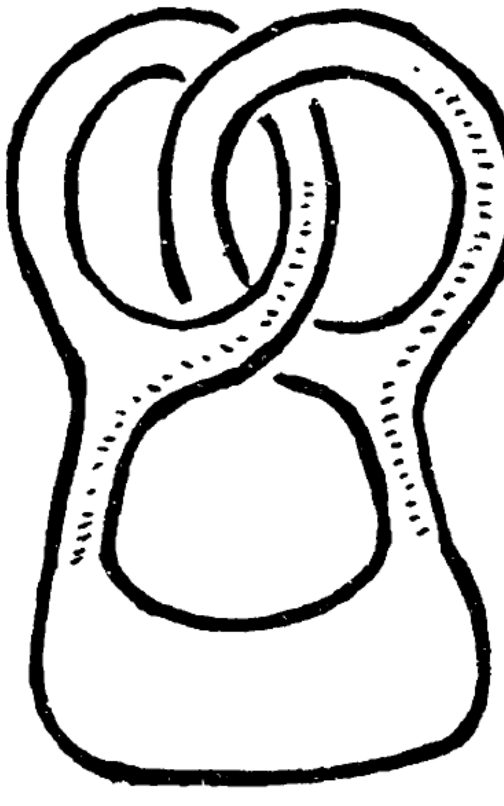
Exercice 1

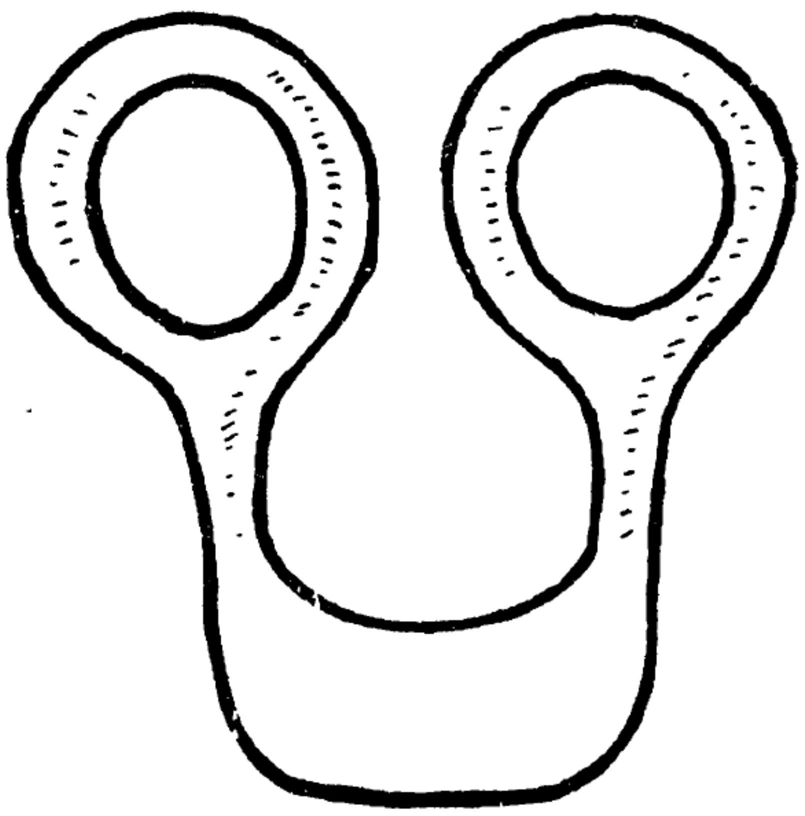
Montrer (à l'aide d'une suite de dessins) qu'il est possible de déformer l'image de gauche (un bretzel lié) en celle de droite (un bretzel non lié).



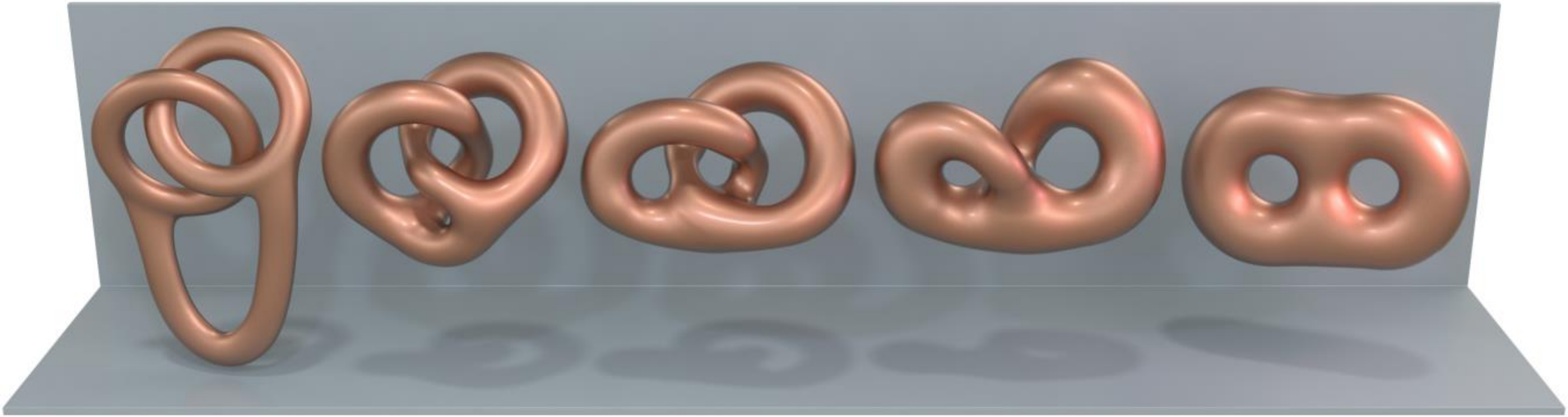
Exercice 1

Montrer (à l’aide d’une suite de dessins) qu’il est possible de déformer l’image de gauche (un bretzel lié) en celle de droite (un bretzel non lié).

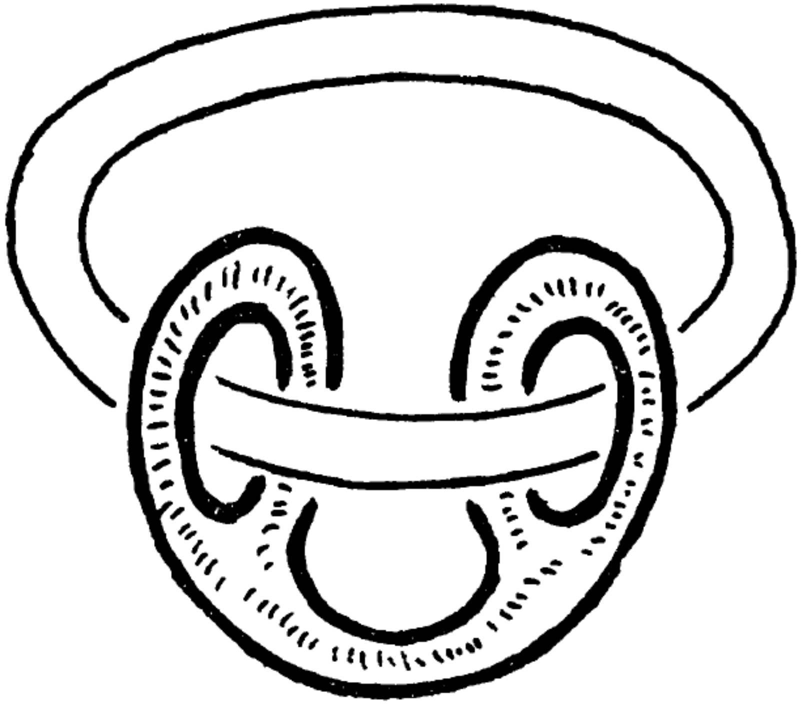


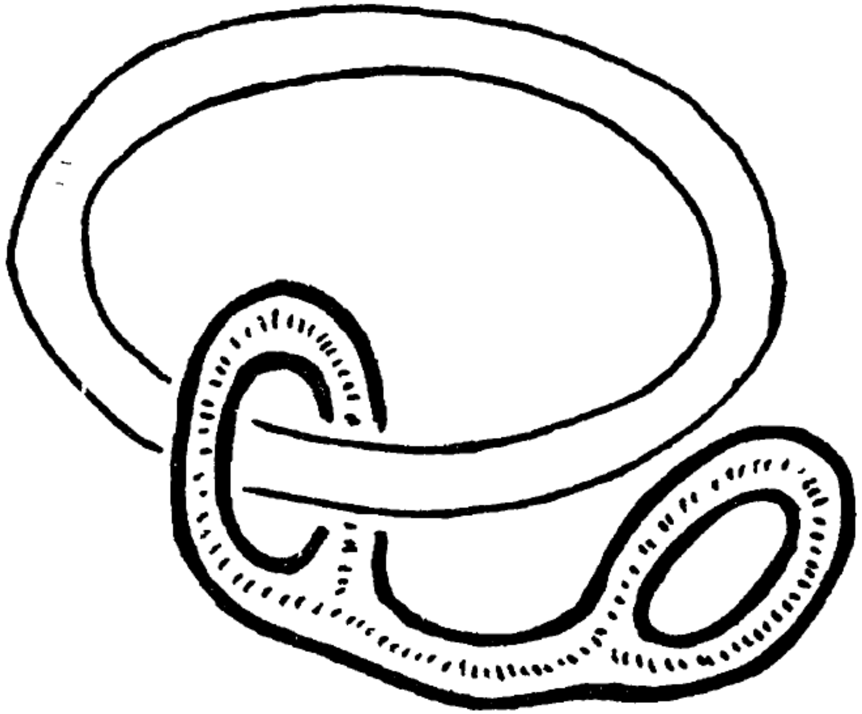


Solution

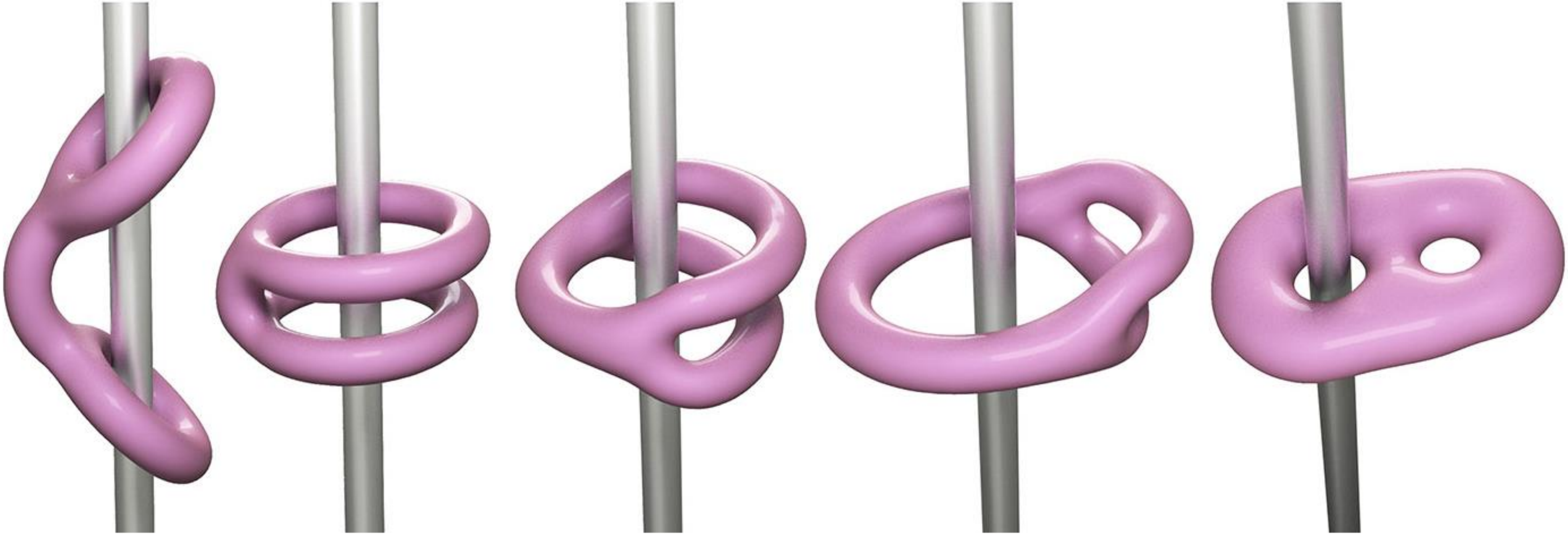


Exercice 2



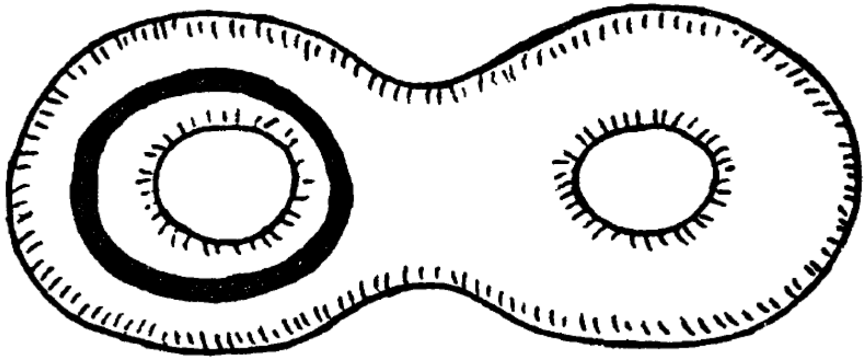


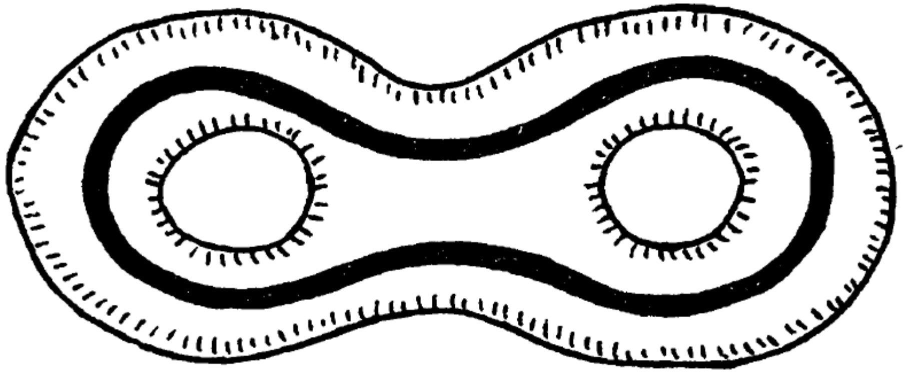
<u>Solution</u>



Exercice 3

Les images représentent un bretzel ou «beigne à deux trous» sur lequel on a dessiné une courbe. Déformer l’image de gauche en celle de droite.

