

# Mathématiques pour chimistes

Notes de cours pour MAT 1958

André Giroux  
Département de mathématiques et statistique  
Université de Montréal  
Décembre 2009

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Séries</b>	<b>4</b>
1.1	Sommes finies . . . . .	4
1.2	Séries infinies . . . . .	4
1.2.1	Application . . . . .	5
1.3	Séries de Taylor . . . . .	6
1.3.1	Séries de Taylor des fonctions usuelles . . . . .	6
1.3.2	Applications . . . . .	7
1.4	Exercices . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Nombres complexes</b>	<b>11</b>
2.1	Systèmes de nombres . . . . .	11
2.2	Algèbre des nombres complexes . . . . .	11
2.3	Géométrie des nombres complexes . . . . .	12
2.4	La formule d'Euler . . . . .	15
2.5	Applications . . . . .	16
2.6	Exercices . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Fonctions de plusieurs variables</b>	<b>19</b>
3.1	Les dérivées partielles . . . . .	19
3.2	La différentielle . . . . .	22
3.2.1	Différentielles exactes . . . . .	23
3.3	Optimisation . . . . .	23
3.3.1	Extrémums libres . . . . .	23
3.3.2	Extremums liés . . . . .	26
3.4	Changements de variables . . . . .	28
3.4.1	Une identité . . . . .	28
3.4.2	Une nouvelle variable . . . . .	29
3.4.3	Deux nouvelles variables . . . . .	29
3.4.4	Un cas particulier . . . . .	30
3.4.5	Les coordonnées sphériques . . . . .	31
3.5	Intégrales curvilignes . . . . .	33
3.6	Intégrales doubles . . . . .	37
3.6.1	Utilisation des coordonnées polaires . . . . .	39
3.7	Intégrales triples . . . . .	40
3.7.1	Utilisation des coordonnées sphériques . . . . .	41
3.8	Exercices . . . . .	42

<b>4</b>	<b>Vecteurs</b>	<b>46</b>
4.1	Géométrie analytique vectorielle . . . . .	46
4.1.1	Le produit scalaire . . . . .	46
4.1.2	Le produit vectoriel . . . . .	48
4.2	Calcul vectoriel . . . . .	51
4.2.1	Mécanique newtonienne . . . . .	51
4.2.2	Gradient d'un champ scalaire . . . . .	51
4.2.3	Divergence d'un champ vectoriel . . . . .	52
4.2.4	Rotationnel d'un champ vectoriel . . . . .	53
4.2.5	Travail . . . . .	53
4.3	Exercices . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Équations différentielles ordinaires</b>	<b>56</b>
5.1	Équations du premier ordre . . . . .	56
5.1.1	Équations séparables . . . . .	56
5.1.2	L'équation linéaire d'ordre un . . . . .	58
5.2	Équations du second ordre . . . . .	61
5.2.1	L'équation linéaire d'ordre deux . . . . .	61
5.2.2	Fonctions spéciales . . . . .	64
5.3	Exercices . . . . .	67
<b>6</b>	<b>Équations aux dérivées partielles</b>	<b>69</b>
6.1	Séparation des variables . . . . .	69
6.2	Séries de Fourier . . . . .	72
6.3	Exercices . . . . .	74
<b>7</b>	<b>Algèbre linéaire</b>	<b>76</b>
7.1	Matrices . . . . .	76
7.2	Valeurs propres et vecteurs propres . . . . .	80
7.3	Exercices . . . . .	82
<b>8</b>	<b>Probabilités</b>	<b>84</b>
8.1	Calcul des probabilités . . . . .	84
8.1.1	Combinatoire . . . . .	86
8.2	Variables aléatoires . . . . .	86
8.2.1	Variables discrètes . . . . .	86
8.2.2	Variables continues . . . . .	89
8.3	Exercices . . . . .	92

## Table des figures

1	Approximation de Taylor . . . . .	8
2	La fonction exponentielle . . . . .	9
3	Forme polaire des nombres complexes . . . . .	13
4	La fonction tangente . . . . .	14
5	La fonction arctangente . . . . .	14
6	Une fonction de deux variables . . . . .	19
7	La fonction $x^3 + 6xy^2 - 2y^3 - 12x$ . . . . .	25
8	Une droite des moindres carrés . . . . .	25
9	Les coordonnées sphériques . . . . .	32
10	Intégrale curviligne d'une forme exacte . . . . .	36
11	Intégrale curviligne d'une forme inexacte . . . . .	36
12	L'élément d'aire en coordonnées polaires . . . . .	40
13	Le produit scalaire . . . . .	47
14	Le produit vectoriel . . . . .	48
15	Équations séparables . . . . .	57
16	Réactifs, $k_1 < k_2$ . . . . .	59
17	Réactifs, $k_1 = k_2$ . . . . .	60
18	Réactifs, $k_1 > k_2$ . . . . .	60
19	L'oscillateur harmonique . . . . .	64
20	Approximation de Fourier . . . . .	75
21	Loi binomiale, $n = 5, p = 1/2$ . . . . .	88
22	Loi binomiale, $n = 5, p = 1/4$ . . . . .	88
23	Loi normale, $\mu = 1, \sigma^2 = 4$ . . . . .	90
24	Loi binomiale, $n = 25, p = 0,4$ . . . . .	91

# 1 Séries

## 1.1 Sommes finies

La notation  $\Sigma$  (sigma) pour une somme est d'un usage constant en mathématiques :

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k.$$

Exemples.

1. Pour une somme géométrique finie, on a

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

(si la *raison*  $r \neq 1$ ) comme on le voit en multipliant les deux membres par  $(1 - r)$ .

2. Pour un somme arithmétique finie, on a

$$a + 2a + 3a + \cdots + na = \sum_{k=1}^n ka = \frac{n(n+1)}{2} a$$

comme on le voit en l'additionnant avec elle-même, mais écrite dans l'ordre inverse.

## 1.2 Séries infinies

Une série infinie est une limite de sommes finies, lorsque le nombre  $n$  de termes tend vers l'infini :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = S \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k = S.$$

Cela signifie que l'on peut rendre la différence

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k - S \right|$$

aussi petite que l'on veut en choisissant  $n$  suffisamment grand. S'il n'y a pas de limite ou si la limite est infinie, on dit que la série diverge. Autrement, elle converge. Une condition nécessaire pour la convergence est que le *terme*

*général*  $a_k$  tende vers 0 lorsque  $k$  tend vers l'infini mais cette condition n'est pas suffisante.

Exemple. La série géométrique de raison  $r$  est convergente si et seulement si  $|r| < 1$ , auquel cas sa somme  $S$  vaut  $1/(1 - r)$  :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \frac{1}{1-r} \text{ si et seulement si } |r| < 1$$

comme on le voit à partir de la formule pour la somme finie. Une formule généralisée est

$$\sum_{k=N}^{+\infty} r^k = \frac{r^N}{1-r}.$$

Ainsi, en appliquant les formules précédentes, on trouve

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{2}{3}$$

et

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots = \frac{1}{9}.$$

### 1.2.1 Application

Ce dernier exemple est particulièrement important car il est à la base de la représentation décimale des nombres réels. Écrire un nombre réel  $x$  entre 0 et 1 sous sa forme décimale,

$$x = 0, d_1 d_2 d_3 \dots \text{ où } d_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

en effet, c'est en fait le représenter comme la somme d'une série infinie

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k}$$

et cela n'est possible qu'à cause de la convergence de la série géométrique de raison  $1/10$ . De même, la représentation binaire d'un nombre entre 0 et 1, c'est-à-dire la relation

$$x = 0, b_1 b_2 b_3 \dots \text{ où } b_k \in \{0, 1\},$$

n'est possible que parce que la série géométrique de raison  $1/2$  est convergente.

### 1.3 Séries de Taylor

Les fonctions mathématiques  $f(x)$  peuvent aussi s'écrire comme des sommes de séries infinies, en vertu du théorème suivant.

