

MAT 1958 - MATHÉMATIQUES POUR CHIMISTES

Examen final

Le 15 décembre 2008, de 13h00 à 16h00.

Chaque question vaut 12 points. Ni documentation ni calculatrice permise.

1. On considère le champ de température

$$T(x, y, z) = T_0 + x^2 + 3y^2 + 3z^2.$$

- a) Calculer T au point $(1, 1, 1)$.
 - b) Calculer son gradient ∇T au point (x, y, z) .
 - c) Déterminer au point $(1, 1, 1)$ la direction dans laquelle le champ T varie le plus rapidement.
2. On considère l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} + x = 2$$

avec la condition initiale que $x(0) = 1$.

- a) Vérifier que la fonction constante $x = 2$ est une solution.
 - b) Trouver la solution générale de l'équation différentielle.
 - c) Trouver la solution qui satisfait la condition initiale.
3. On considère la fonction

$$f(x) = \begin{cases} -a, & \text{si } -\pi < x < 0 \\ a, & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$$

- a) Vérifier que f est une fonction impaire.

b) Calculer les nombres

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

c) Écrire la fonction f comme la somme d'une série de Fourier.

4. On considère la matrice carrée

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer son déterminant $|A|$.

b) Calculer ses valeurs propres λ_1 et λ_2 .

c) Déterminer deux vecteurs propres \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 associés à ces valeurs propres.

5. On considère une urne contenant 10 boules, 6 rouges et 4 noires.

a) Si on en tire une boule au hasard, quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?

b) On effectue trois tirages de cette urne, remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne après en avoir observée la couleur. Soit X le nombre de boules rouges observées. Quelle est la probabilité que $X = 2$?

c) Quelle est l'espérance mathématique de X ?

André Giroux