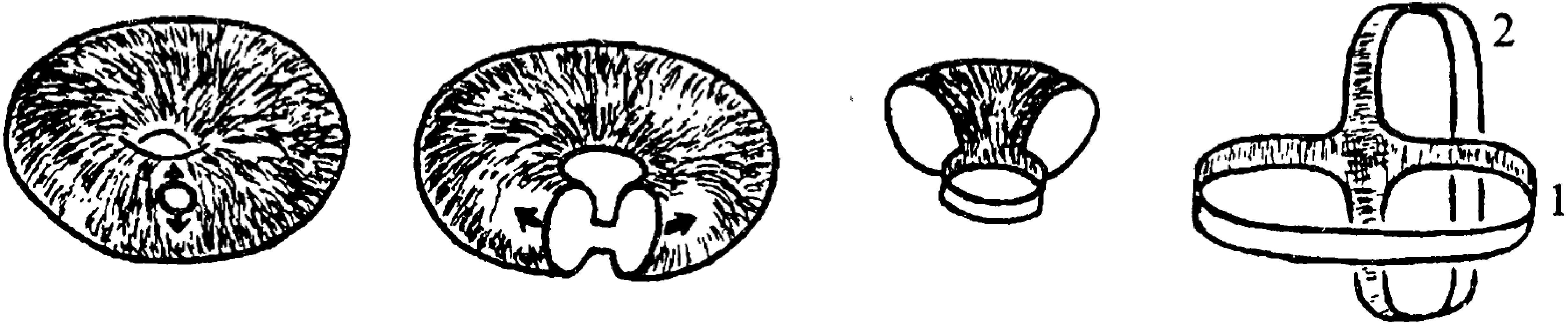




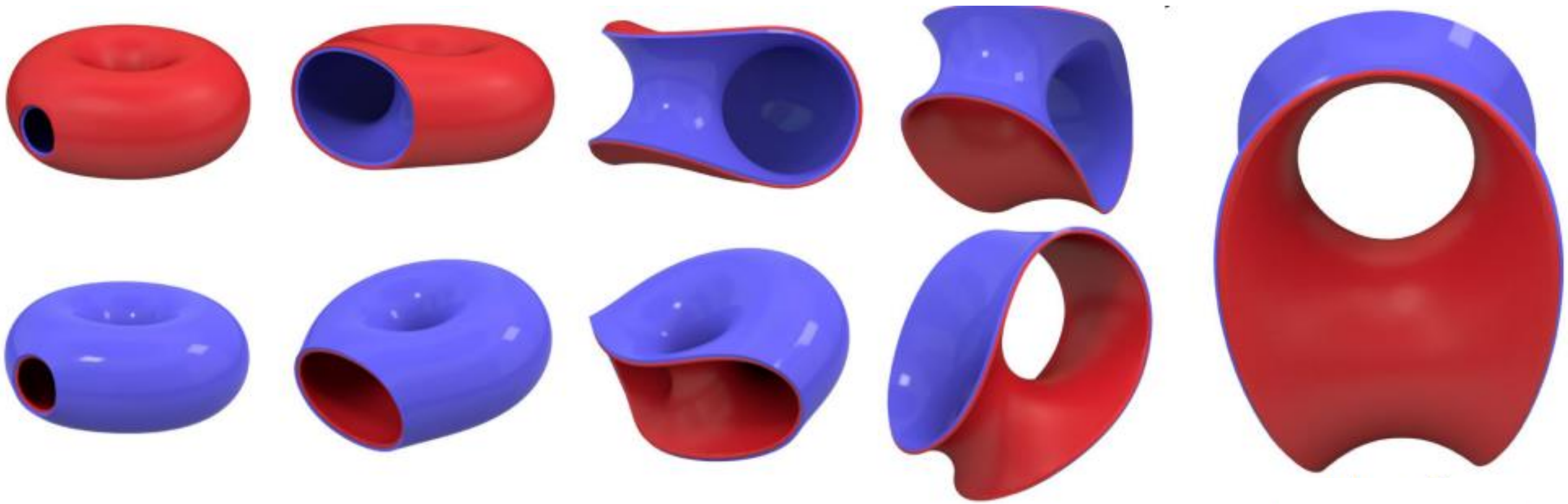
Exercice 4

Considérez une chambre à air percée d’un trou. Montrer qu’il est théoriquement possible de déformer la chambre à air de sorte à échanger la surface intérieure avec celle extérieure.

Solution



Solution



Exercice 5

En équipe de deux, faites vous des menottes avec la ficelle de sorte à ce que vous soyez entrelacés.

Laissez un espace d’un doigt aux poignets pour ne pas couper votre circulation sanguine.

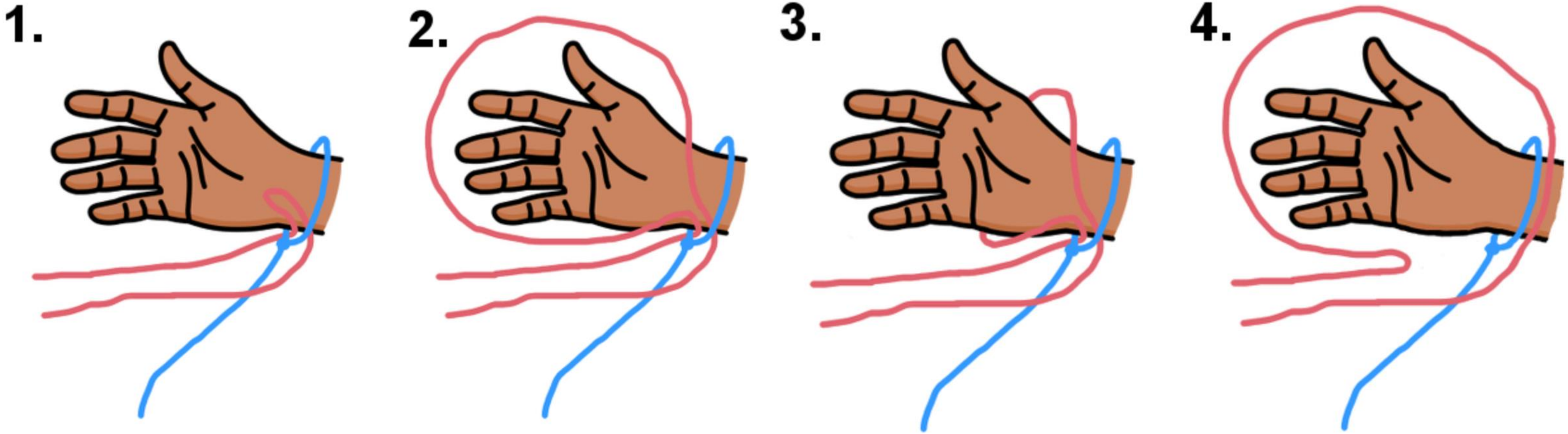
Exercice 5

En équipe de deux, faites vous des menottes avec la ficelle de sorte à ce que vous soyez entrelacés.

Laissez un espace d’un doigt aux poignets pour ne pas couper votre circulation sanguine.

Maintenant, déprenez vous sans détacher les menottes.

Solution

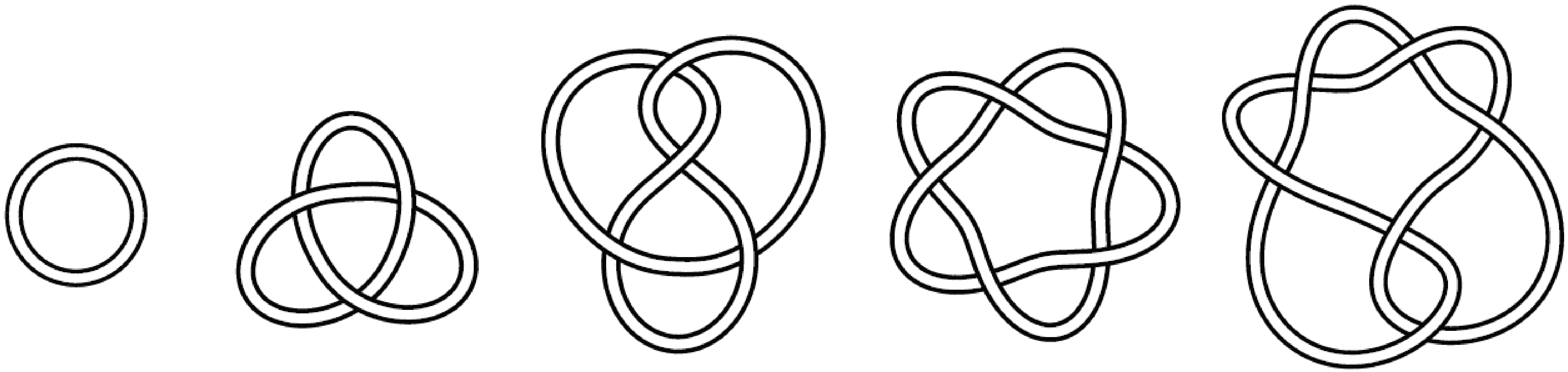


2. Nœuds

Les nœuds

Un nœud est une corde qu'on a enlacé dans l'espace et dont on a fusionné les deux bouts.

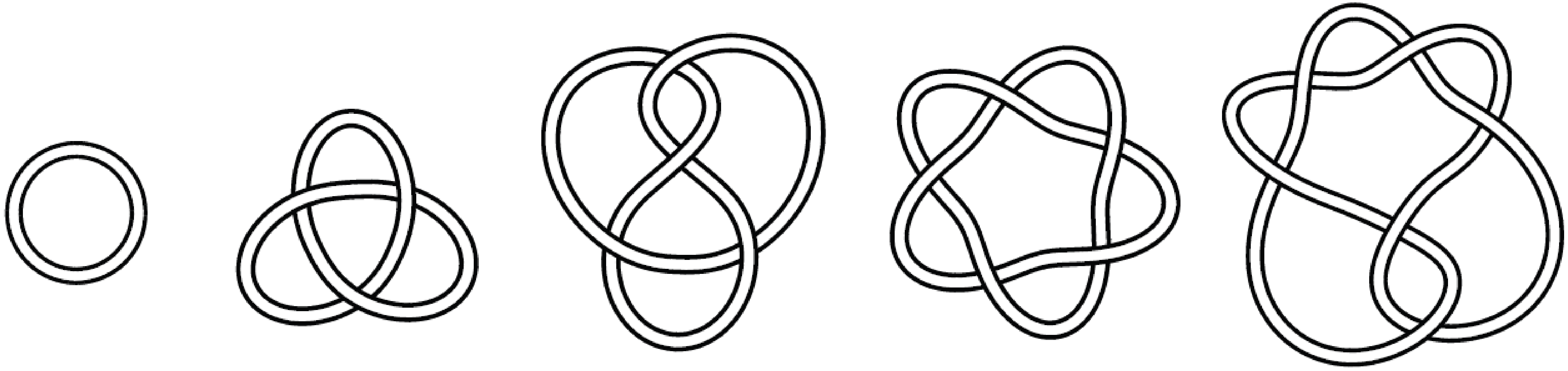
Mathématiquement, c'est l'image d'un cercle par une fonction continue injective vers l'espace Euclidien.



Les nœuds

Un nœud est une corde qu’on a enlacé dans l’espace et dont on a fusionné les deux bouts.

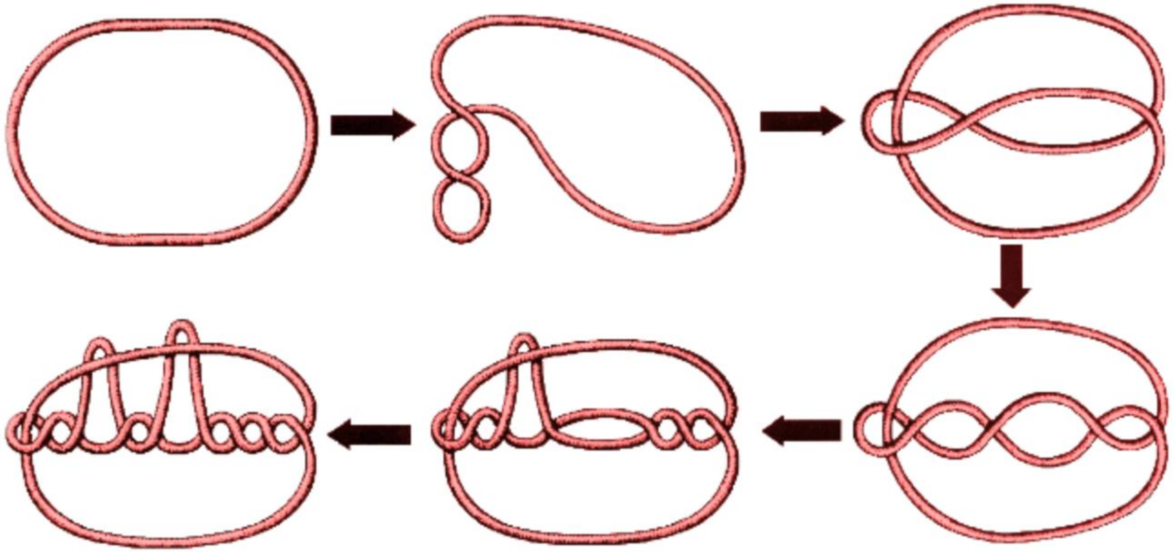
Deux nœuds sont considérés équivalents si on peut déformer l’un en l’autre.



Les nœuds

Un <u>nœud</u> est une corde qu'on a enlacé dans l'espace et dont on a fusionné les deux bouts.

Deux nœuds sont considérés <u>équivalents</u> si on peut déformer l'un en l'autre.

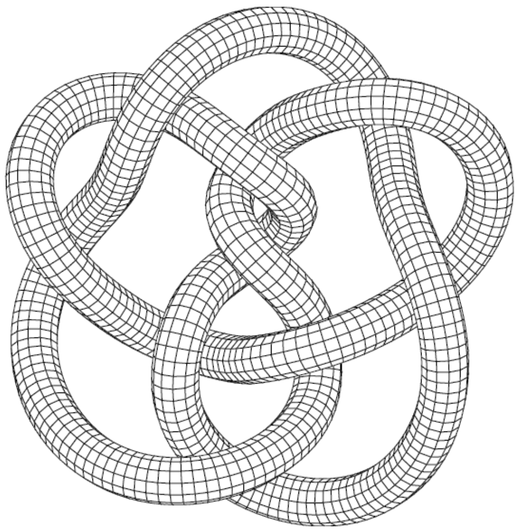


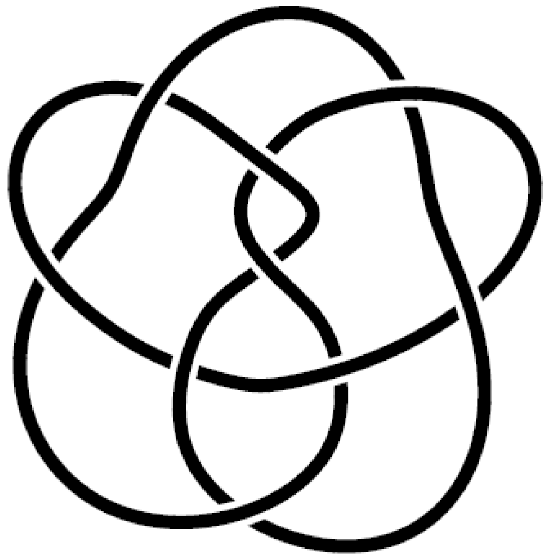
Tous les nœuds ci-contre sont équivalents au <u>nœud trivial</u>
(qui n'est pas noué)

Diagrammes

Un diagramme pour un nœud est une projection du nœud sur un plan, mais aux intersections on se rappelle quel brin passe par-dessus et lequel en dessous.

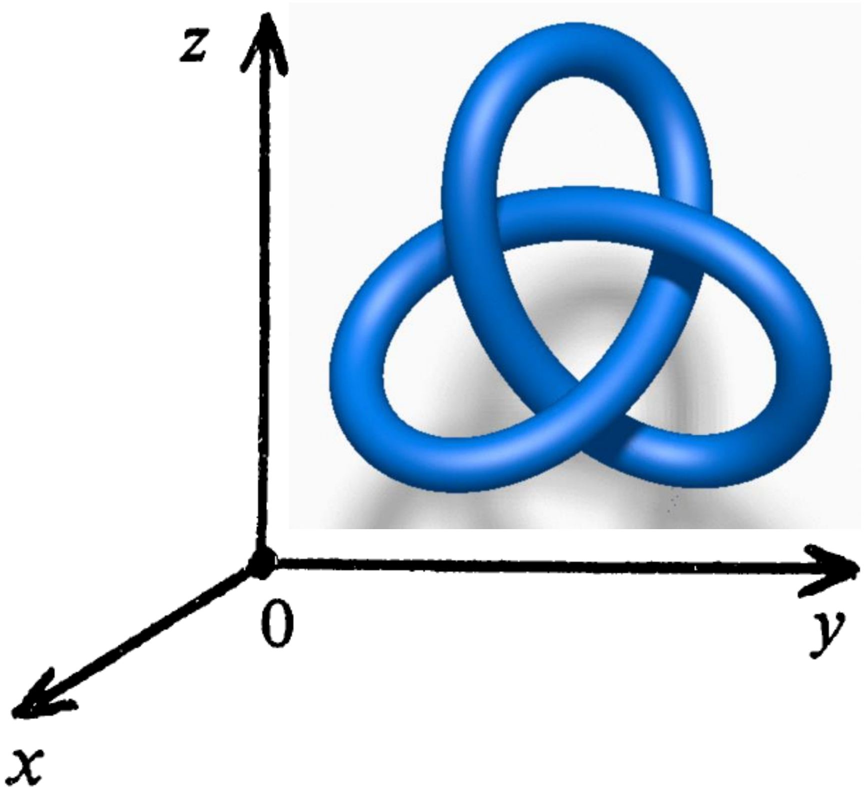
On choisit toujours des projections sans intersections triples.



