

MAT 1958 - MATHÉMATIQUES POUR CHIMISTES

Examen final

Le 14 décembre 2009, de 13h30 à 16h30.

Aucune documentation ni calculatrice.

Chaque question vaut dix points.

1. Soient

$$A = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < \sqrt{x}\}$$

et

$$f(x, y) = y.$$

(a) Déterminez l'aire de A .

(b) Calculez la valeur moyenne de f dans A .

2. La concentration d'une certaine substance est donnée par la formule :

$$c(x, y, z) = c_0 z e^{-x^2 - y^2 - 2z}, \quad x^2 + y^2 < 1, \quad 0 < z < 1.$$

(a) Calculez la concentration au point $(0, 0, 1/3)$.

(b) Déterminez en ce point la direction dans laquelle la concentration diminue le plus rapidement.

3. On considère l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} + x = e^{-t}.$$

(a) Vérifiez que la fonction $x(t) = te^{-t}$ en est une solution.

(b) Trouvez la solution $x(t)$ telle que $x(0) = 1$.

4. On considère la fonction

$$f(x) = \pi - |x|, \quad -\pi < x < \pi.$$

(a) Vérifiez qu'elle est paire.

- (b) Calculez les trois premiers termes non nuls de sa série de Fourier.
5. On considère la matrice carrée

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculez ses valeurs propres.
- (b) Déterminez des vecteurs propres associés à ces valeurs propres.
6. Une urne contient 10 boules identiques sauf pour la couleur, 4 sont rouges et les autres, noires.
- (a) On en tire trois boules successivement, observant à chaque fois la couleur de la boule tirée puis la remettant dans l'urne avant le prochain tirage. Calculez la probabilité d'observer (exactement) deux boules rouges.
- (b) Même question si les trois boules sont tirées simultanément.

André Giroux