**Théorème 1 (Taylor-MacLaurin)** *On a*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \quad \text{pour } |x| < R$$

où

$$c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$$

et

$$R = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right|.$$

Dans le cas, fréquent, où  $R = +\infty$ , la série converge vers la fonction pour tout  $x$ .

Ce théorème s'applique à toutes les fonctions mathématiques usuelles.

#### 1.3.1 Séries de Taylor des fonctions usuelles

En appliquant le théorème précédent, on obtient les séries de Taylor des fonctions mathématiques habituelles.

**L'exponentielle**

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k \quad \text{pour tout } x$$

**Le cosinus**

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad \text{pour tout } x$$

**Le sinus**

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad \text{pour tout } x$$

**Le logarithme**

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \quad \text{pour } |x| < 1$$

## Le binôme

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k \quad \text{pour } |x| < 1$$

Cette formule est valable quelque soit l'exposant  $\alpha$ . Lorsque  $\alpha = n$  est un entier positif, la série est en fait finie et il n'y a pas de question de convergence. On retrouve le théorème du binôme de l'algèbre (avec  $a = 1$  et  $b = x$ ) :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

où

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

### 1.3.2 Applications

Lorsque  $x$  est près de 0, la fonction  $f(x)$  est bien approximée par les premiers termes de sa série de Taylor :

$$f(x) \approx c_0 + c_1x + c_2x^2 \quad \text{pour } x \approx 0.$$

Exemples.

1. Sur l'intervalle  $(0,1)$ , la fonction  $\sin x^2$  est bien approchée par la somme partielle de sa série de Taylor  $S_3(x) = x^2 - x^6/3! + x^{10}/5!$  :

$$\sin x^2 \approx x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120}.$$

(figure 1, page 8)

2. Pour  $x \approx 0$ , on a

$$\sqrt{1-x^2} \leq \cos x$$

car

$$\sqrt{1-x^2} \approx 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}$$

alors que

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$



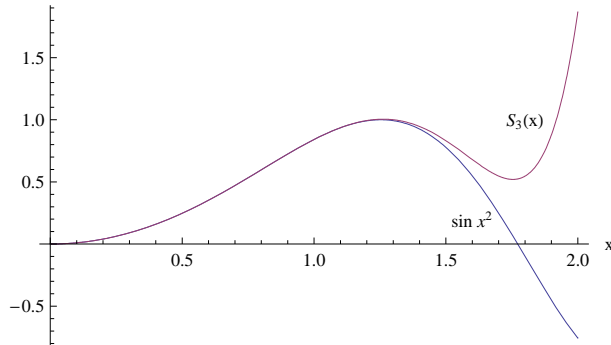


FIG. 1 – Approximation de Taylor

3. La règle de l'Hospital pour évaluer une limite est aussi une conséquence du théorème de Taylor : ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x^2-x} = -\frac{1}{2}$$

car

$$\frac{\ln(1+x)}{x^2-x} \approx \frac{x-x^2/2}{x^2-2x} = \frac{1-x/2}{x-2} \rightarrow -\frac{1}{2}.$$

Remarque. La règle de l'Hospital est aussi valable lorsque  $x \rightarrow +\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

et ceci explique pourquoi la fonction exponentielle croît plus vite que toute puissance de son argument :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \text{ quelque soit } n.$$

Cette propriété de la fonction exponentielle, due au fait qu'elle est sa propre dérivée, est fondamentale. (figure 2, page 9)

#### 1.4 Exercices

1. Calculer les sommes suivantes :

—

$$1 + 10 + 100 + 1000 + \dots + 10^{10}$$

—

$$a^3 - a^4 + a^5 - a^6 + \dots - a^{14}$$

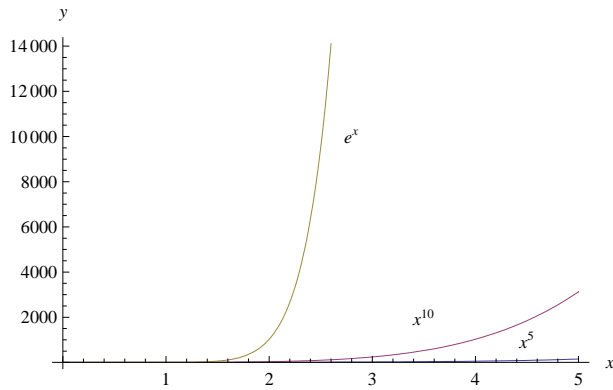


FIG. 2 – La fonction exponentielle

–

$$m + (m + 1) + (m + 2) + \dots + (m + n)$$

–

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1).$$

2. Calculer les sommes des séries suivantes :

–

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$$

–

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$$

–

$$1 + u^2 + u^4 + u^6 + \dots, |u| < 1$$

–

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{a^2}{1+a^2} \right)^k.$$

3. Exprimer les nombres suivants sous la forme d'un quotient d'entiers :

–

$$0,323232\dots$$

–

$$0,0ab0ab0ab\dots$$

4. Calculer les quatre premiers termes non nuls des séries de Taylor des fonctions suivantes et dire pour quelles valeurs de  $x$  ces séries sont convergentes :

—

$$\sqrt[3]{1-x}$$

—

$$\ln \frac{1-x}{1+x}$$

—

$$\cos \sqrt{x}$$

—

$$10^x$$

—

$$\frac{\sin x}{x}$$

5. Évaluer les limites suivantes :

—

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx^n}{\sin x^n}$$

—

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

6. Calculer

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k}$$

(Suggestion : dériver les deux membres de la relation

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}).$$

## 2 Nombres complexes

### 2.1 Systèmes de nombres

Les entiers naturels

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

sont fermés sous les opérations d'addition  $m + n$  et de multiplication  $mn$ . Pour obtenir un système également clos sous la soustraction, on doit passer aux entiers relatifs

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

et pour obtenir un ensemble de nombres aussi fermé sous la division, il faut considérer les quotients d'entiers relatifs, ce qui conduit aux nombres rationnels

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

Ce *corps* de nombres est cependant insuffisant en sciences car il ne permet ni de mesurer l'hypothénuse d'un carré ( $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ), ni la circonférence d'un cercle ( $\pi \notin \mathbb{Q}$ ) ni d'exprimer les intérêts composés « continûment » ( $e \notin \mathbb{Q}$ ). Pour cela, les nombres réels sont nécessaires, qui correspondent à l'ensemble de tous les développements décimaux possibles

$$\mathbb{R} = \left\{ \pm \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k 10^k \mid d_k \in \{0, 1, \dots, 9\} \right\}.$$

On les représente géométriquement comme les points d'une droite, le point correspondant au nombre  $x$  étant à la gauche du point représentant le nombre  $y$  si et seulement si  $x < y$ .

### 2.2 Algèbre des nombres complexes

Pour pouvoir résoudre l'équation  $x^2 + 1 = 0$ , qui n'a pas de solution réelle car le carré de tout nombre réel est positif, on ajoute le nombre  $i$  tel que, par définition,

$$i^2 = -1.$$

Pour obtenir un corps, il faut bien sûr ajouter toutes ses puissances, ce qui est facile puisque

$$i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1, \dots$$

et toutes leurs combinaisons avec des nombres réels. On obtient ainsi les nombres complexes

$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Si  $z = x + iy$  est un nombre complexe,  $x = \Re z$  est sa partie réelle,  $y = \Im z$  est sa partie imaginaire et  $z^* = x - iy$  est son conjugué. Les opérations algébriques sur les nombres complexes se font suivant les mêmes règles que celles régissant les nombres réels en remplaçant partout  $i^2$  par  $-1$ . Ainsi

$$(x + iy) \pm (u + iv) = (x \pm u) + i(y \pm v),$$

$$(x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu)$$

donc

$$(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$$

et

$$\frac{x + iy}{u + iv} = \frac{(x + iy)(u - iv)}{(u + iv)(u - iv)} = \frac{(xu + yv) + i(xv - yu)}{u^2 + v^2}.$$

### 2.3 Géométrie des nombres complexes

Les nombres complexes peuvent ainsi être représentés comme les points d'un plan, la partie réelle de  $z$  correspondant à l'abscisse  $x$  du point  $P$  qui lui est associé et la partie imaginaire correspondant à l'ordonnée  $y$  de  $P$ . Représentant  $P$  au moyen de ses coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$ , on obtient une autre expression pour le nombre complexe  $z$  :

$$z = x + iy = r \cos \theta + ir \sin \theta.$$

Le nombre positif  $r = |z|$  est le module de  $z$  et l'angle  $\theta = \arg z$  est son argument. On a  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $\tan \theta = y/x$ , ce qui ne détermine pas uniquement le nombre  $\theta$  : un choix doit être fait. Pour avoir  $-\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ , il faut ainsi prendre

$$\theta = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{si } x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

(figure 3, page 13).