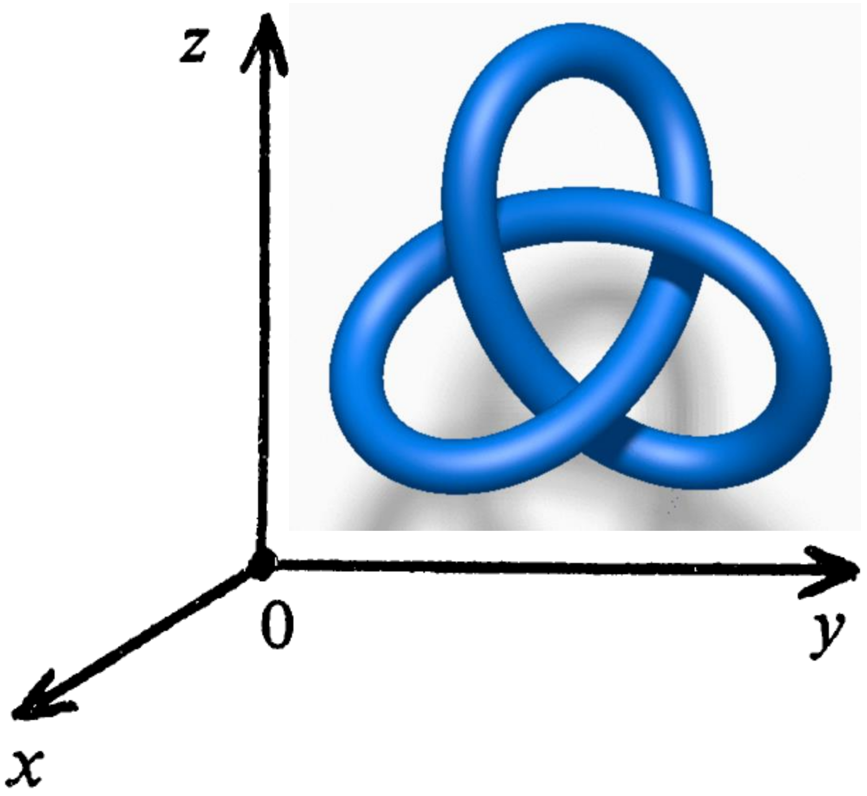


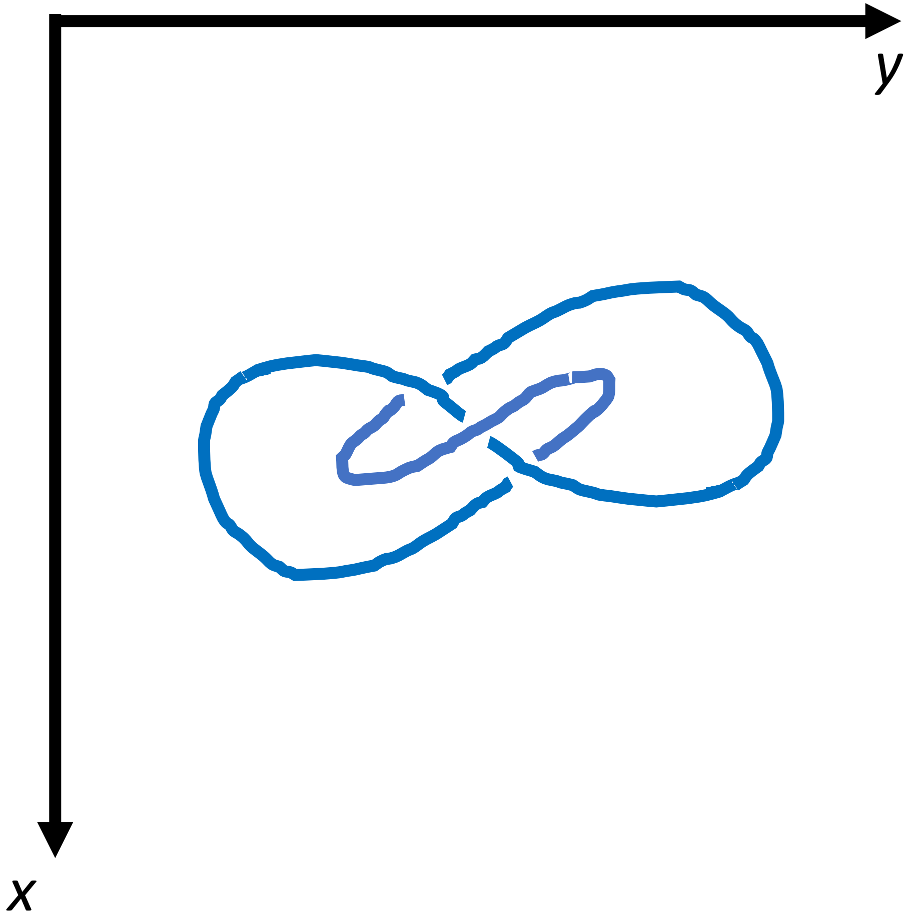
Exercice 6

Dessiner la projection du nœud suivant sur le plan *xy*.



Solution

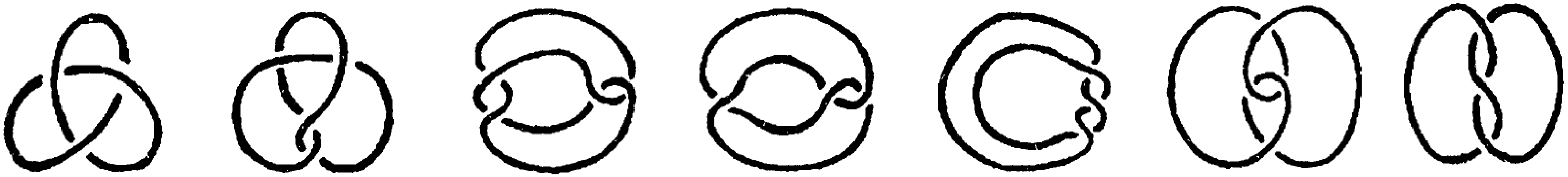




Exercice 7

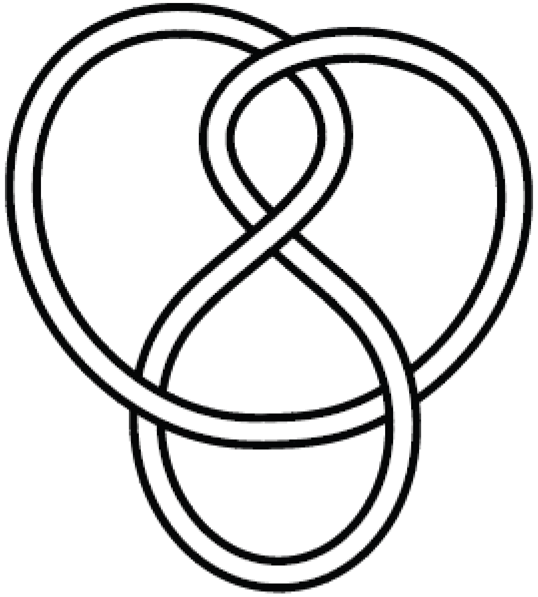
Montrer que tous les diagrammes suivants représentent des nœuds équivalents.

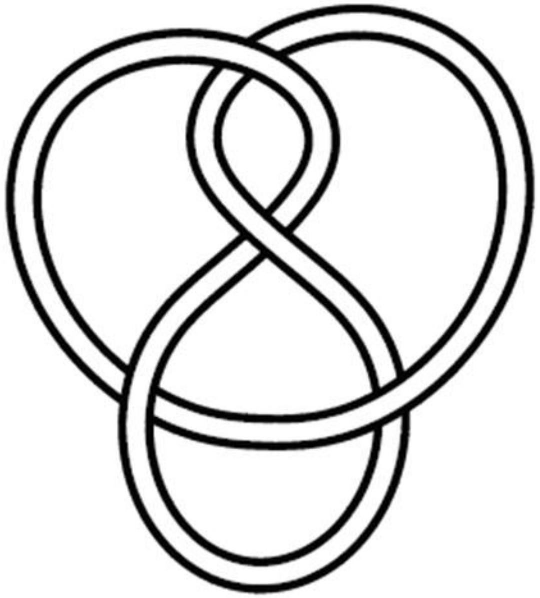
Pour ce faire, réalisez le premier nœud en collant les deux bouts de votre corde, puis faites une suite de mouvements pour obtenir tous les diagrammes.



Exercice 8

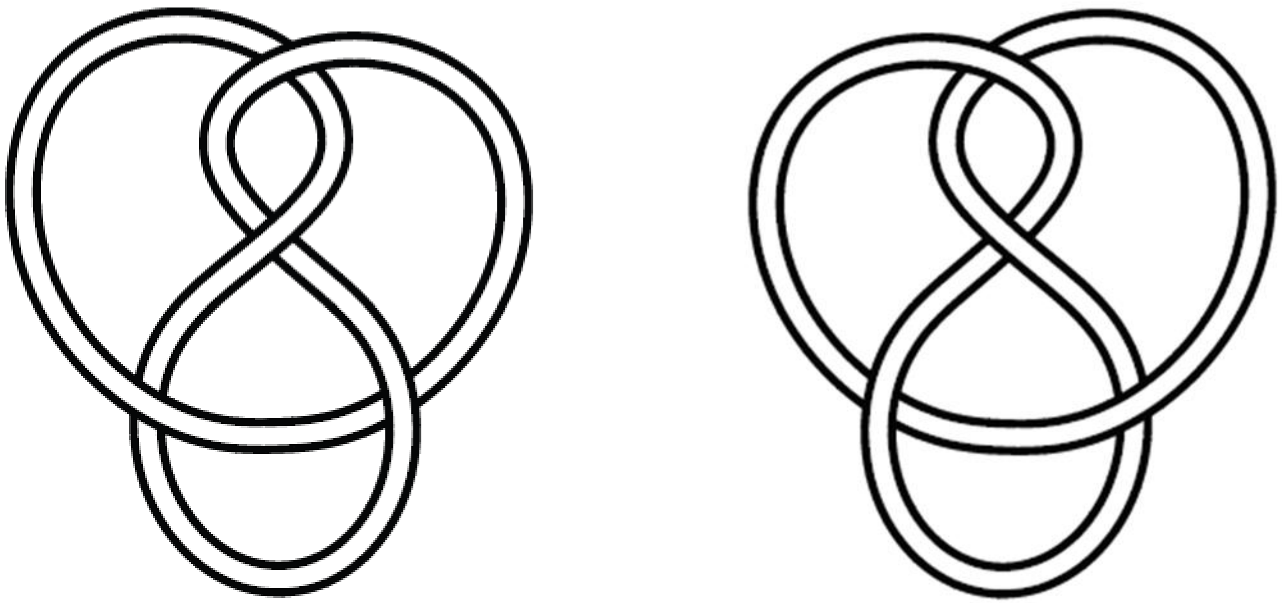
Montrer que le nœud en 8 est équivalent à son image miroir.





Exercice 8

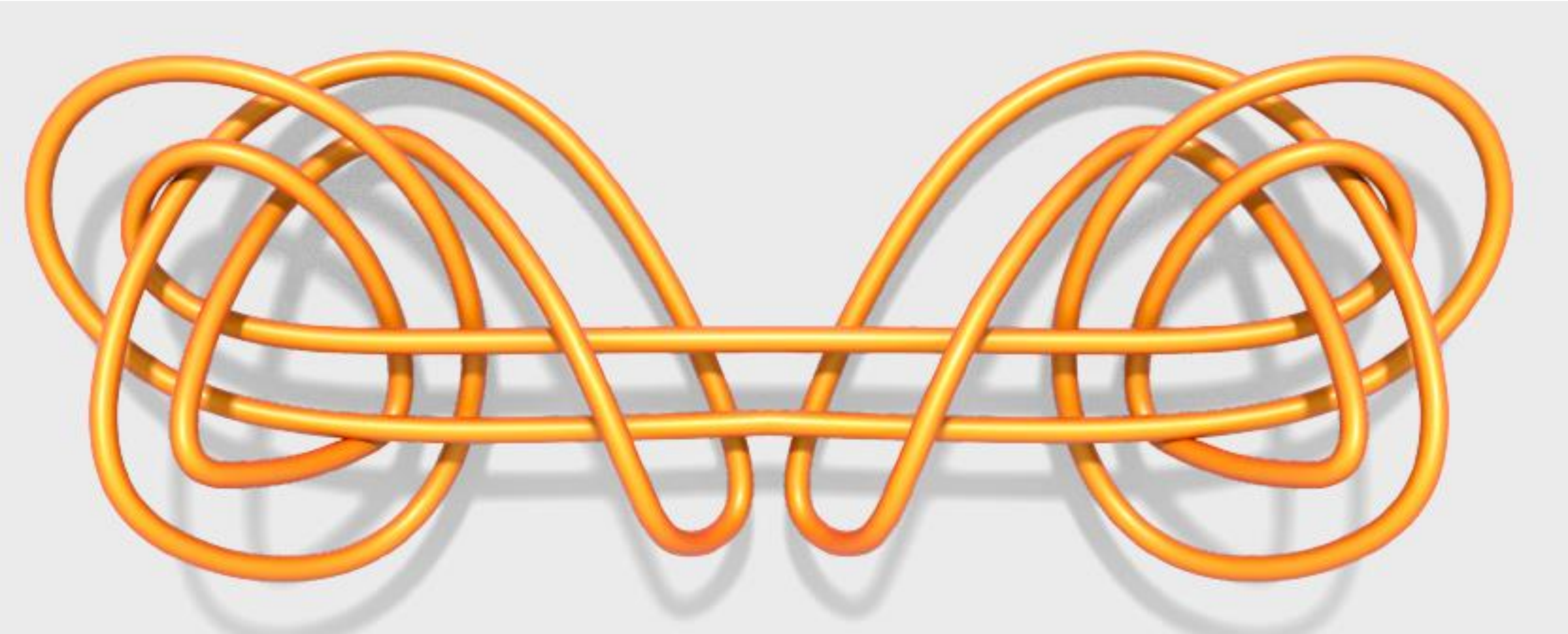
Montrer que le nœud en 8 est équivalent à son image miroir.



Ce n’est pas le cas pour le nœud en trèfle!

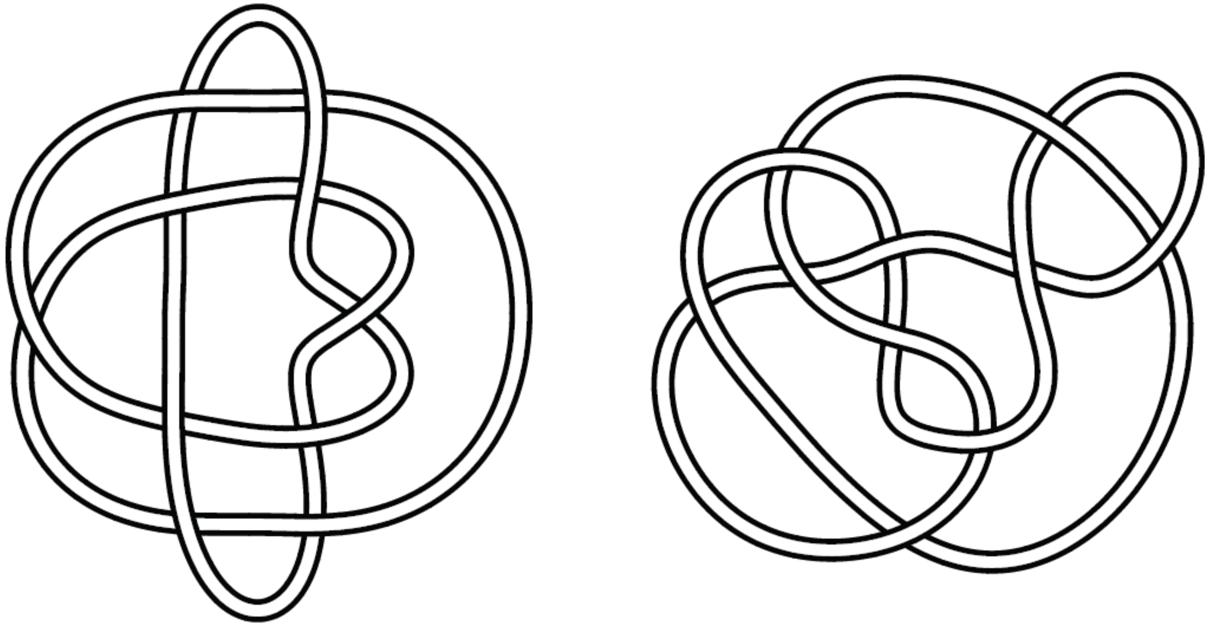
Exercice 9

Montrer que le nœud suivant est équivalent au nœud trivial.



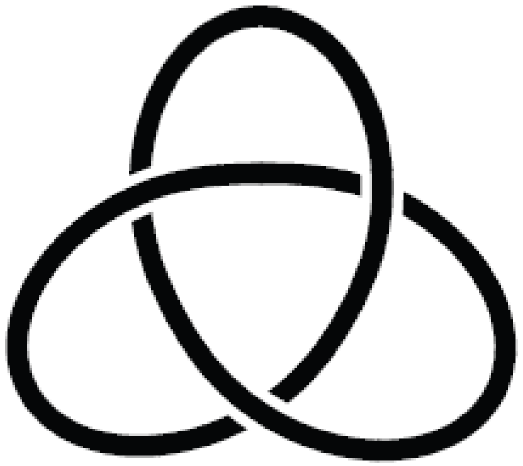
Devoir à faire à la maison

Montrer que la paire de Perko représentent des nœuds équivalents.

