MAT 2115 - ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Examen final

Le 21 avril 2008, de 12h30 à 15h30.

Aucune documentation permise. Chaque question vaut dix points.

1. Obtenir la solution générale de l'équation
$$x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^4 \ , \ x > 0.$$

2. Obtenir les trois premiers termes non nuls des développements suivant les puissances entières de x de chacune de deux solutions linéairement indépendantes de l'équation
$$\cos x \, y'' + x \, y' - 2 \, y = 0$$
et donner une borne inférieure pour le rayon de convergence des séries que l'on obtiendrait.

3. Pour l'équation
$$x^2y'' + xy' + (x-2)y = 0,$$
vérifier que $x = 0$ est un point singulier régulier puis déterminer l'équation indicielle pour r et la relation de récurrence pour a_k lorsque
$$y = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{k+r}.$$
Obtenir ensuite deux solutions linéairement indépendantes de l'équation et calculer le rayon de convergence des séries obtenues.

4. Pour chacun des trois systèmes suivants, décrire le comportement de la solution $\mathbf{x}(t)$ (sans la calculer) lorsque $t \to +\infty$ en fonction des conditions initiales :
$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$$

5. Obtenir la solution du problème suivant :

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) \ , \ \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

6. Montrer que toutes les solutions du système

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$$

   tendent vers $\mathbf{0}$ lorsque $t \to +\infty$ si et seulement si

$$a + d < 0 \ \text{ et } \ ad - bc > 0.$$

André Giroux