Exemples.

1. On a

$$3 + 2i = 3,606 (\cos 0,588 + i \sin 0,588)$$

$$\text{car } r = \sqrt{13} \text{ et } \theta = \arctan 2/3 = 0,588 = 33^\circ 41' 24''.$$

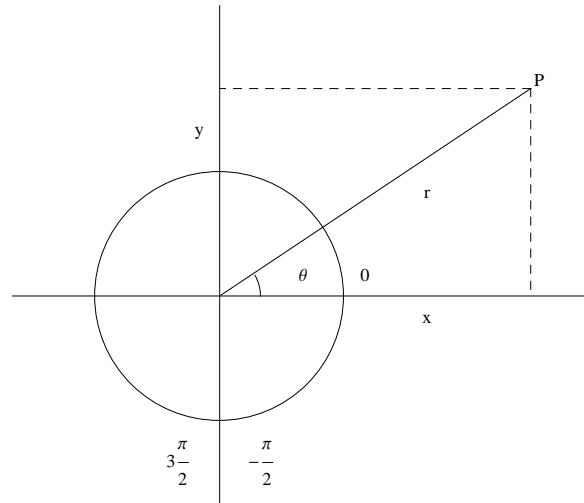


FIG. 3 – Forme polaire des nombres complexes

2. On a

$$-2 + 0,5i = 2,062 (\cos 2,897 + i \sin 2,897)$$

$$\text{car } \theta = \arctan 0,5/(-2) + \pi = 2,897 \approx 166^\circ.$$

3. On a

$$1 - 2i = 2,236 (\cos 1,107 - i \sin 1,107)$$

$$\text{car } \theta = \arctan(-2) = -1,107 \approx -63^\circ.$$

#### RAPPEL SUR LA FONCTION ARCTANGENTE

La fonction tangente. (figure 4, page 14)

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

$$\tan(x + \pi) = \tan x, \quad \tan(-x) = -\tan x$$

La fonction arctangente. (figure 5, page 14)

$$x = \arctan y, \quad -\infty < y < +\infty$$

$$\arctan(-y) = -\arctan y, \quad \frac{d}{dy} \arctan y = \frac{1}{1 + y^2}$$

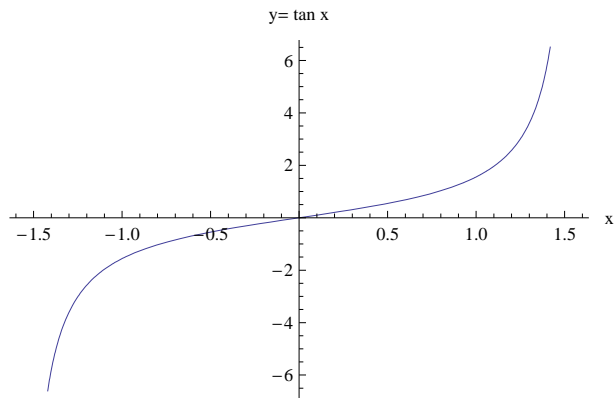


FIG. 4 – La fonction tangente

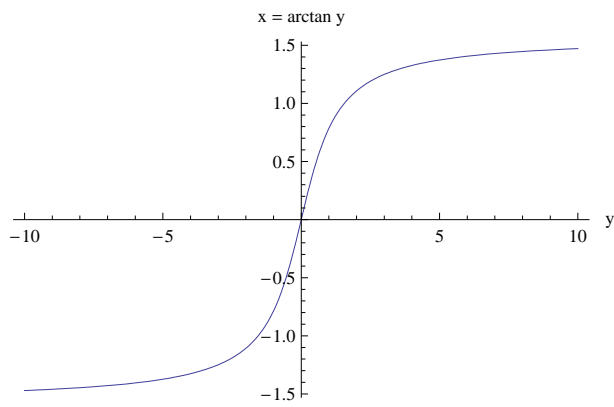


FIG. 5 – La fonction arctangente

---

Cette représentation permet de visualiser les opérations algébriques sur les nombres complexes. En particulier, utilisant les propriétés des fonctions trigonométriques, on voit que

$$r(\cos \theta + i \sin \theta)s(\cos \phi + i \sin \phi) = rs(\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi)).$$

Dans la multiplication, modules se multiplient et arguments s'additionnent (modulo  $2\pi$ ).

Exemple. On a

$$(3 + 2i)(-2 + 0,5i) = -7 - 2,5i = 7,433(\cos 3,485 + i \sin 3,485)$$

et  $3,485 = 0,588 + 2,897$ .

La formule précédente peut être généralisée à la *formule de de Moivre* :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

valable quelque soit l'entier positif  $n$ .

## 2.4 La formule d'Euler

Les fonctions mathématiques usuelles d'une variable réelle se prolongent facilement à des fonctions d'une variable complexe à l'aide de leur série de Taylor. Leurs valeurs sont alors bien sûr complexes et on ne peut plus les visualiser à l'aide d'un seul plan.

Exemple. La fonction  $y = f(x) = x^2$  devient  $w = f(z) = z^2$ . En posant  $z = x + iy$  et  $w = u + iv$ , on trouve que  $u = x^2 - y^2$  et que  $v = 2xy$ .

La formule d'Euler s'écrit

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

et se démontre à l'aide des séries de Taylor des fonctions impliquées, en y séparant parties réelles et imaginaires.

$$\begin{aligned} e^{it} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(it)^k}{k!} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(it)^{2j}}{(2j)!} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(it)^{2j+1}}{(2j+1)!} \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j (t)^{2j}}{(2j)!} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i(-1)^j (t)^{2j+1}}{(2j+1)!} = \cos t + i \sin t. \end{aligned}$$



En vertu de cette formule, la façon habituelle d'écrire un nombre complexe à l'aide de son module et de son argument est

$$z = x + iy = re^{i\theta}.$$

Exemples.

1.  $1 + 2i = \sqrt{5} e^{i1,107}$
2.  $-1 - i = \sqrt{2} e^{i5\pi/4} = \sqrt{2} e^{i225^\circ}$
3.  $i = e^{i\pi/2}$
4.  $e^{i\pi} + 1 = 0$ .

## 2.5 Applications

L'une des raisons pour laquelle les nombres complexes sont si utiles est *le théorème fondamental de l'algèbre*, en vertu duquel, si l'on admet les racines complexes, toute équation algébrique de degré  $n$ ,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0,$$

admet exactement  $n$  racines (en comptant les multiplicités : 1 est une racine double de  $x^2 - 2x + 1 = 0$ ).

Exemples.

1. Pour l'équation quadratique

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

on a

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Si  $b^2 - 4ac < 0$ , on obtient

$$x = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

deux racines complexes conjuguées. Ainsi, l'équation

$$x^2 + bx + 1 = 0$$

admet deux racines réelles simples  $(-3 \pm \sqrt{5})/2$  si  $b = 3$ , une racine réelle double  $-1$  si  $b = 2$  et deux racines complexes conjuguées  $(-1 \pm i\sqrt{3})/2$  si  $b = 1$ .