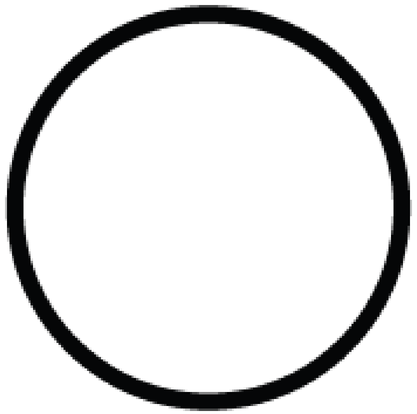


On a cru à tort que ces nœuds étaient distincts pendant 74 ans!

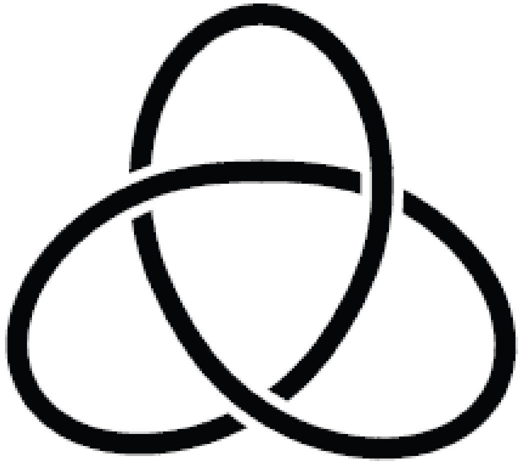
Comment montrer que deux nœuds ne sont **pas** équivalents?



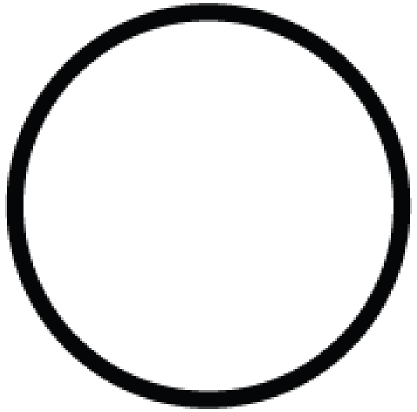
$\neq$



Comment montrer que deux nœuds ne sont **pas** équivalents?

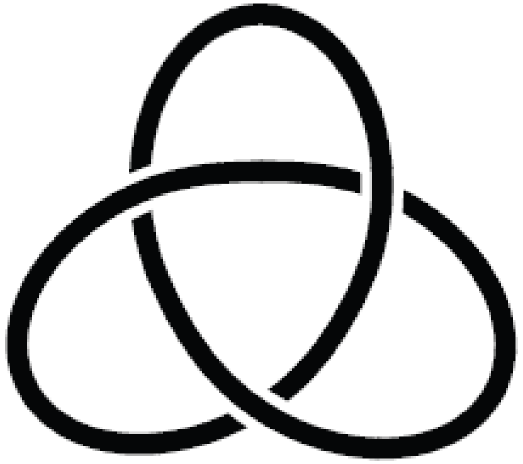


$\neq$

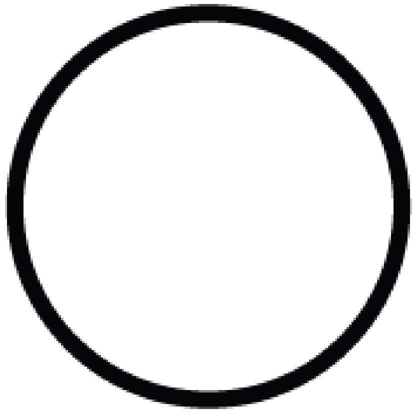


Avec des invariants!

Comment montrer que deux nœuds ne sont **pas** équivalents?



$\neq$



Avec des invariants!

Un invariant est une quantité ou propriété qui reste la même pour des nœuds équivalents.

Un <u>invariant</u> est une quantité ou propriété qui reste la même pour des nœuds équivalents.

<u>Exemple:</u> Si N est un nœud, alors c(N) est défini comme le nombre minimal de croisements dans un diagramme représentant N ou un nœud équivalent.

Un <u>invariant</u> est une quantité ou propriété qui reste la même pour des nœuds équivalents.

<u>Exemple:</u> Si N est un nœud, alors c(N) est défini comme le nombre minimal de croisements dans un diagramme représentant N ou un nœud équivalent.

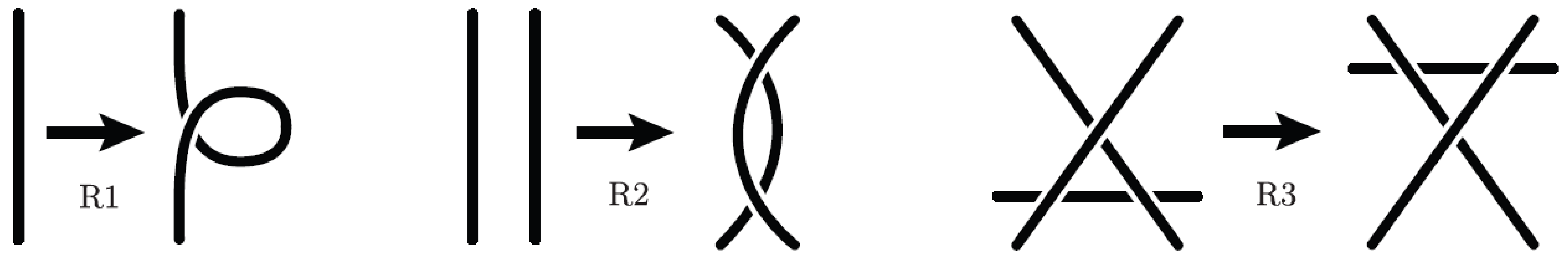
c(N) est un invariant, mais il est difficile à calculer!

Par exemple, comment montrer qu’on ne peut pas représenter the nœud en trèfle avec moins de trois croisements?

On va voir un autre invariant plus simple à calculer.

Les mouvements de Reidemeister

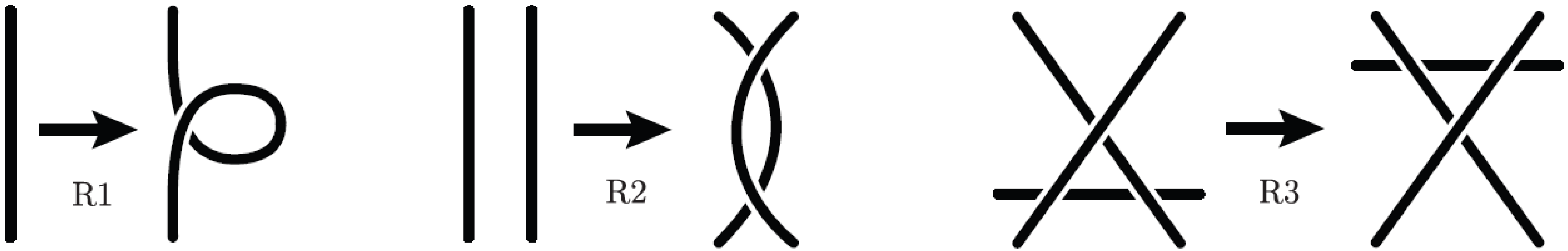
Les mouvements de Reidemeister sont les suivants ainsi que leurs inverses:



Ils donnent des diagrammes représentant des nœuds équivalents.

Les mouvements de Reidemeister

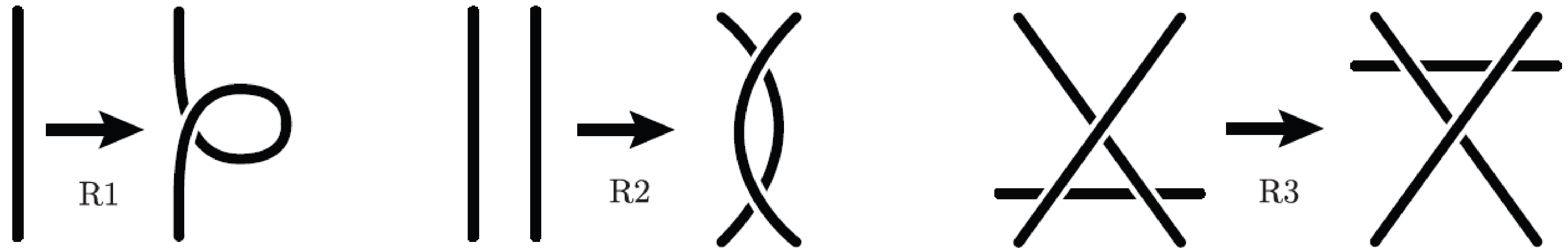
Les mouvements de Reidemeister sont les suivants ainsi que leurs inverses:

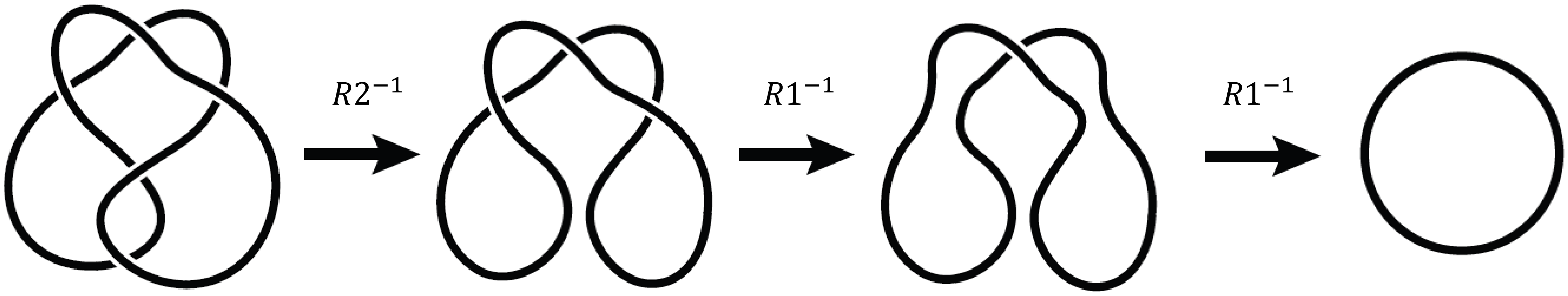


Ils donnent des diagrammes représentant des nœuds équivalents.

Théorème (Reidemeister, 1927) Si deux diagrammes représentent des nœuds équivalents, alors il est possible de passer de l'un à l'autre à l'aide d'une suite de mouvements de Reidemeister.

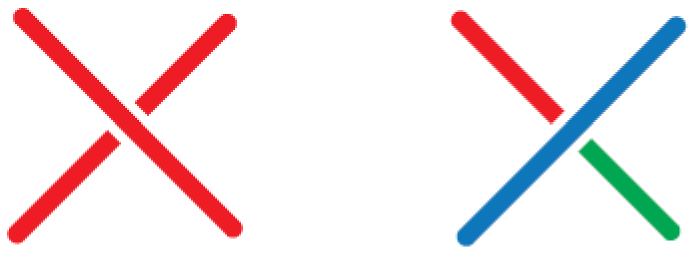
Exemple





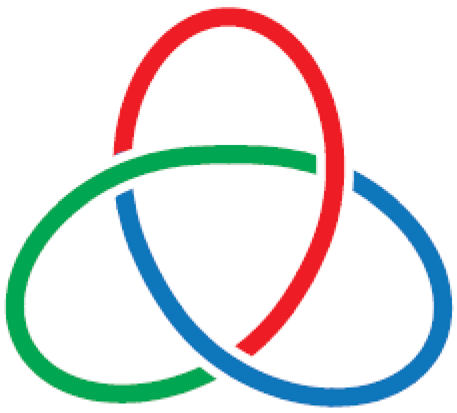
Tricoloriabilité

On dit qu’un diagramme est tricoloriable si on peut colorier ses brins avec exactement trois couleurs de sorte que chaque brin est d’une seule couleur et à chaque intersection les trois brins sont soit tous de la même couleur soit tous de couleurs différentes.

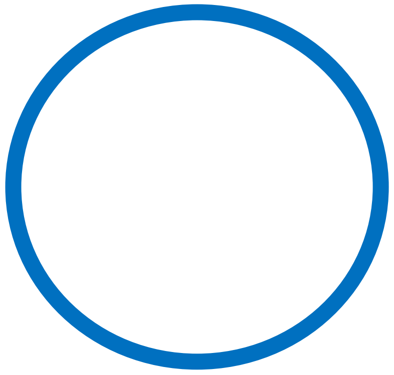


Tricoloriabilité

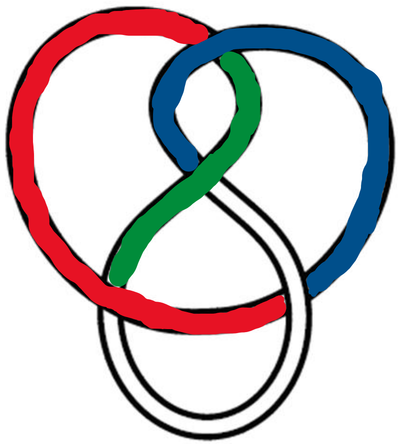
On dit qu'un diagramme est tricoloriable si on peut colorier ses brins avec exactement trois couleurs de sorte que chaque brin est d'une seule couleur et à chaque intersection les trois brins sont soit tous de la même couleur soit tous de couleurs différentes.



Ce diagramme est tricoloriable



Celui-ci ne l'est pas



Lui non plus

Tricoloriabilité

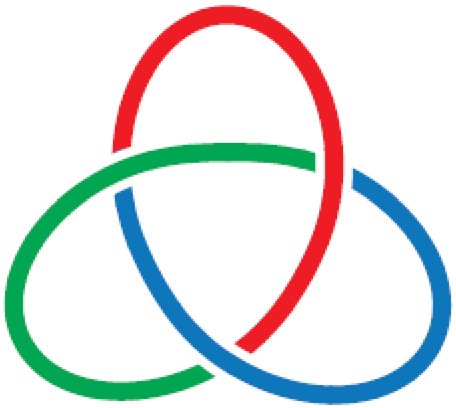
Théorème La tricoloriabilité est un invariant de nœuds.

Tricoloriabilité

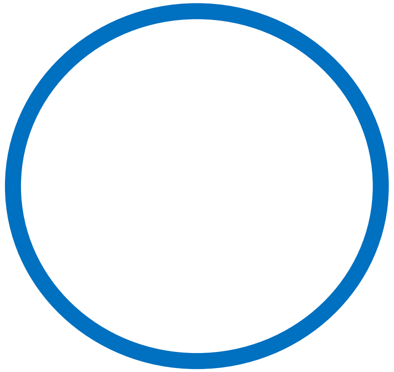
Théorème La tricoloriabilité est un invariant de nœuds.

Démonstration: Supposons qu'un diagramme D_1 d'un nœud N_1 est tricoloriable et soit D_2un diagramme d'un noeud equivalent N_2. Par le théorème de Reidemeister, on peut passer de D_1 à D_2 à l'aide d'une suite de mouvements de Reidemeister. Or, la tricolorabilité est préservée par chacun de ces mouvements tel qu'illustré ci-dessous. Donc D_2 est tricoloriable. $\square$

<u>Corollaire</u> Le nœud en trèfle n’est pas trivial.

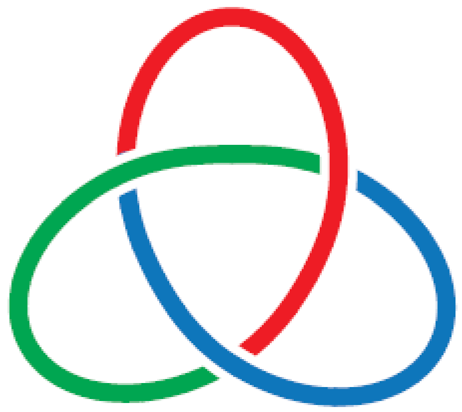


tricoloriable

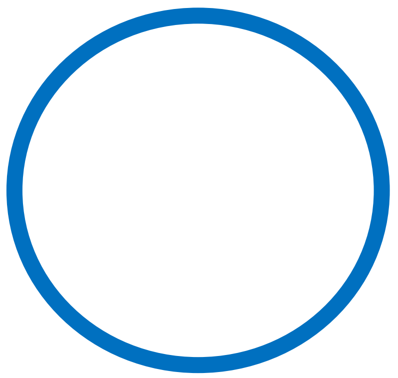


pas tricoloriable

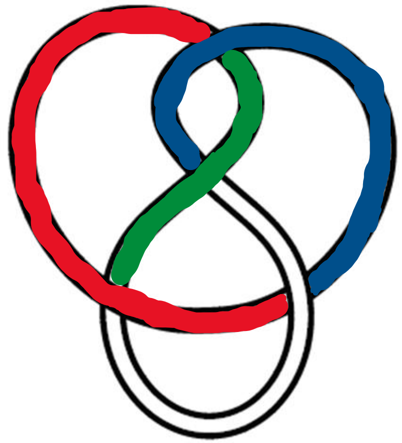
<u>Corollaire</u> Le nœud en trèfle n’est pas trivial.



tricoloriable



pas tricoloriable



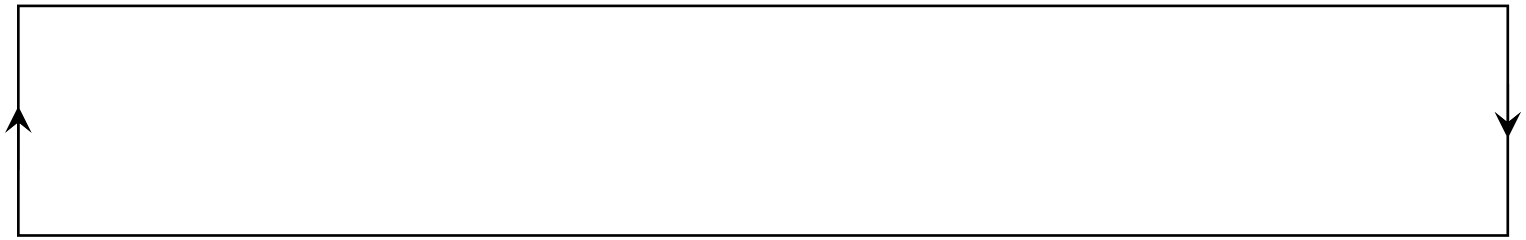
pas tricoloriable

Malheureusement, la tricolorabilité ne distingue pas le nœud trivial du nœud en huit. Il faut utiliser d’autres invariants pour les distinguer.

3. Surfaces

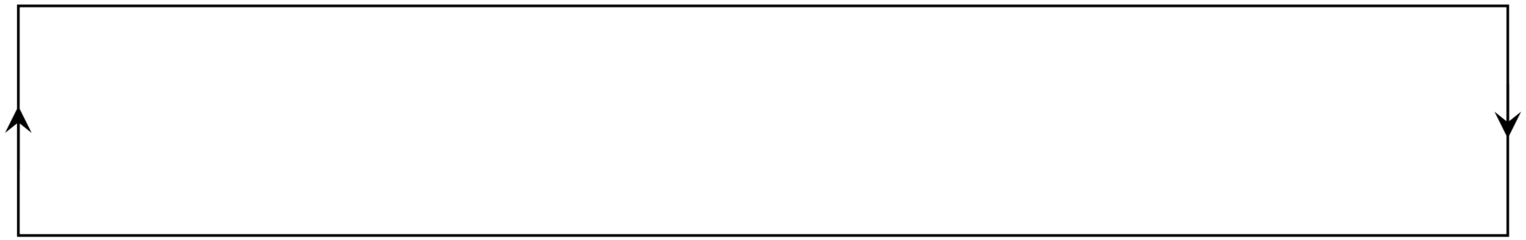
Exercice 10

Collez les deux bouts de sorte à faire correspondre les flèches.



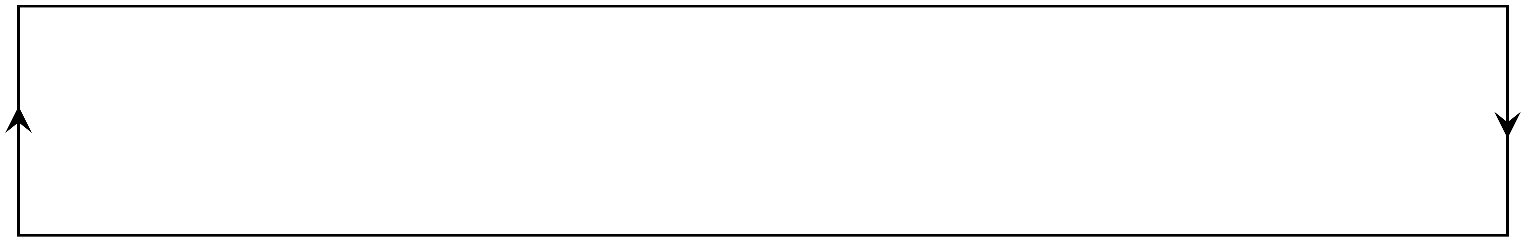
Exercice 10

Collez les deux bouts de sorte à faire correspondre les flèches.



Comment s’appelle cette surface?

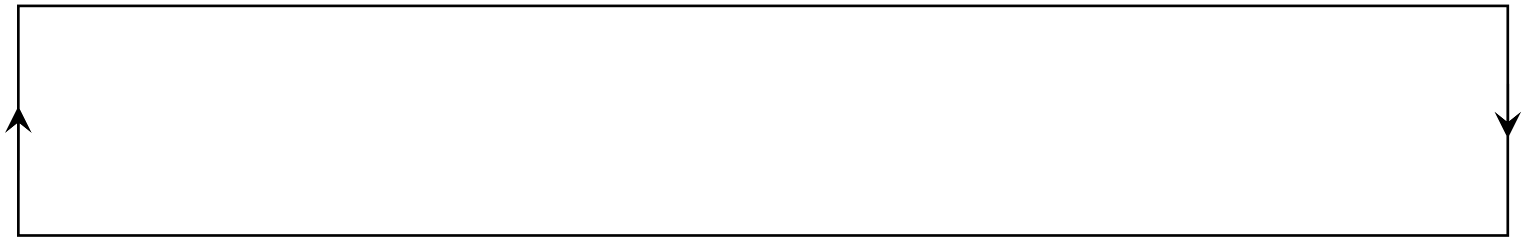
Exercice 10



Une surface est orientable si elle a deux côtés distincts.
Le ruban de Möbius n’est pas orientable car il n’a qu’un seul côté.

Exercice 10

Combien le ruban de Möbius a-t-il de bords?



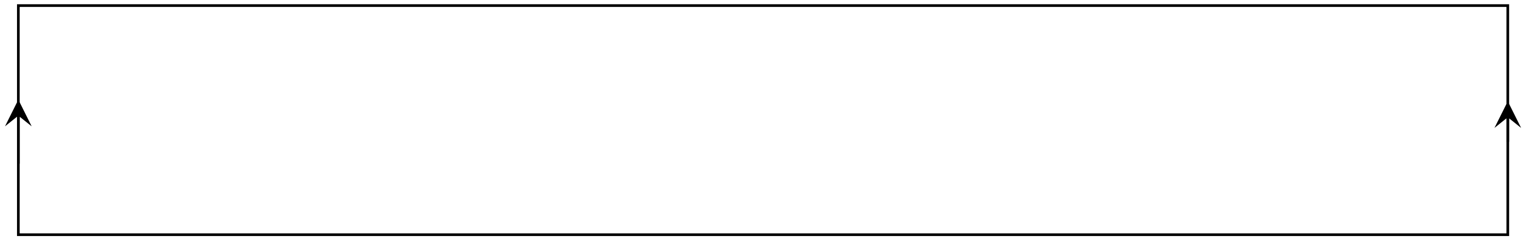
Exercice 10

Découpez votre ruban le long de la ligne du milieu.

Quelle surface obtient-on?

Exercice 11

Collez les deux bouts de sorte à faire correspondre les flèches.



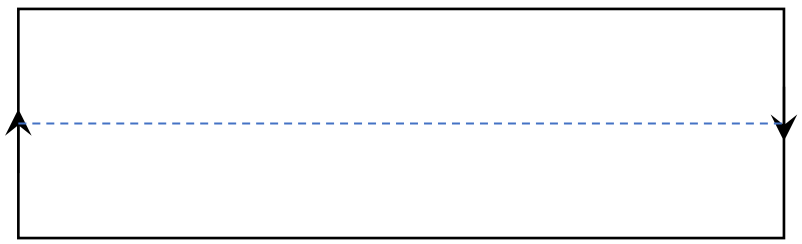
Explication

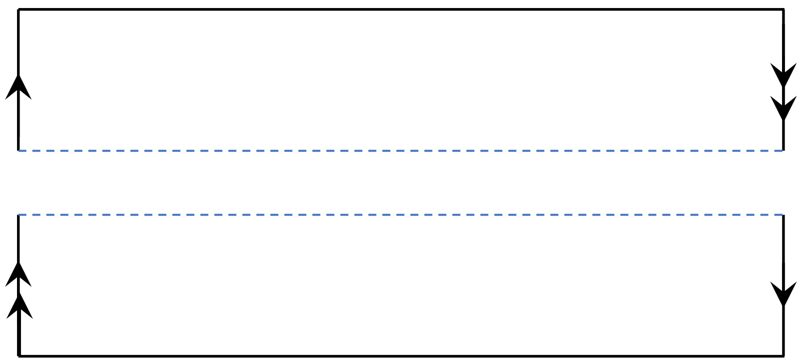
Le ruban sans demi-tour et celui avec deux demi-tours sont les mêmes surfaces abstraites (elles sont homéomorphes), mais on ne peut pas déformer l’une en l’autre dans l’espace.

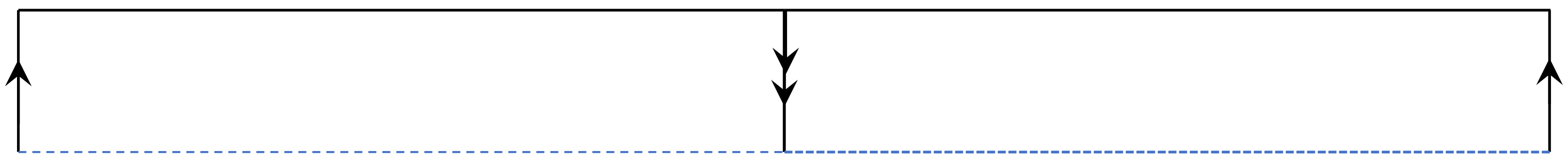
Deux objets sont dits homéomorphes s’il est possible de découper le premier en morceaux, les déplacer ou déformer dans l’espace, puis les recoller de la même façon qu’avant pour obtenir le deuxième objet.

Des objets qu’on peut déformer l’un dans l’autre sont dits isotopes de manière ambiante. C’est plus fort qu’être homéomorphes.

Retour sur l’exercice 10

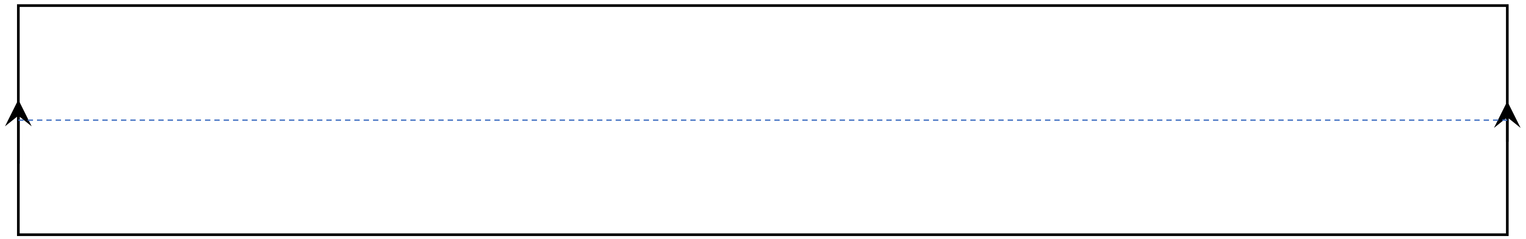
1) 

2) 

3) 

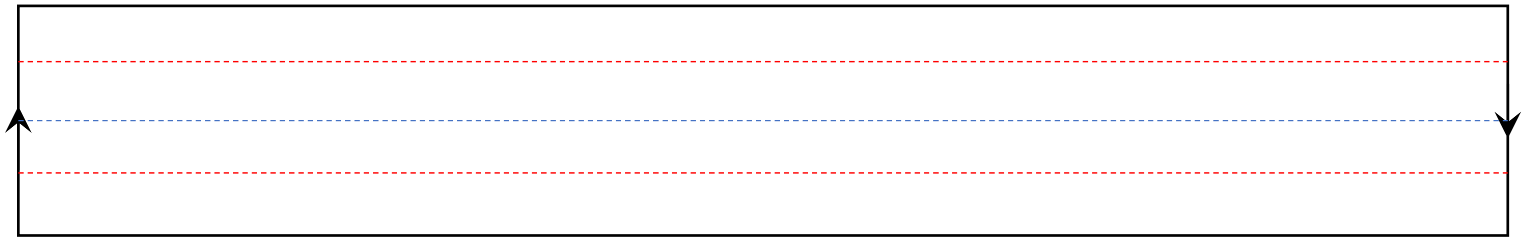
Exercice 11

Découpez votre ruban le long de la ligne du milieu.



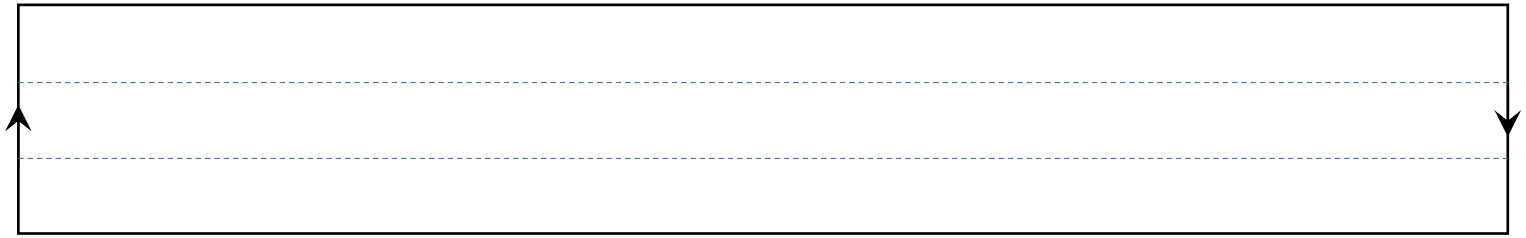
Exercice 12

Redécoupez votre ruban de Möbius une deuxième fois.

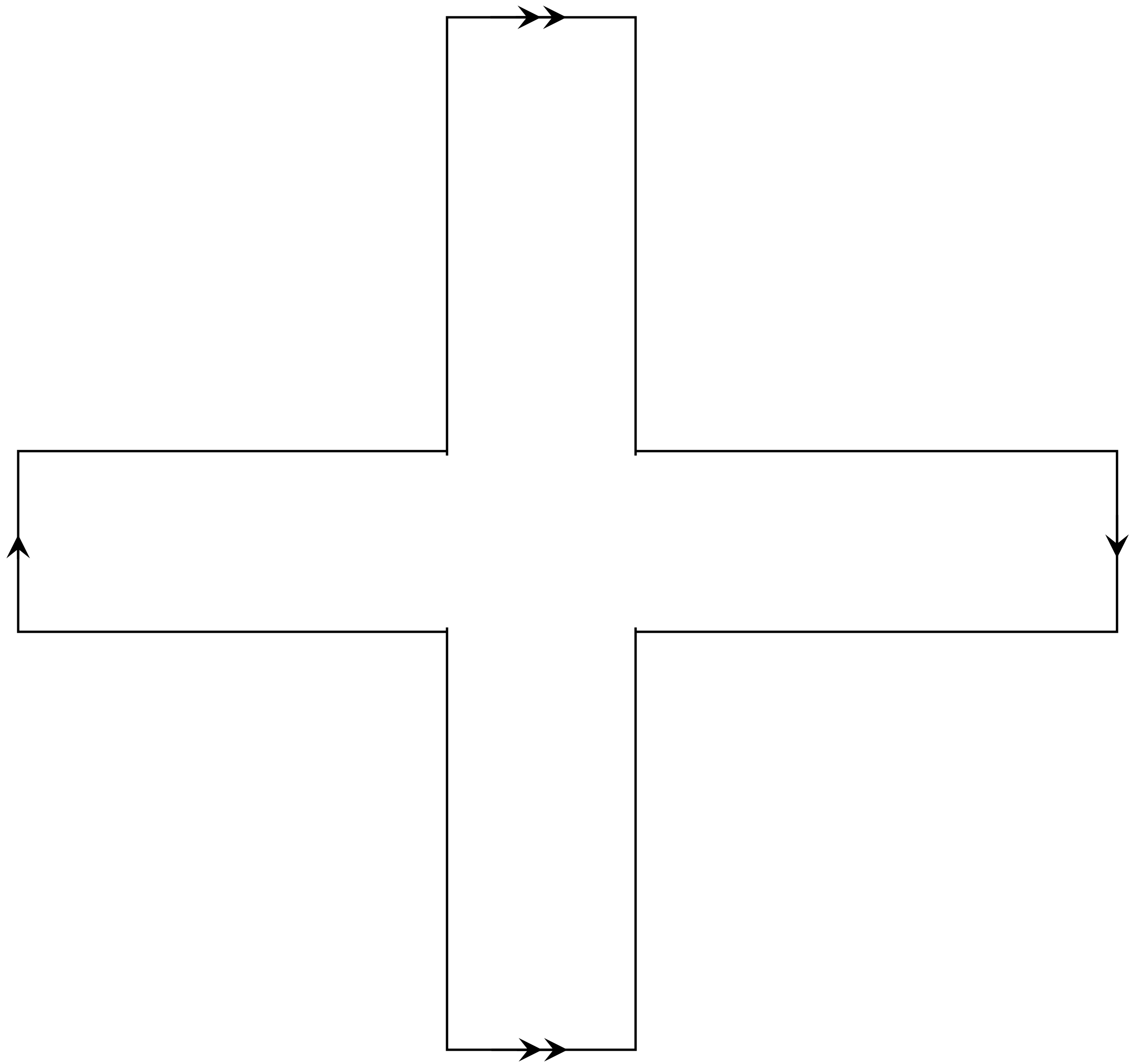


Exercice 13

Fabriquez un nouveau ruban de Möbius et découpez le au tiers maintenant. Essayez de deviner ce qui va se passer.