2. Tout nombre complexe admet  $n$  racines complexes. Pour résoudre

$$z^n = a,$$

on écrit  $a = Ae^{i\alpha}$  sous sa forme polaire et l'on cherche  $z = re^{i\theta}$  sous la même forme. En égalisant les modules et les arguments, on trouve

$$r = \sqrt[n]{A} \text{ et } \theta = \frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n} \text{ pour } k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Ainsi, les racines de l'équation cubique

$$z^3 = 2i$$

sont

$$\sqrt[3]{2}e^{i\pi/6}, \sqrt[3]{2}e^{i5\pi/6}, \sqrt[3]{2}e^{i9\pi/6}.$$

## 2.6 Exercices

- Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de  $i^n$  pour toutes les valeurs entières, positive ou négatives, de  $n$ .
- Calculer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

$$(1+i)^2 \text{ et } \frac{1+i}{1-i}.$$

- Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

—

$$5+i$$

—

$$5-i$$

—

$$2-6i$$

—

$$-1+3i$$

—

$$-\frac{1}{3} - i\frac{1}{4}.$$

- Décrire les courbes suivantes :

—

$$r = \theta$$

–

$$|z - 1| = |z + 1|$$

–

$$|z| = 2.$$

5. Trouver toutes les solutions des équations suivantes et les exprimer sous forme cartésienne et sous forme polaire :

$$z^2 + 2 = 2z \quad \text{et} \quad z^3 + 1 = 0.$$

6. Dédire de la formule d'Euler que

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

7. Déterminer la partie réelle, la partie imaginaire et le module de  $e^{x+iy}$ .

## 3 Fonctions de plusieurs variables

### 3.1 Les dérivées partielles

Une fonction de deux variables  $f(x, y)$  peut être visualisée au moyen d'une surface dans l'espace, le point  $(x, y, z)$  étant sur la surface représentative de la fonction (son *graphe*) si et seulement si  $z = f(x, y)$ .

Exemple. Le graphe de la fonction  $f(x, y) = x^3 - 7xy - 3y^2$  (un polynôme de degré trois) est illustré sur la figure 6, page 19.

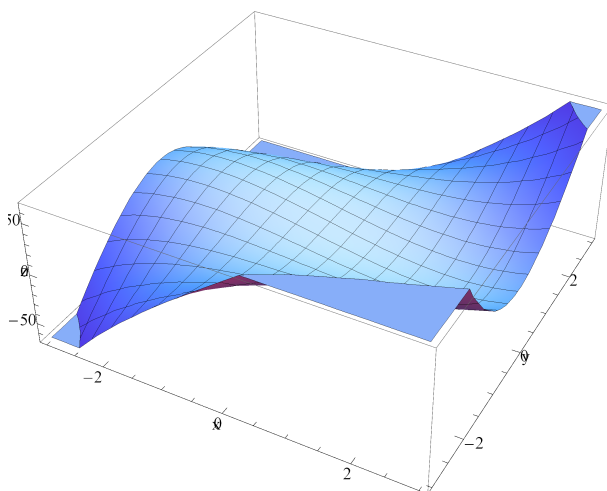


FIG. 6 – Une fonction de deux variables

Si la variable  $z$  est une fonction des variables  $x$  et  $y$ ,  $z = f(x, y)$ , ses dérivées partielles par rapport à ces variables sont définies par les relations

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

et

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Autrement dit, on dérive par rapport à une variable tout en gardant l'autre fixe. Les règles du calcul différentiel des fonction d'une variable sont donc encore applicables. On a des définitions semblables pour des fonctions de plus de deux variables.

## RAPPEL SUR LE CALCUL DIFFÉRENTIEL

Dérivées des fonctions usuelles.

1. 
$$\frac{d}{dx}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} \text{ quelque soit } \alpha$$

2. 
$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

3. 
$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

4. 
$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

5. 
$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x.$$

Règles de calcul.

1. 
$$\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$$

2. 
$$\frac{d}{dx}f(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

3. 
$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

4. 
$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x).$$

---

Les dérivées partielles d'ordre deux sont quant à elles définies comme les dérivées partielles des dérivées partielles. Elles sont dénotées par

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Pour toutes les fonctions usuelles, on a

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Exemples.

1. Si  $z = x^3 - 7xy - 3y^2$ , on a

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 7y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -7x - 6y$$

et

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -7 = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6.$$

2. Si  $z = x^2 e^{-y}$ , on a

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x e^{-y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x^2 e^{-y}$$

et

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2e^{-y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -2x e^{-y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{-y}.$$

3. Si  $z = \sin(x - 2y)$ , on a

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(x - 2y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2 \cos(x - 2y)$$

et

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin(x - 2y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2 \sin(x - 2y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4 \sin(x - 2y).$$

4. Pour  $w = \ln(x^2 + (y - z)^2)$ ,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + (y - z)^2}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2(y - z)}{x^2 + (y - z)^2}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{-2(y - z)}{x^2 + (y - z)^2}$$

et

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{-4x(y - z)}{(x^2 + (y - z)^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \frac{4x(y - z)}{(x^2 + (y - z)^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = \frac{-2(x^2 - (y - z)^2)}{(x^2 + (y - z)^2)^2}.$$

Dans les applications, il est souvent nécessaire d'indiquer au moyen d'un indice quelle est l'autre variable lorsque l'on calcule une dérivée partielle.

Exemple. L'équation d'état pour  $n$  moles d'un gaz parfait est

$$pV = nRT.$$

Considérant qu'elle définit le volume  $V$  comme fonction de la pression  $p$ , de la température  $T$  et de la quantité de matière  $n$ , on écrit

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T,n} = -\frac{nRT}{p^2}, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p,n} = \frac{nR}{p} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{T,p} = \frac{RT}{p}.$$

( $R$  est une constante).

### 3.2 La différentielle

Les dérivées partielles  $\partial z/\partial x$  et  $\partial z/\partial y$  donnent le taux de variation de  $z$  en fonction d'une des deux variables lorsque l'autre est fixe. Lorsque  $x$  et  $y$  varient simultanément, la variation  $\Delta z$  est une fonction de  $x, y$  et des variations  $\Delta x, \Delta y$ . On approxime cette variation par la différentielle

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Lorsque  $dx = \Delta x \approx 0$  et  $dy = \Delta y \approx 0$  en effet, on a  $\Delta z \approx dz$ .

Exemples.

1. Si  $V$  est définie par  $pV = nRT$ , on a

$$dV = \left(-\frac{nRT}{p^2}dp + \frac{nR}{p}dT + \frac{RT}{p}dn\right).$$

Pour  $p = 1,05 \times 10^6$ ,  $T = 300$  et  $n = 1$ , on a ( $R = 8,31$ )

$$dV = -2,26 \times 10^{-9}dp + 7,91 \times 10^{-6}dT + 2,37 \times 10^{-3}dn.$$

Si  $dp = 10^3$ ,  $dT = 1$  et  $dn = 0$ , on aura augmentation du volume

$$dV = 6,65 \times 10^{-6} > 0.$$

2. Le volume  $V$  d'un parallélépipède rectangle de côtés  $a, b$  et  $c$  étant

$$V = abc,$$

on a

$$\frac{dV}{V} = \frac{da}{a} + \frac{db}{b} + \frac{dc}{c}.$$

L'erreur relative sur la mesure du volume est donc la somme des erreurs relatives sur les mesures de ses côtés.

### 3.2.1 Différentielles exactes

Pour qu'une expression (une *forme différentielle*)

$$F(x, y)dx + G(x, y)dy$$

soit la différentielle d'une fonction  $f(x, y)$ , il faut et (pour tous les cas d'intérêt) il suffit que l'on ait

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}.$$

Exemple. À un système thermodynamique, sont associées des variables d'état bien définies telles l'énergie  $U$ , l'entropie  $S$ , le volume  $V$ , la pression  $p$  et la température  $T$ . Ces quantités sont reliées par l'identité thermodynamique

$$dU = TdS - pdV.$$

Le terme  $\delta Q = TdS$  représente la chaleur absorbée par le système et le terme  $\delta W = pdV$  est le travail qu'il fournit. Travail et chaleur ne sont pas des fonctions d'état. Pour une mole d'un gaz parfait,  $pV = RT$ , on a

$$dS = \frac{5R}{2T}dT - \frac{R}{p}dp,$$

une différentielle exacte mais

$$\delta Q = \frac{5R}{2}dT - \frac{RT}{p}dp$$

n'est pas une différentielle exacte.

## 3.3 Optimisation

### 3.3.1 Extrémums libres

Si la fonction  $f(x, y)$  atteint un extremum (maximum ou minimum) local en  $(a, b)$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0.$$

On dit alors que  $(a, b)$  est un *point critique* pour  $f$ . Si, de plus,

$$\Delta(a, b) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 (a, b) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) < 0,$$



il s'agit effectivement d'un extremum. c'est

$$\text{un maximum si } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$$

et

$$\text{un minimum si } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0.$$

Un point critique où  $\Delta(a, b) > 0$  est un point de selle. Si, enfin,  $\Delta(a, b) = 0$ , on ne peut rien conclure.

Exemples.

1. Pour la fonction

$$f(x, y) = 3 + 2y - x^2 - xy - y^2,$$

on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x - y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 - x - 2y$$

et il n'y a qu'un point critique  $(a, b) = (-2/3, 4/3)$ . Puisque  $\Delta = -3 < 0$ , il s'agit bien d'un point d'extremum. Comme  $\partial^2 f / \partial x^2 = -2 < 0$ , on est en présence d'un maximum.

2. Pour la fonction

$$f(x, y) = x^3 + 6xy^2 - 2y^3 - 12x,$$

on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 6y^2 - 12, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 12xy - 6y^2.$$

Les points critiques sont  $(2, 0)$ ,  $(-2, 0)$ ,  $(2/3, 4/3)$  et  $(-2/3, -4/3)$  qui sont respectivement des points de minimum, de maximum, de selle et de selle. (Figure 7, page 25).

3. La droite des moindres carrés.

Pour ajuster une droite  $y = ax + b$  à un nuage de points du plan  $(x_k, y_k)$  avec  $1 \leq k \leq n$ , on minimise la somme des carrés des distances des points calculés aux points observés, considérée comme fonction des paramètres  $a$  et  $b$  :

$$f(a, b) = \sum_{k=1}^n (ax_k + b - y_k)^2.$$

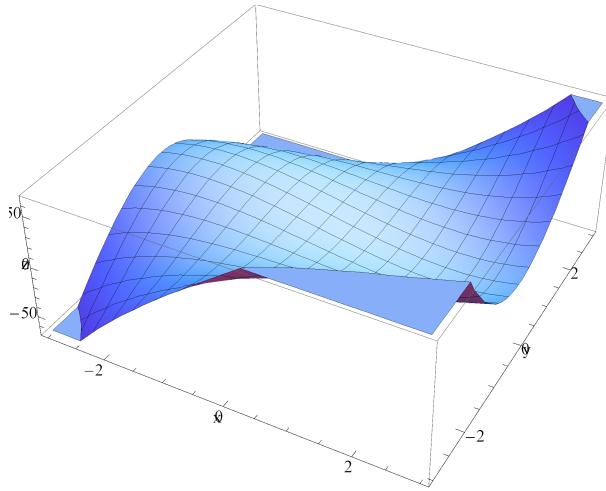


FIG. 7 – La fonction  $x^3 + 6xy^2 - 2y^3 - 12x$

En annulant les dérivées partielles et en résolvant, on trouve

$$a = \frac{n \sum_{k=1}^n x_k y_k - \sum_{k=1}^n x_k \sum_{k=1}^n y_k}{n \sum_{k=1}^n x_k^2 - (\sum_{k=1}^n x_k)^2}$$

et

$$b = \frac{\sum_{k=1}^n x_k^2 \sum_{k=1}^n y_k - \sum_{k=1}^n x_k \sum_{k=1}^n x_k y_k}{n \sum_{k=1}^n x_k^2 - (\sum_{k=1}^n x_k)^2}.$$

Le test des deuxièmes dérivées montre qu'il s'agit bien d'un minimum. (Figure 8, page 25).

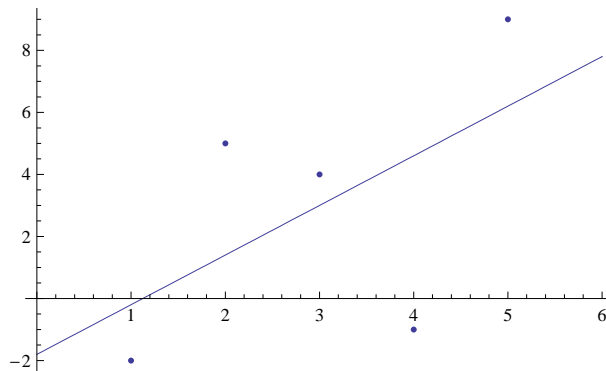


FIG. 8 – Une droite des moindres carrés

### 3.3.2 Extremums liés

Pour maximiser ou minimiser  $f(x, y)$  sous une contrainte  $g(x, y) = 0$  liant les variables  $x$  et  $y$ , on peut employer deux méthodes.

1. Utiliser la contrainte pour éliminer l'une des variables.
2. Utiliser un *multiplicateur de Lagrange*  $\lambda$  : on introduit la fonction de Lagrange

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

que l'on maximise ou minimise sans contrainte. L'on obtient ainsi trois équations

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$$

en trois inconnues. La troisième correspond toujours à la contrainte.

Exemples.

1. Pour déterminer les extremums locaux de la fonction

$$f(x, y) = 3x^2 - 2y^2 + 1$$

le long de la droite

$$x + y = 2,$$

on peut éliminer  $y$  et considérer la fonction  $F(x) = x^2 + 8x - 7$ . Comme  $F'(x) = 2x + 8$ , elle admet un minimum local en  $x = -4$ . Donc  $f$  admet un minimum local  $-23$  au point  $(-4, 6)$ .

Suivant la méthode de Lagrange, on introduit la fonction

$$F(x, y, \lambda) = 3x^2 - 2y^2 + 1 + \lambda(x + y - 2).$$

On a

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 6x + \lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -4y + \lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = (x + y - 2).$$

Le seul point où ces trois dérivées partielles s'annulent est  $(-4, 6, 24)$  et  $f(-4, 6) = -23$ .

2. Pour maximiser le volume

$$V = xyz$$

d'un parallélépipède rectangle sous la contrainte que l'aire  $A$  de ses côtés est donnée,

$$2(xy + yz + zx) = A,$$

on introduit la fonction de Lagrange

$$F(x, y, \lambda) = xyz + \lambda 2(xy + yz + zx - A).$$

On obtient les relations

$$yz + 2\lambda(y + z) = 0, \quad xz + 2\lambda(x + z) = 0, \quad xy + 2\lambda(y + x) = 0.$$

D'où, par symétrie,  $x = y = z$  et

$$V = \left(\frac{A}{6}\right)^{3/2}.$$

3. Pour déterminer la distance du point  $(1, 0)$  à la droite  $x + 2y = 3$ , il faut minimiser la fonction

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2$$

sous la contrainte

$$x + 2y = 3.$$

Suivant la première méthode, on considère la fonction

$$F(x) = \frac{5}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{13}{4}$$

dont le minimum,  $4/5$ , est atteint au point  $x = 7/5$ . Donc la distance minimum est  $2/\sqrt{5}$ .