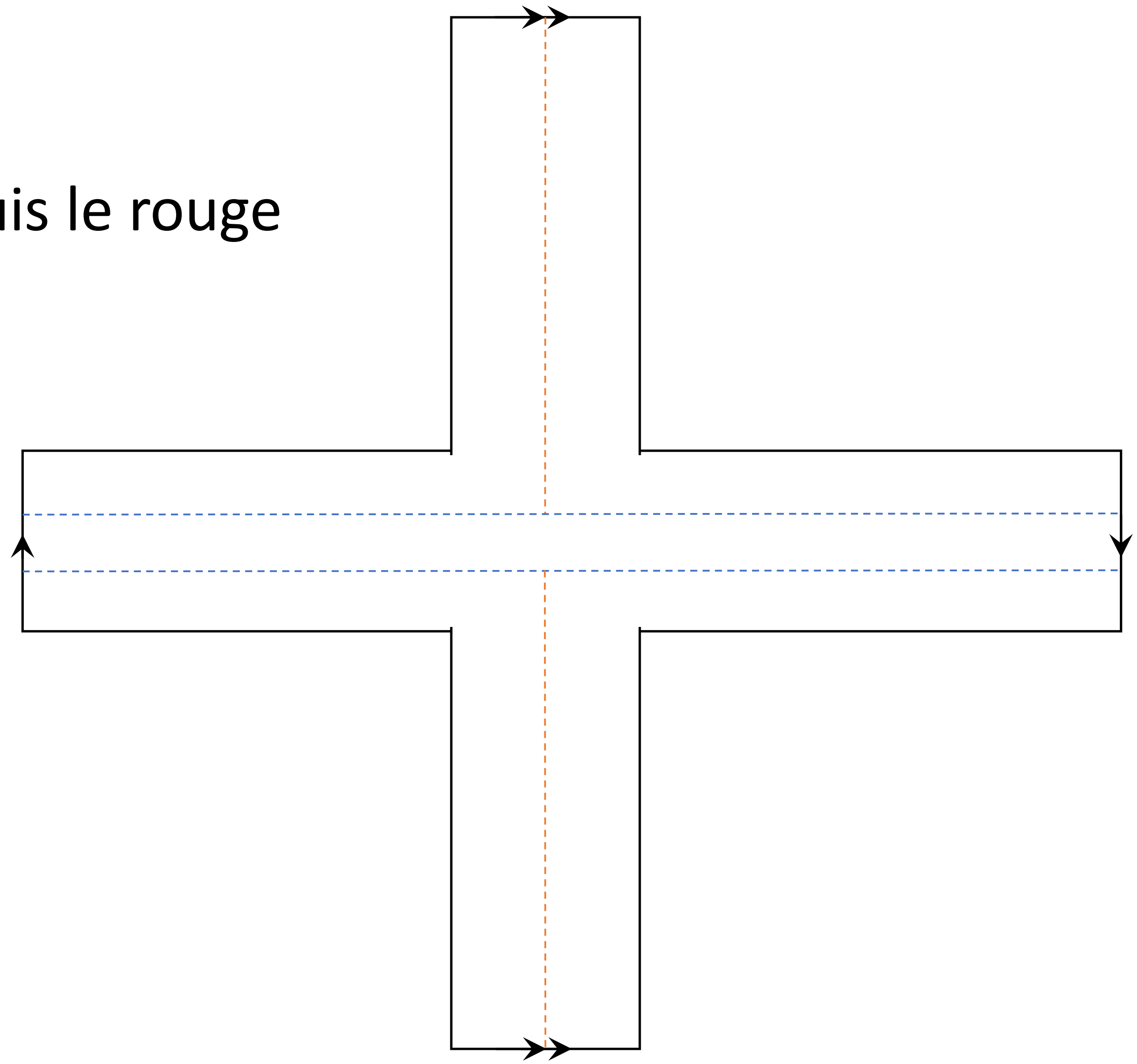


Exercice 14



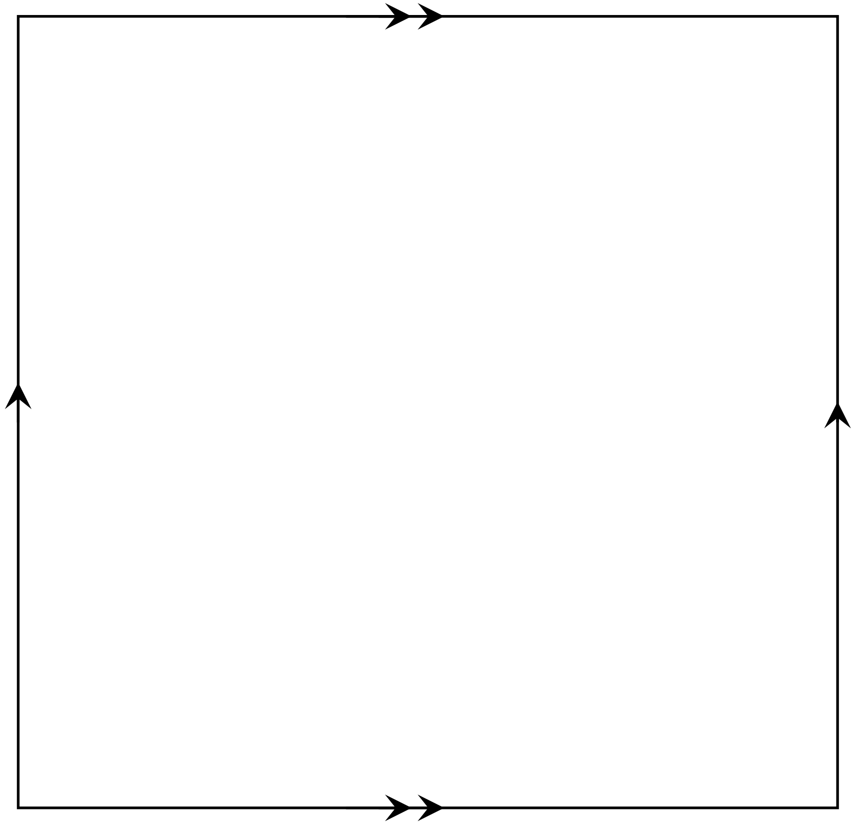
Exercice 14

Couper le bleu, puis le rouge



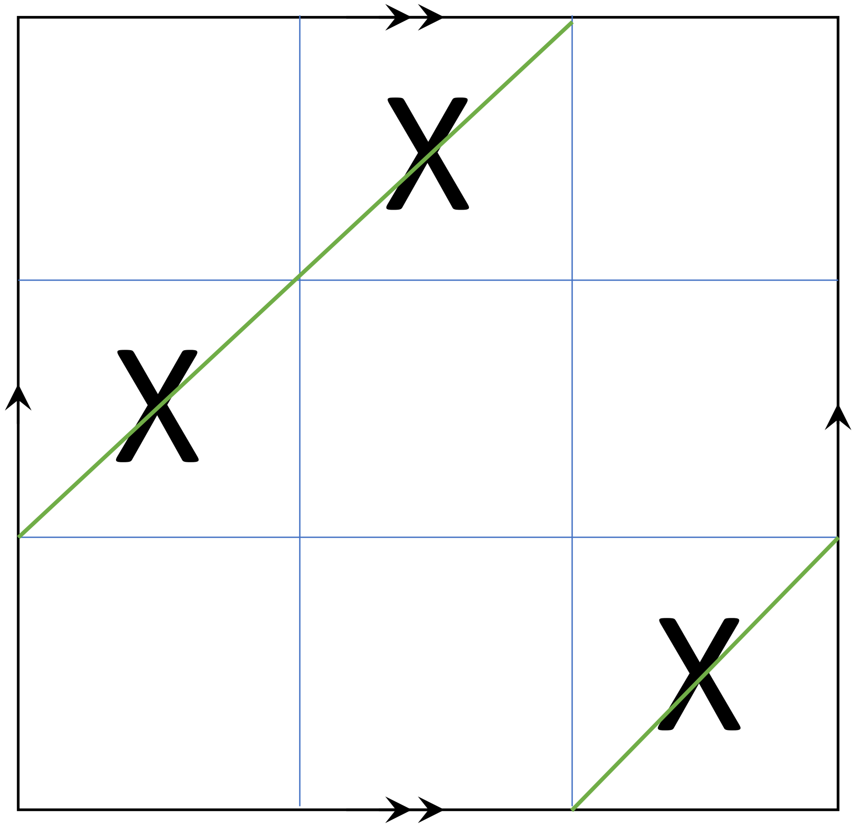
Exercice 15

Essayez d’imaginer quelle surface ce collage donnerait.



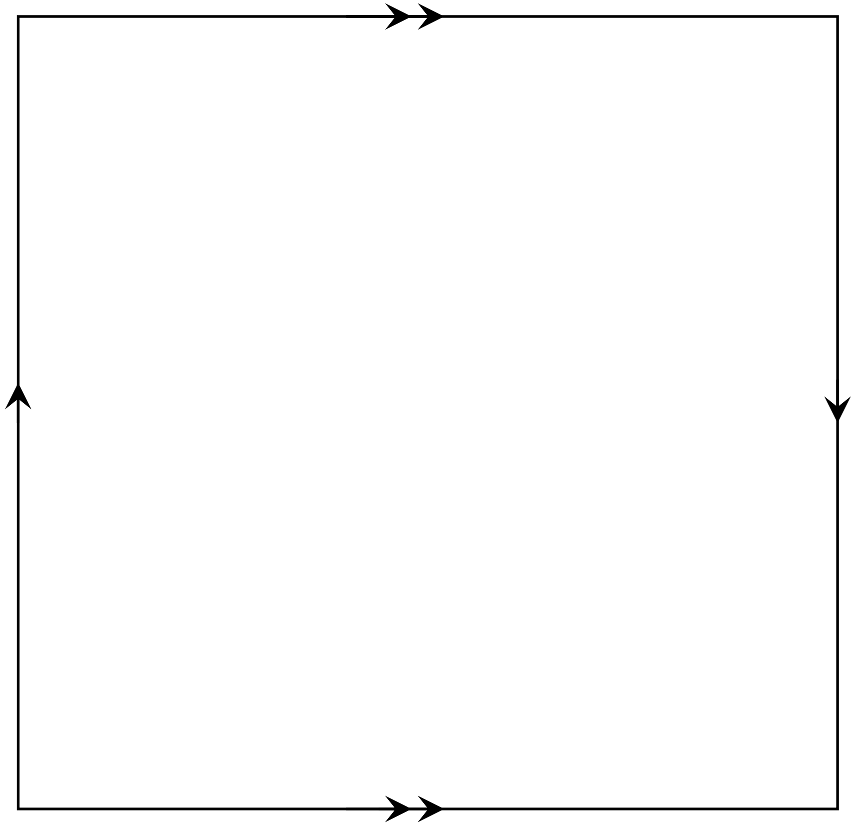
<u>Jeu</u>

Dessiner une grille de tic tac toe sur une feuille et jouer une partie comme si les côtés étaient recollés comme ci-bas et qu’une « diagonale » peut continuer quand elle traverse un côté.



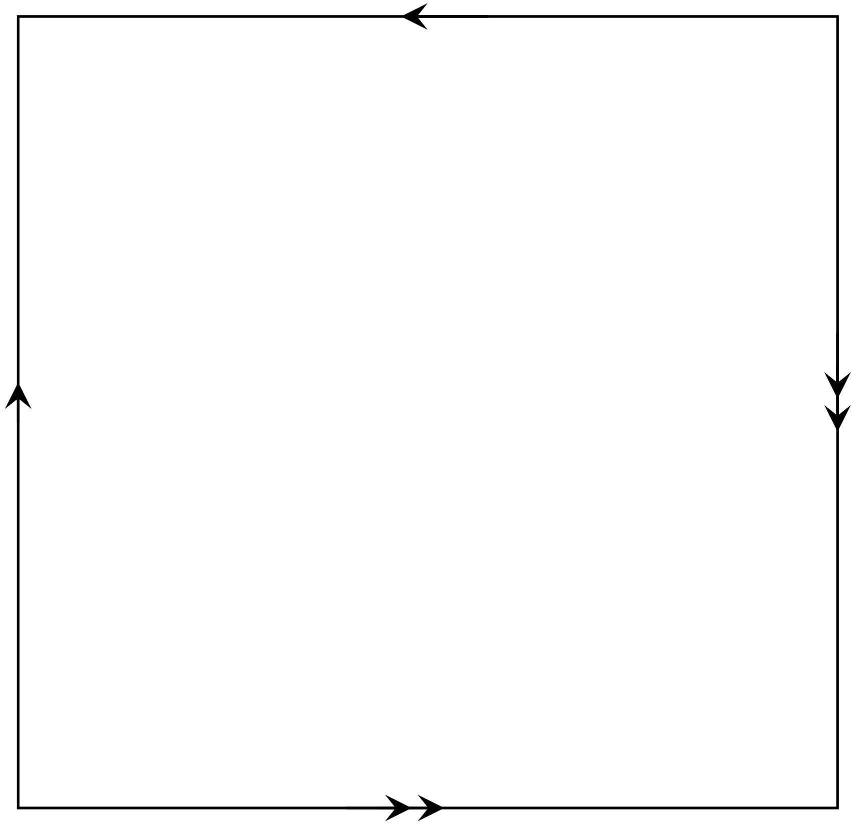
Exercice 16

Essayez d'imaginer quelle surface ce collage donnerait.



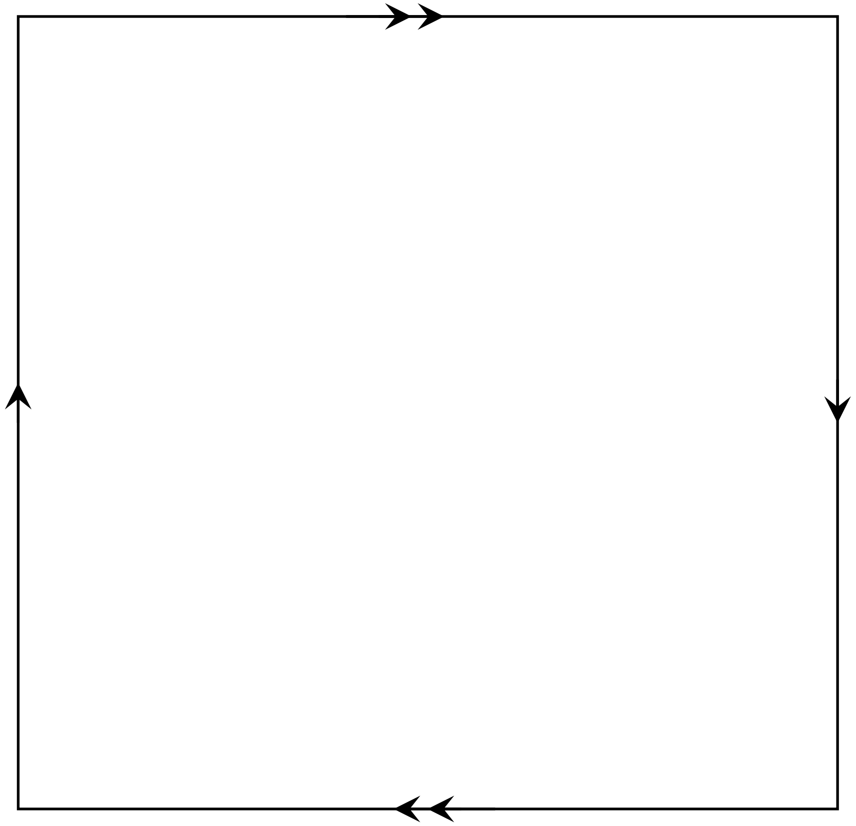
Exercice 17

Essayez d’imaginer quelle surface ce collage donnerait.