Suivant la méthode de Lagrange, on considère

$$F(x, y, \lambda) = (x - 1)^2 + y^2 + \lambda(x + 2y - 3).$$

En annulant ses dérivées partielles, on trouve

$$x = 1 - \frac{\lambda}{2}, \quad y = -\lambda, \quad x + 2y - 3 = 0$$

d'où  $\lambda = -4/5$ ,  $y = 4/5$  et  $x = 7/5$ . La distance minimum est atteinte au point  $(7/5, 4/5)$  et vaut  $2/\sqrt{5}$ .

### 3.4 Changements de variables

#### 3.4.1 Une identité

Si  $f(x, y, z) = 0$ , on a

$$0 = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

Considérant que l'équation initiale définit  $z$  comme fonction de  $x$  et de  $y$ , on en tire

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

De même,

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}$$

et

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Multipliant ces trois relations

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -1.$$

Exemple. Dans un système thermodynamique dont l'équation d'état est de la forme  $f(p, V, T) = 0$ , on a

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -1.$$

Par exemple, si  $pV = RT$ , on a

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = \frac{V}{R}, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = -\frac{RT}{V^2}, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{R}{p}$$

et l'identité est bien vérifiée.

### 3.4.2 Une nouvelle variable

Si  $z = f(x, y)$  et si  $x = x(t)$  et  $y = y(t)$ , alors  $z$  est en fait une fonction de  $t$  dont on peut calculer la dérivée à l'aide d'une règle de dérivation en chaîne

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Exemple. Si  $z = x + x^2y$ ,  $x = t^2$  et  $y = e^{-t}$ , on a, directement,

$$z = t^2 + t^4 e^{-t}$$

donc

$$\frac{dz}{dt} = 2t + 4t^3 e^{-t} - t^4 e^{-t}.$$

On retrouve le même résultat en utilisant la règle de dérivation en chaîne puis en substituant :

$$\frac{dz}{dt} = (1 + 2xy)2t + x^2(-e^{-t}) = (1 + 2t^2 e^{-t})2t + t^4(-e^{-t}).$$

### 3.4.3 Deux nouvelles variables

Si  $z = f(x, y)$  et si  $x = x(u, v)$  et  $y = y(u, v)$ , on a

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad \text{et} \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

En substituant

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \quad \text{et} \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv$$

dans la première expression et en comparant les coefficients correspondant de  $du$  et de  $dv$  dans la deuxième, on trouve

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

et

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Cette règle s'étend aux fonctions de plus de deux variables. Ainsi, en passant des variables  $x, y, z$  aux variables  $u, v, w$ , on aura

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}$$

etc...

Exemples.

1. Si  $z = xe^{x-y}$  et  $x = u + v, y = u - v$ , on peut calculer les dérivées partielles de  $z$  par rapport aux nouvelles variables  $u, v$  directement à partir de l'expression  $z = (u + v)e^{2v}$  ou au moyen de la formule précédente. On trouve

$$\frac{\partial z}{\partial u} = e^{2v}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = (1 + 2(u + v))e^{2v}.$$

2. Les coordonnées polaires. Si  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ , on a

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta$$

et

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial z}{\partial y} (r \cos \theta).$$

3. L'équation de Laplace joue un rôle important en physique. En coordonnées cartésiennes, elle s'écrit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

et en coordonnées polaires,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = 0$$

comme on peut le voir en appliquant la règle de dérivation en chaîne deux fois.

### 3.4.4 Un cas particulier

Lorsque  $x = u$  dans la formule du changement de variables précédente, il faut utiliser des indices pour bien spécifier de quelles variables il s'agit.

On a

$$\left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_v = \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_y + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)_x \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)_v.$$

Exemple.

1. Si  $z = xe^{x-y}$  et  $x = u, y = u - v$ , on a

$$\left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_y = (1 + x)e^{x-y} \quad \text{mais} \quad \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_v = e^v.$$

2. Considérons à nouveau une mole d'un gaz parfait,  $pV = RT$ . Son entropie  $S$ , exprimée en termes de  $T$  et de  $V$ , s'écrit

$$S = \frac{3}{2}R \ln T + R \ln V + \text{constante}$$

de telle sorte que

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{3R}{2T}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{R}{V}.$$

Utilisant plutôt les variables  $T$  et  $p = RT/V$ , on aura

$$S = \frac{5}{2}R \ln T - R \ln p + \text{autre constante}$$

de telle sorte que

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \frac{5R}{2T}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\frac{R}{p}$$

en accord avec la formule générale.

### 3.4.5 Les coordonnées sphériques

On peut repérer un point  $P$  dans l'espace au moyen de ses coordonnées cartésiennes  $x, y, z$  ou au moyen de ses coordonnées sphériques  $r, \theta, \phi$ . Ces dernières sont définies par les relations

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

où  $r > 0$ ,  $0 < \theta < \pi$  (attention!) et  $-\pi/2 < \phi < 3\pi/2$ . La transformation inverse est

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\phi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{si } x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La surface  $r = r_0$  est une sphère centrée à l'origine, la surface  $\theta = \theta_0$  est un cône dont le sommet est à l'origine et la surface  $\phi = \phi_0$  est un demi-plan



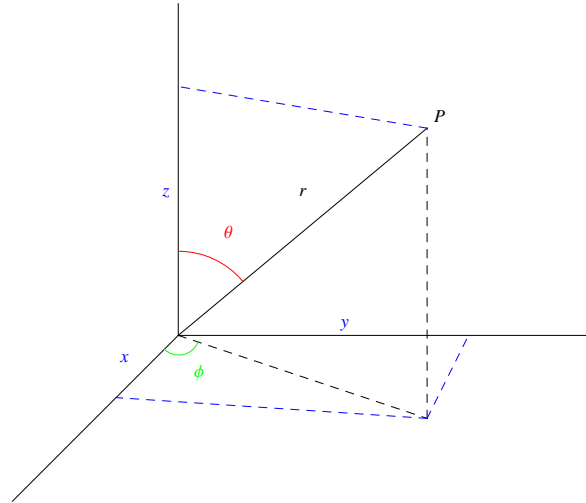


FIG. 9 – Les coordonnées sphériques

appuyé sur l'axe des  $z$ . La courbe  $r = r_0, \theta = \theta_0$  est une parallèle, la courbe  $r = r_0, \phi = \phi_0$  est un méridien. (Figure 9, page 32).

Exemples.

1. Les coordonnées sphériques du point  $P$  de coordonnées cartésiennes  $(-1, 2, -3)$  sont

$$r = \sqrt{14}$$

$$\theta = \arccos \frac{-3}{\sqrt{14}} = 2,501 \approx 143,3^\circ$$

$$\phi = \arctan(-2) + \pi = 2,034 \approx 116,5^\circ.$$

2. Les coordonnées cartésiennes du point  $P$  de coordonnées sphériques  $(2, \pi/6, \pi/4)$  sont

$$x = 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$$

$$y = 2 \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$$

$$z = 2 \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} = 1,732.$$

3. Les coordonnées géographiques de Montréal sont  $45,52^\circ$  latitude N et  $73,57^\circ$  longitude O. Comme le méridien de Greenwich correspond à  $\phi = 0$  et comme le rayon de la Terre est  $r = 6,378$  km, ses coordonnées cartésiennes dans un repère centré au centre de la Terre seraient

$$\begin{aligned}x &= r \sin 44,48^\circ \cos(-73,57^\circ) = 1264 \text{ km} \\y &= r \sin 44,48^\circ \sin(-73,57^\circ) = -4286 \text{ km} \\z &= r \cos 44,48^\circ = 4550 \text{ km}.\end{aligned}$$

4. L'équation de Laplace en trois dimensions est

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Il est utile de l'écrire en coordonnées sphériques pour le cas fréquent où la fonction  $f$  ne dépend que de  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . C'est

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} = 0.$$

### 3.5 Intégrales curvilignes

Le calcul du travail effectué par un système thermodynamique ou mécanique se calcule au moyen d'une intégrale curviligne. L'intégrale curviligne de la forme différentielle

$$F(x, y)dx + G(x, y)dy$$

le long de la courbe

$$C = \{(x, y) \mid x = x(t), y = y(t), a < t < b\}$$

est, par définition,

$$\int_C F(x, y)dx + G(x, y)dy = \int_a^b \left( F(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + G(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right) dt.$$

Dans le cas, fréquent, où  $x = t$ , cela se simplifie à

$$\int_C F(x, y)dx + G(x, y)dy = \int_a^b \left( F(x, y(x)) + G(x, y(x)) \frac{dy}{dx} \right) dx.$$

RAPPEL SUR LE CALCUL INTÉGRAL

Le théorème fondamental du calcul exprime que pour toute fonction continue  $f$ , on a

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

où  $F$  est une primitive de  $f$ , c'est-à-dire une fonction telle que  $F'(x) = f(x)$ , dénotée  $F(x) = \int f(x) dx$ .