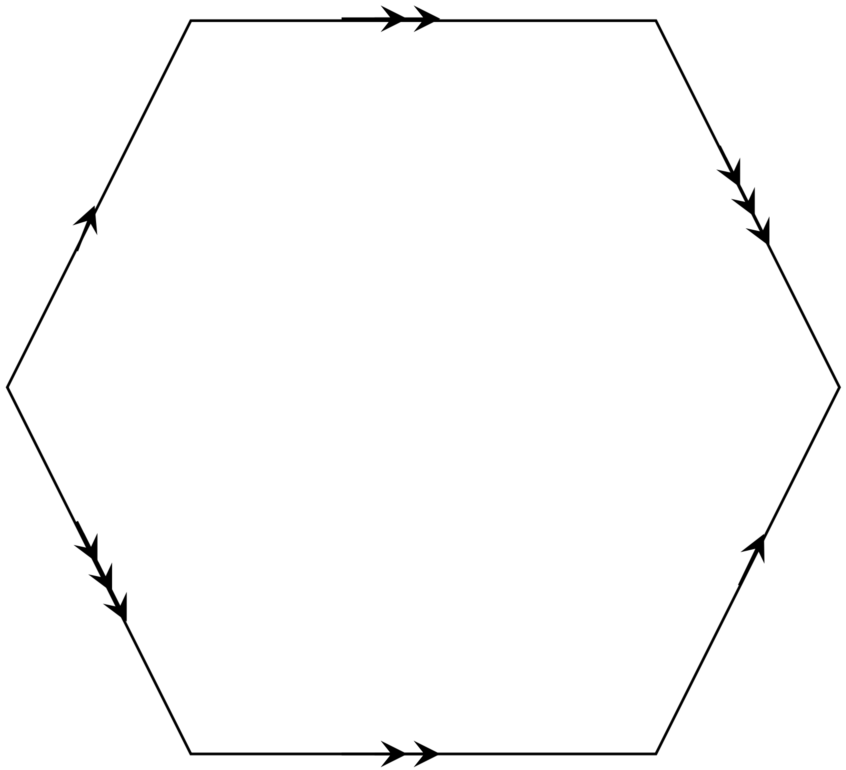
Exercice 18

Essayez d'imaginer quelle surface ce collage donnerait.



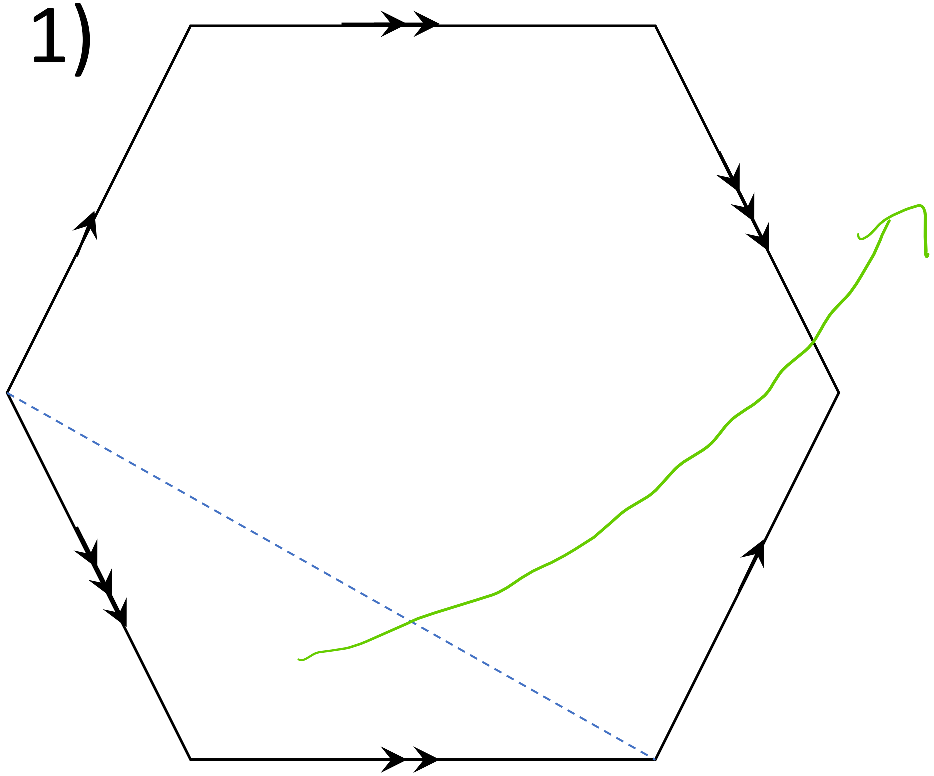
Exercice 19

Montrer que cette surface est homéomorphe au tore.

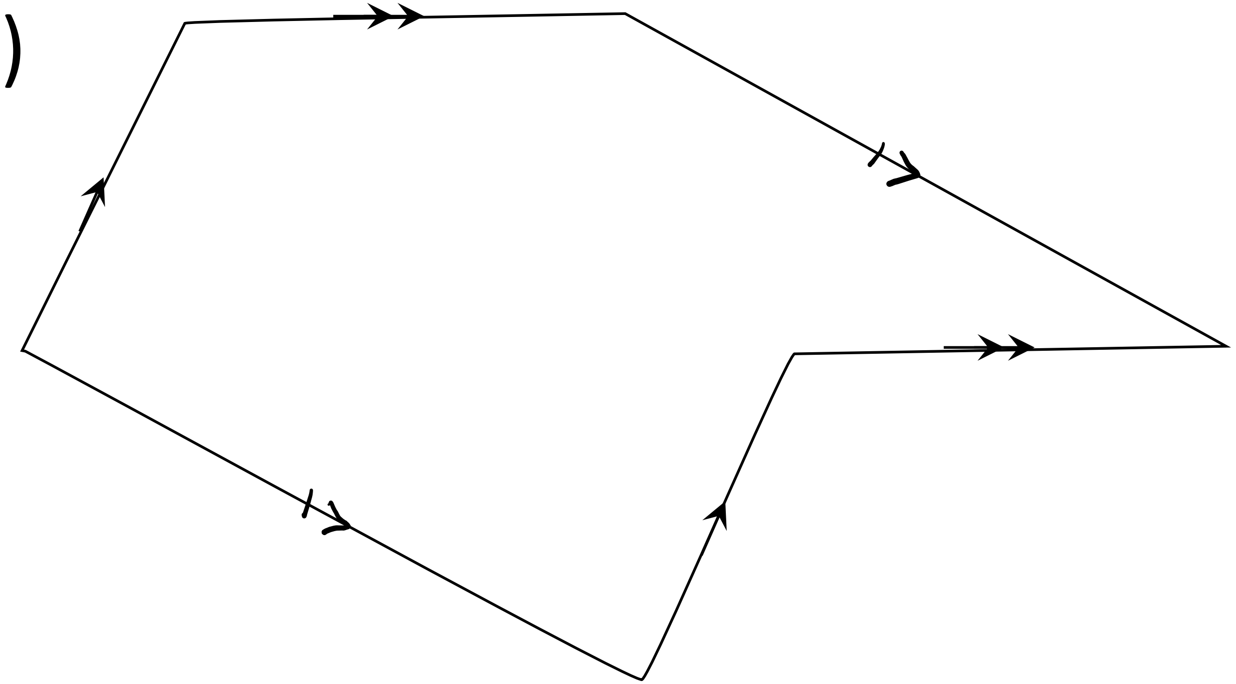


Solution

1)

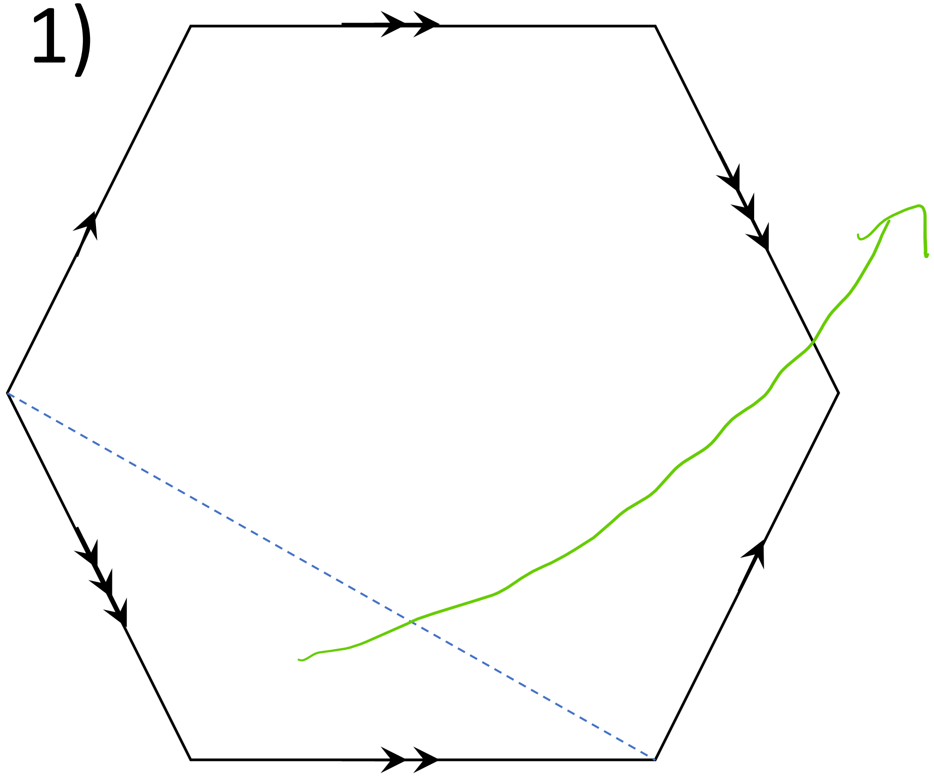


2)

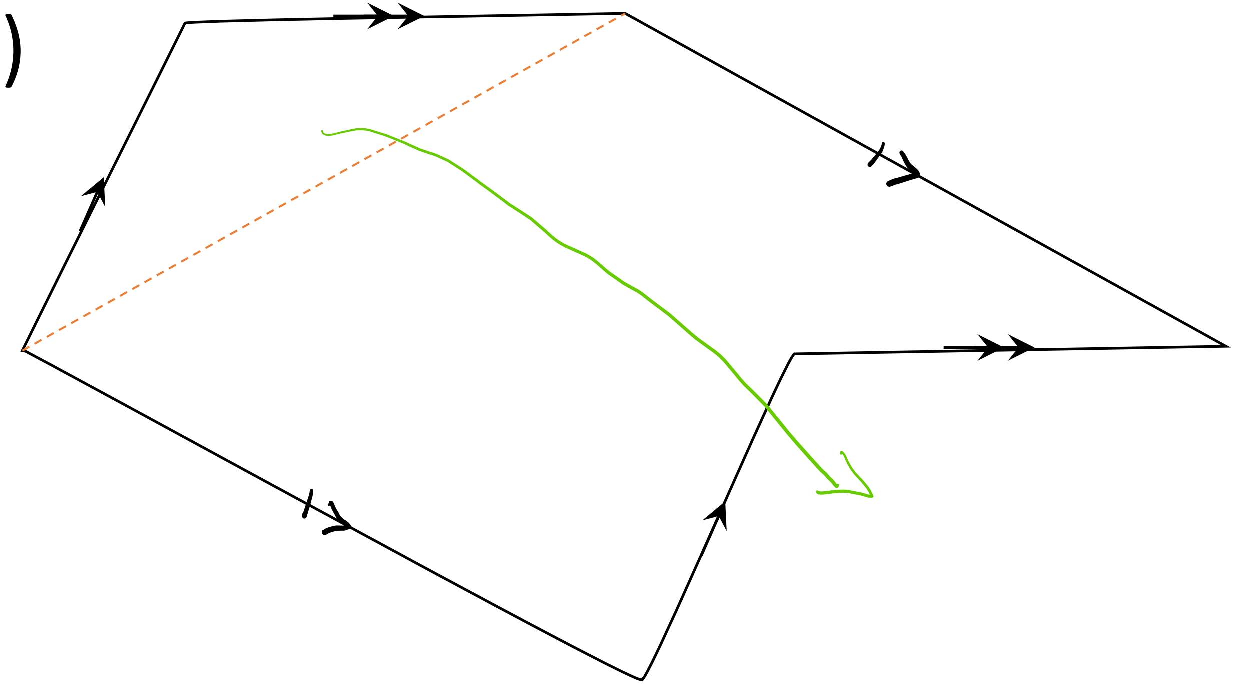


Solution

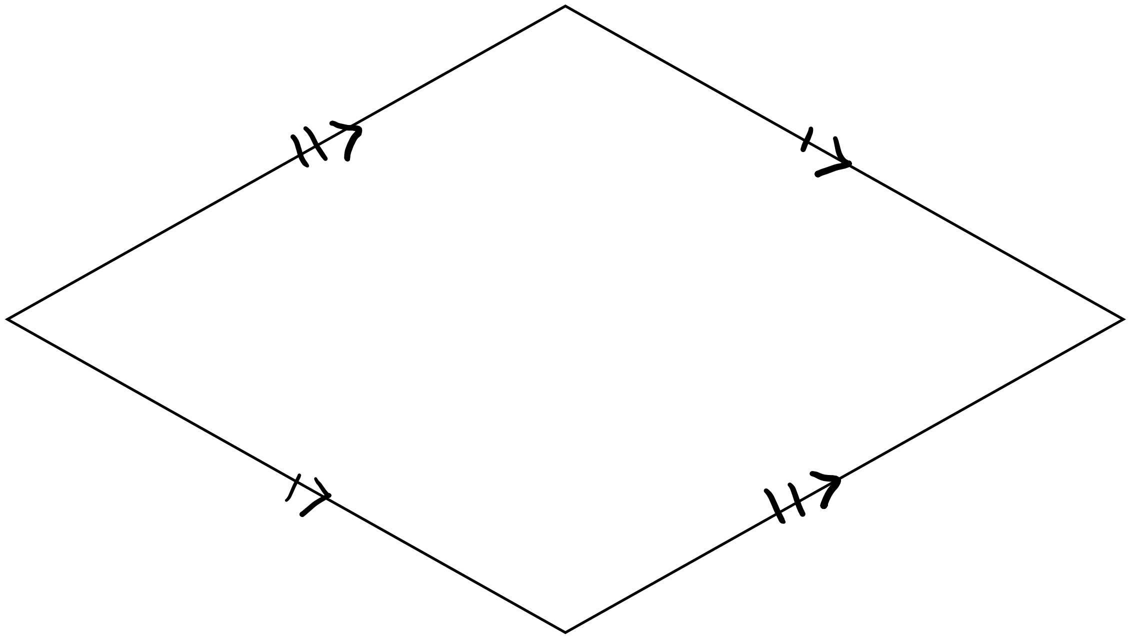
1)



2)

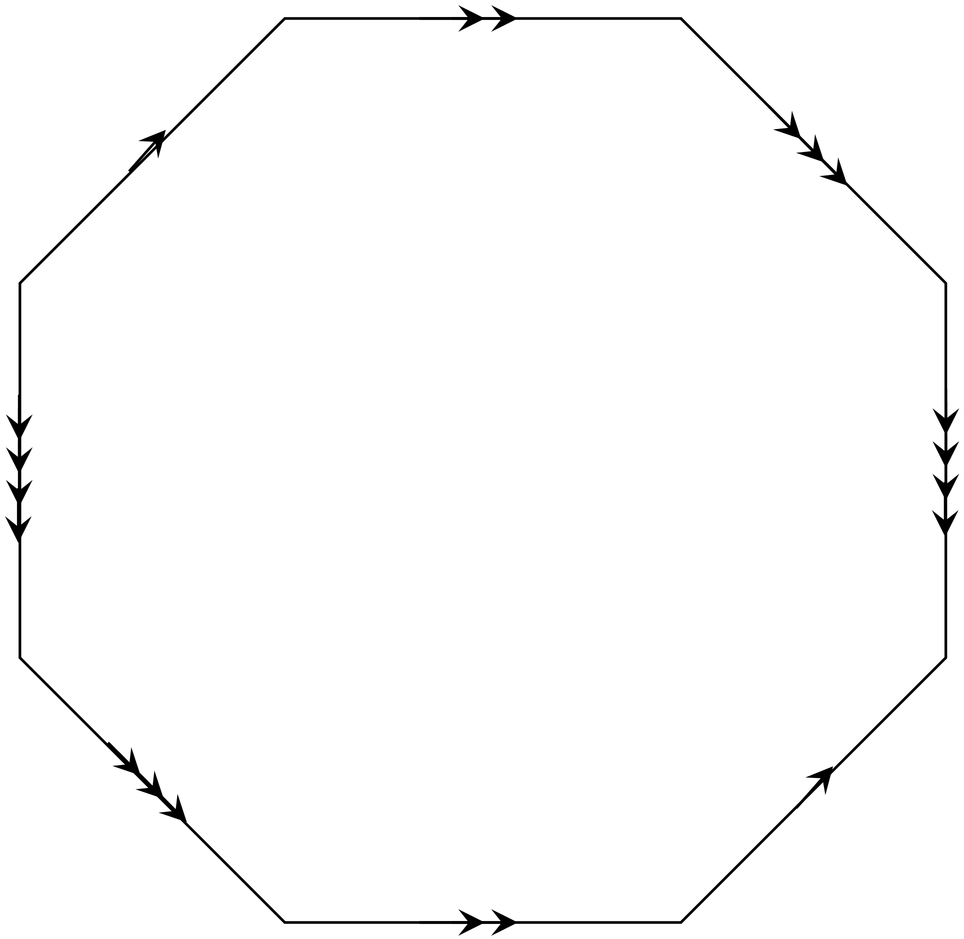


3)