La formule d'intégration par parties est

$$\int_a^b F(x)g(x) dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x) dx$$

et la formule de changement de variable s'écrit

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(x(t)) \frac{dx}{dt} dt$$

si  $x(t)$  croit de  $a$  à  $b$  lorsque  $t$  croit de  $c$  à  $d$ .

Les règles de calcul des primitives correspondent à celles du calcul des dérivées.

1.

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad \text{si } \alpha \neq -1$$

2.

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

3.

$$\int \ln x dx = x \ln x - x$$

4.

$$\int e^x dx = e^x$$

5.

$$\int \cos x dx = \sin x$$

6.

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

---

Si la forme différentielle est exacte,  $dz = F(x, y)dx + G(x, y)dy$ , l'intégrale ne dépend que des extrémités de la courbe  $C$  puisqu'elle correspond à la variation de  $z$  entre les extrémités de  $C$  :

$$\int_C F(x, y)dx + G(x, y)dy = \int_a^b \frac{dz}{dt} dt = z(x(b), y(b)) - z(x(a), y(a)).$$

Si l'on sait que  $dz = F(x, y)dx + G(x, y)dy$  est exacte, on peut trouver  $z$  comme suit : d'abord

$$z = \int F(x, y) dx + H(y)$$

où  $H$ , inconnue, est déterminée par

$$G(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \int F(x, y) dx \right) + H'(y).$$

Exemples.

1. En thermodynamique, la différentielle  $TdS - pdV$  est exacte, c'est celle de l'énergie  $U$  du système. On a donc (figure 10, page 36)

$$\int_{C_1} TdS - pdV = \int_{C_2} TdS - pdV = U(B) - U(A)$$

quelles que soient les courbes  $C_1$  et  $C_2$  joignant les états  $A$  et  $B$  et quelle que soit l'équation d'état du système (c'est-à-dire, quelle que soit l'expression de  $dS$  en terme de  $p$  et  $V$ ).

2. Le travail  $W$  n'est pas une fonction d'état du système, sa « différentielle »  $\delta W = pdV$  n'est pas exacte et l'intégrale curviligne dépend effectivement de la courbe choisie (figure 11, page 36). On a

$$\begin{aligned} \int_{C_1} pdV &= \int_{V_A}^{V_B} p_A dV = p_A(V_B - V_A) \\ \int_{C_2} pdV &= \int_{V_A}^{V_B} p_B dV = p_B(V_B - V_A) \\ \int_{C_3} pdV &= \int_{V_A}^{V_B} \left( p_A \frac{V_B - V}{V_B - V_A} + p_B \frac{V - V_A}{V_B - V_A} \right) dV = \frac{p_A + p_B}{2}(V_B - V_A). \end{aligned}$$

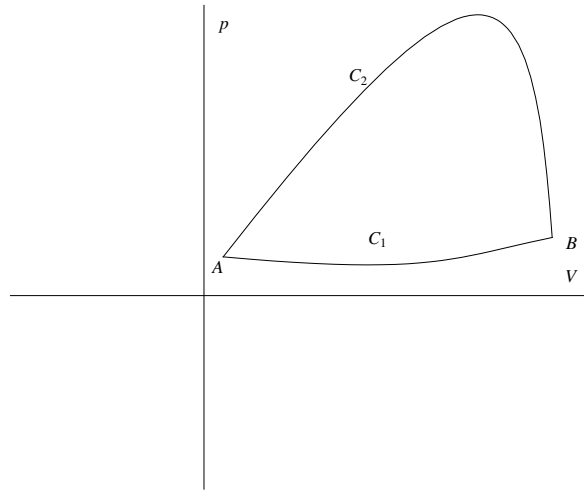


FIG. 10 – Intégrale curviligne d'une forme exacte

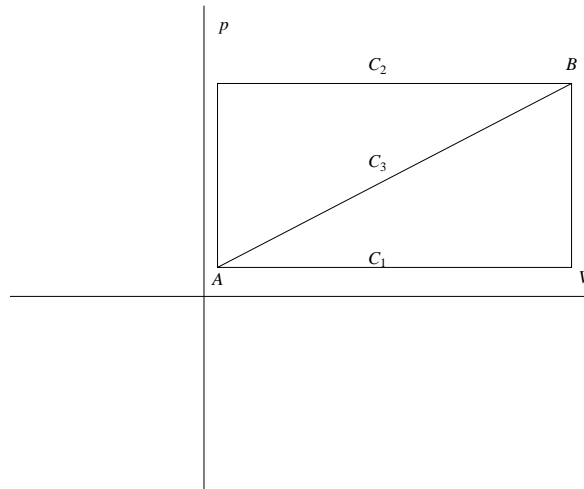


FIG. 11 – Intégrale curviligne d'une forme inexacte

3. La forme différentielle  $x dx + 2y dy$  est exacte. On a

$$z = \int x dx + H(y) = \frac{x^2}{2} + H(y)$$

puis

$$2y = 0 + H'(y)$$

donc  $H(y) = y^2$  et  $z = x^2/2 + y^2$  à une constante additive près.

### 3.6 Intégrales doubles

La valeur moyenne  $\bar{f}$  d'une fonction continue de deux variables  $f(x, y)$  dans une région  $A$  du plan  $\mathbb{R}^2$  se calcule au moyen d'une intégrale double :

$$\bar{f} = \frac{1}{\text{aire de } A} \iint_A f(x, y) dA$$

Lorsque  $A$  est un rectangle,

$$A = \{(x, y) \mid a < x < b, c < y < d\},$$

on a

$$\iint_A f(x, y) dA = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

car la valeur de *l'intégrale itérée* ne dépend pas de l'ordre d'intégration. Si  $A$  est plus complexe,

$$A = \{(x, y) \mid a < x < b, c(x) < y < d(x)\} = \{(x, y) \mid a(y) < x < b(y), c < y < d\},$$

on a

$$\iint_A f(x, y) dA = \int_c^d \left( \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

et l'ordre d'intégration n'importe pas non plus (mais attention aux bornes d'intégration!).

Exemples.

1. Si  $f(x, y) = x^2y + x$  et  $A = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 2 < y < 4\}$ , l'aire de  $A$  vaut 2 et

$$\iint_A f(x, y) dA = \int_2^4 \left( \int_0^1 (x^2y + x) dx \right) dy = \int_2^4 \left( \frac{y}{3} + \frac{1}{2} \right) dy = 3$$

donc  $\bar{f} = 3/2$ .

2. Si  $f(x, y) = x^2y + x$  et  $A = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1, x + y < 1\}$ , l'aire de  $A$  vaut  $1/2$  et

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) dA &= \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} (x^2y + x) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( \frac{x^2(1-x)^2}{2} + x(1-x) \right) dx = \frac{11}{60} \end{aligned}$$

donc  $\bar{f} = 11/30$ .