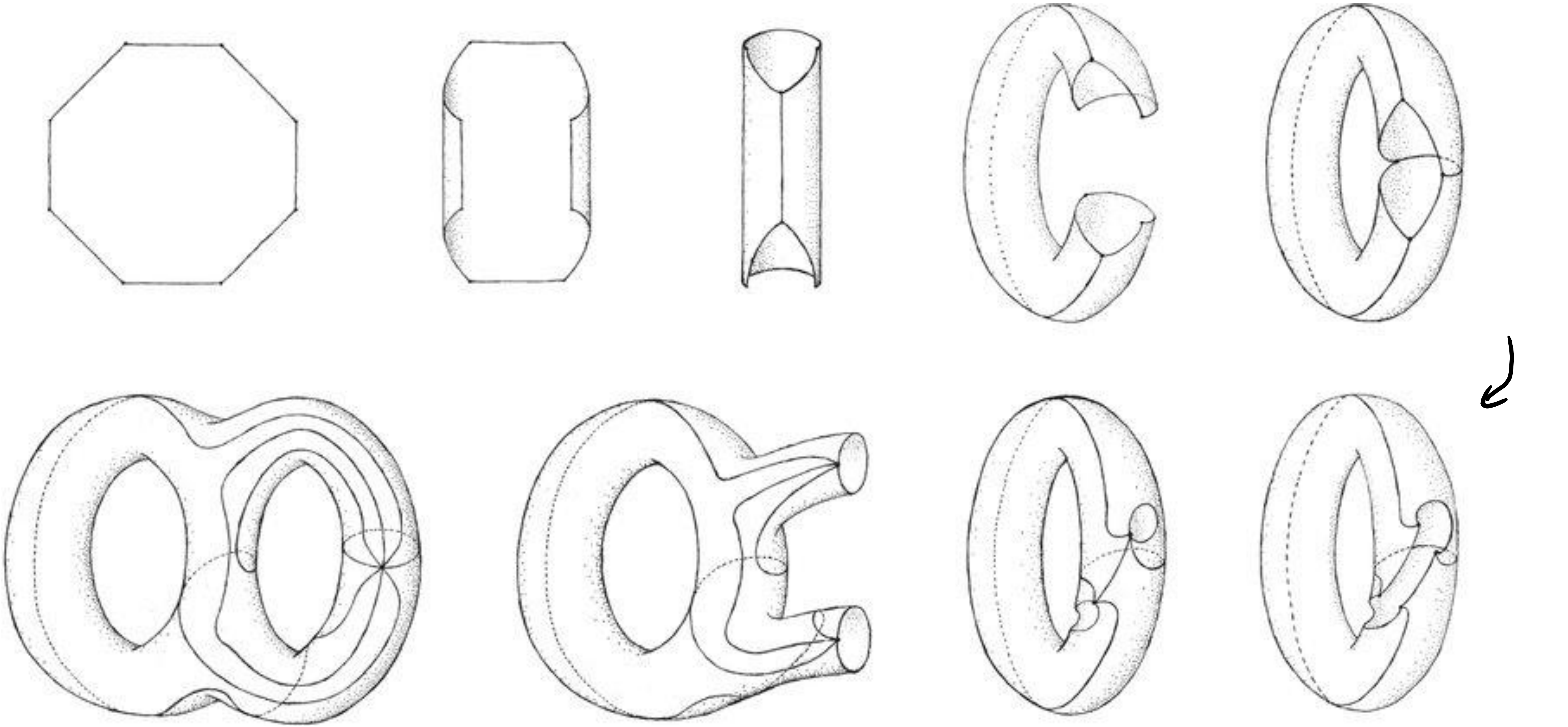
Exercice 20

Essayez d'imaginer quelle surface ce collage donnerait.

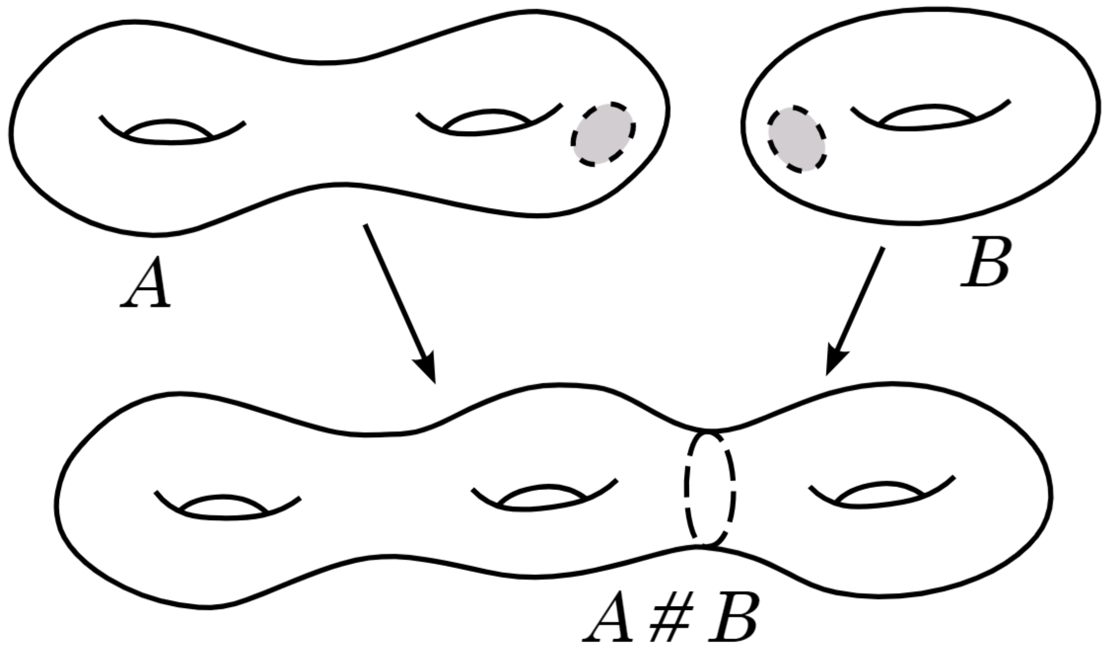


Solution

C'est une surface orientable avec deux anses ou poignées



Somme connexe



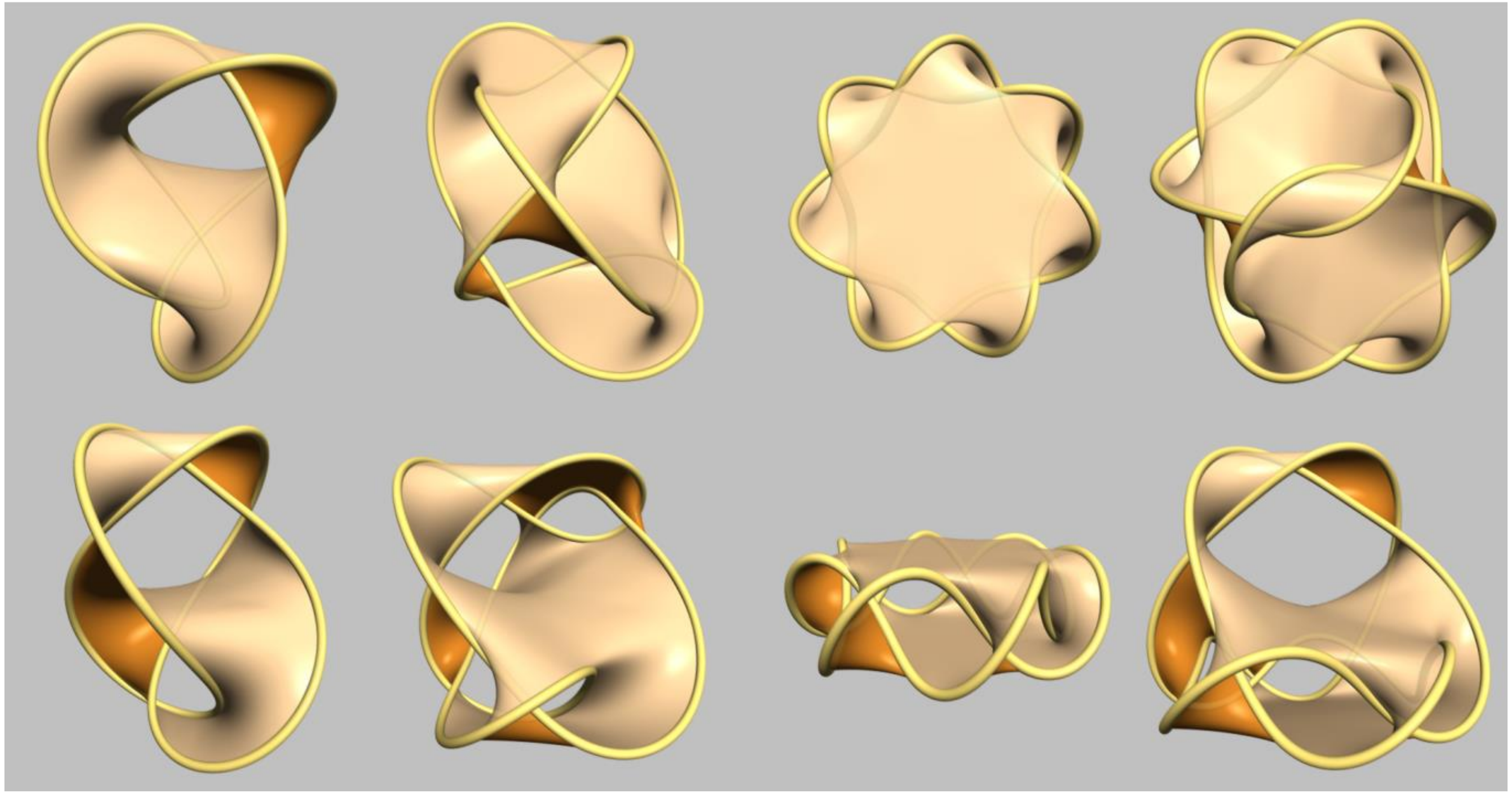
Une surface est compacte si on peut l'obtenir en collant un nombre fini de triangles ensemble.

Théorème de classification des surfaces

Toute surface compacte est homéomorphe soit à la sphère, une somme connexe de tores, ou une somme connexe de plans projectifs, à laquelle on a enlevé un nombre fini de disques disjoints.

Un autre invariant de noeuds

Théorème (Seifert, 1934) Pour tout nœud, il existe une surface orientable telle que son bord est égale au nœud.



Un autre invariant de noeuds

Théorème (Seifert, 1934) Pour tout nœud, il existe une surface orientable telle que son bord est égale au nœud.

Le genre s'une surface orientable est le nombre de poignées qu'elle a.

Le genre g(N) d'un nœud N est le plus petit genre d'une surface de Seifert dont le bord est égal à N.

Un autre invariant de noeuds

Théorème (Seifert, 1934) Pour tout nœud, il existe une surface orientable telle que son bord est égale au nœud.

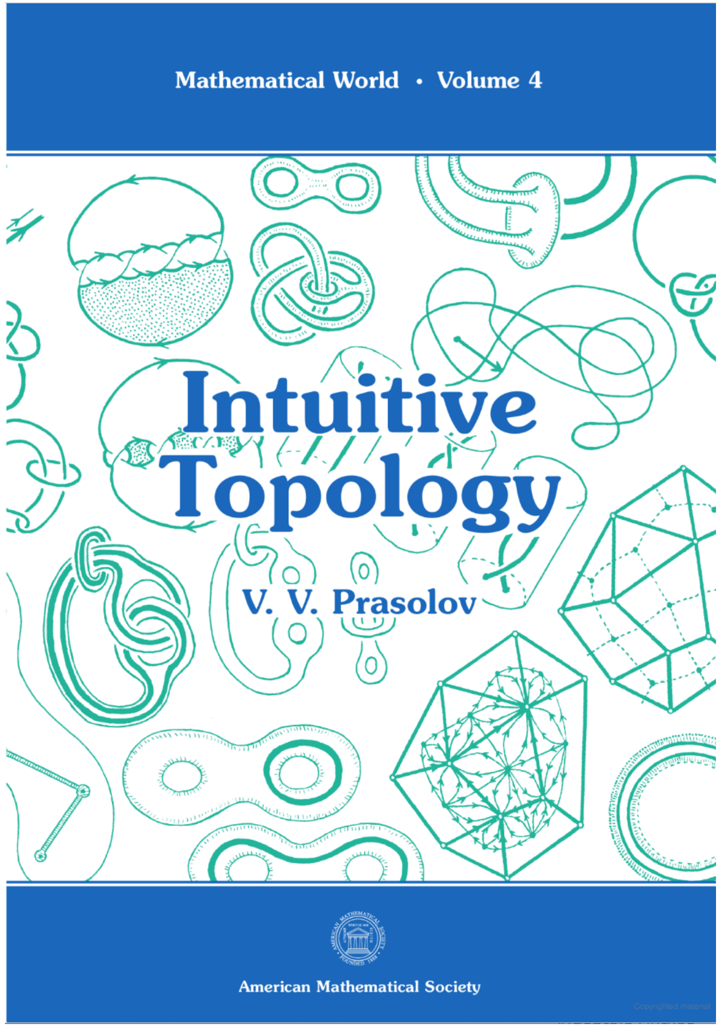
Le genre s’une surface orientable est le nombre de poignées qu’elle a.

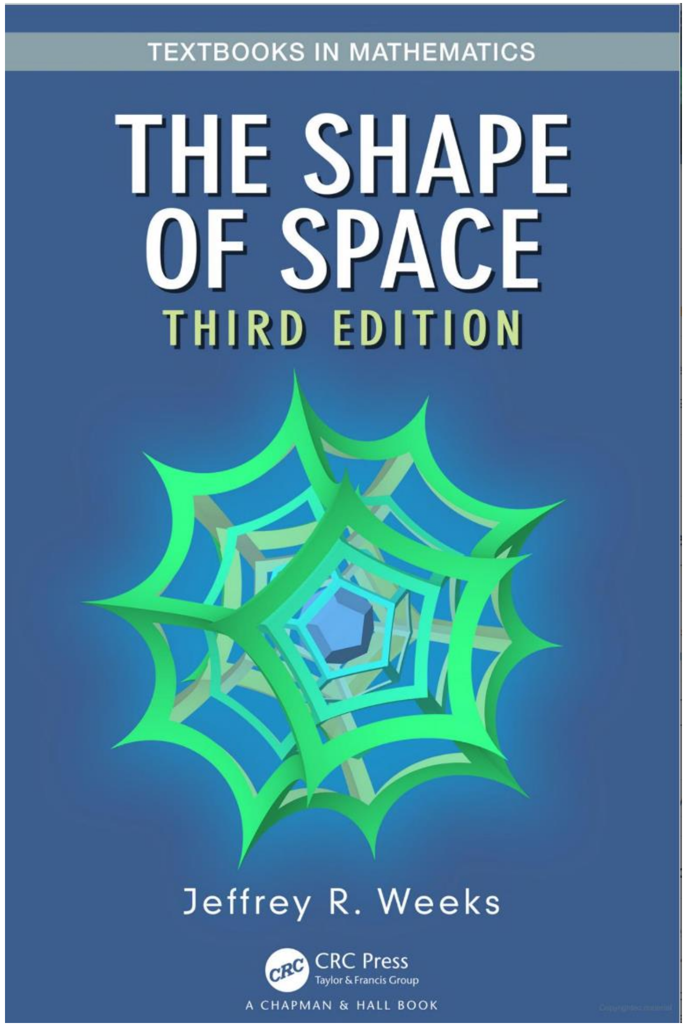
Le genre $g(N)$ d’un nœud N est le plus petit genre d’une surface de Seifert dont le bord est égal à N.

Le genre d’un nœud est égal à 0 si et seulement si le nœud est trivial.

Le nœud en trèfle et le nœud en huit sont de genre 1.

Références


Mathematical World • Volume 4
Intuitive Topology
V. V. Prasolov
American Mathematical Society


TEXTBOOKS IN MATHEMATICS
THE SHAPE OF SPACE
THIRD EDITION
Jeffrey R. Weeks
CRC Press
Taylor & Francis Group
A CHAPMAN & HALL BOOK