3. Si  $f(x, y) = x \sin \pi y$  et  $A = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 2 < y < 4\}$ , on a

$$\iint_A f(x, y) dA = \int_2^4 \left( \int_0^1 x \sin \pi y dx \right) dy = \int_2^4 \sin \pi y dy \int_0^1 x dx = 0$$

donc  $\bar{f} = 0$ .

4. Si  $f(x, y) = x \sin \pi y$  et  $A = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < x\}$ , on a

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) dA &= \int_0^1 \left( \int_0^x x \sin \pi y dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{x(1 - \cos \pi x)}{\pi} dx = \left( \frac{x^2}{2\pi} - \frac{\cos \pi x}{\pi^3} - \frac{x \sin \pi x}{\pi^2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2\pi} + \frac{2}{\pi^3}. \end{aligned}$$

5. Si  $f(x, y) > 0$ , l'intégrale double

$$\iint_A f(x, y) dA$$

donne le volume compris entre les surfaces  $z = f(x, y)$  et  $z = 0$  au-dessus de  $A$ . Par exemple, le volume du tétraèdre

$$V = \{(x, y, z) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 1, x + y + z < 1\}$$

est donné par

$$\iint_A (1 - x - y) dA$$

où  $A = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1, x + y < 1\}$ , c'est-à-dire

$$\int_0^1 \left( \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy \right) dx = \frac{1}{6}.$$

### 3.6.1 Utilisation des coordonnées polaires

Lorsque la région  $A$  présente une symétrie circulaire ou que la fonction  $f(x, y)$  ne dépend que de  $\sqrt{x^2 + y^2}$ , on peut utiliser les coordonnées polaires  $r, \theta$ . Puisque l'élément d'aire  $dA$  est

$$dA = dx dy = r dr d\theta$$

(figure 12, page 40), on a

$$\iint_A f(x, y) dA = \iint_A f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

(ne pas oublier le  $r$  !)

Exemples.

1. Si  $f(x, y) = x^2$  et  $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ , on a

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) dA &= \iint_A f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta = \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} r^3 \cos^2 \theta d\theta \right) dr \\ &= \int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

2. Lorsque  $A$  n'est pas bornée, il faut calculer une limite supplémentaire.

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \frac{y^2}{x^2+y^2} dA &= \\ \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-r^2} \sin^2 \theta dA &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \iint_{r < a} e^{-r^2} \sin^2 \theta dA \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a e^{-r^2} r dr \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\pi(1 - e^{-a^2})}{2} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

3. En calcul des probabilités, on utilise beaucoup la relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

En calculant le carré de l'intégrale via les coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy &= \int_{-\pi}^{+\pi} \int_0^{+\infty} e^{-r^2/2} r dr d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{+\pi} \left( -e^{-r^2/2} \Big|_{r=0}^{+\infty} \right) d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$



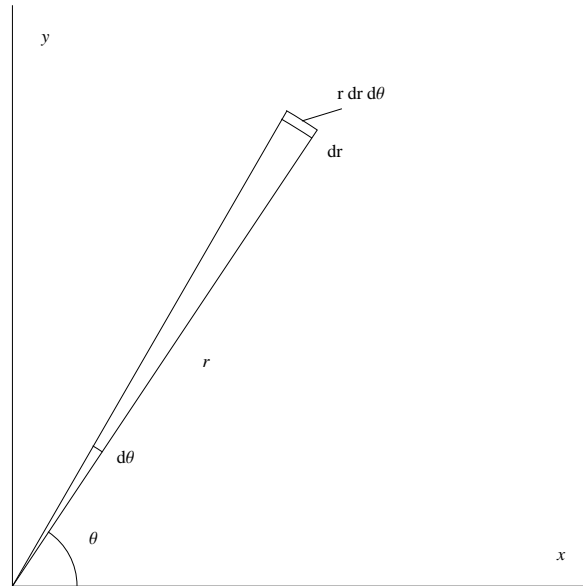


FIG. 12 – L'élément d'aire en coordonnées polaires

### 3.7 Intégrales triples

La valeur moyenne  $\bar{f}$  d'une fonction continue de trois variables  $f(x, y, z)$  dans une région  $V$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$  se calcule au moyen d'une intégrale triple :

$$\bar{f} = \frac{1}{\text{volume de } V} \iiint_V f(x, y, z) dV.$$

Exemples.

1. Si  $f(x, y, z) = xy^2z^3$  et

$$V = \{(x, y, z) \mid 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c\},$$

le volume de  $V$  est  $abc$  et

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_0^a \left( \int_0^b \left( \int_0^c xy^2z^3 dz \right) dy \right) dx = \frac{a^2}{2} \frac{b^3}{3} \frac{c^4}{4}$$

de telle sorte que

$$\bar{f} = \frac{ab^2c^3}{24}.$$

2. Lorsque  $f(x, y, z) > 0$ , l'intégrale triple peut toujours s'interpréter comme la masse d'un solide  $V$  de densité variable. Par exemple, si sa densité est

$$f(x, y, z) = (1 - z)ye^{-xy},$$

la masse du cube

$$V = \{(x, y, z) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 1\}$$

est

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dV &= \int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \int_0^1 (1 - z)ye^{-xy} dx \right) dy \right) dz \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^1 (1 - z)(1 - e^{-y}) dy \right) dz = \frac{1}{2e}. \end{aligned}$$

### 3.7.1 Utilisation des coordonnées sphériques

Lorsque la région  $V$  présente une symétrie par rapport à un point ou que la fonction  $f(x, y, z)$  ne dépend que de  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , on peut utiliser les coordonnées sphériques  $r, \theta, \phi$ . Puisque

$$dV = dx dy dz = dr \times r d\theta \times r \sin \theta d\phi,$$

on a

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_V f(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi.$$

Exemples.

1. La masse de la sphère de rayon  $a$  et de densité  $f(x, y, z) = a - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  est

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi \left( \int_0^a (a - r)r^2 \sin \theta dr \right) d\theta \right) d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^a (a - r)r^2 dr = \frac{\pi a^4}{3}. \end{aligned}$$

Le volume de la sphère étant  $4\pi a^3/3$ , cela correspond à une densité moyenne de  $a/4$ .

2. La valeur moyenne de la fonction  $f(x, y, z) = z$  sur l'hémisphère

$$V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < a^2, z > 0\}$$

est

$$\begin{aligned} \frac{3}{2\pi a^3} \iiint_V z \, dV &= \frac{3}{2\pi a^3} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\pi/2} \left( \int_0^a r \cos \theta r^2 \sin \theta \, dr \right) d\theta \right) d\phi \\ &= \frac{3}{2\pi a^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \int_0^a r^3 \, dr \\ &= \frac{3}{2\pi a^3} 2\pi \left( -\frac{\cos 2\theta}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} \frac{a^4}{4} = \frac{3a}{8}. \end{aligned}$$

### 3.8 Exercices

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre un et d'ordre deux des fonctions suivantes et vérifier l'égalité des dérivées d'ordre deux mixtes :

—

$$f(x, y) = e^{-x} \cos(x + 2y)$$

—

$$f(x, y) = \ln(x^2 - y)$$

—

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

2. L'équation d'état d'un gaz étant

$$\left( p + \frac{1,85 \times 10^{-6}}{V^2} \right) (V - 5 \times 10^{-6}) = 2,2T,$$

calculer

$$\left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V.$$

3. Deux fonctions  $f(x, y)$  et  $g(x, y)$  ayant les mêmes dérivées partielles par rapport à  $x$  sont-elles nécessairement égales? Et si elles ont en plus les mêmes dérivées partielles par rapport à  $y$ ?
4. Calculer, pour un gaz obéissant à l'équation de Van der Waals

$$\left( p + \frac{n^2 a}{V^2} \right) (V - nb) = nRT,$$

la différentielle  $dp$  en fonction des différentielles  $dV$ ,  $dT$  et  $dn$  ( $a$  et  $b$  sont des constantes).

5. L'entropie  $S$  d'un mélange de  $n$  gaz parfaits est, en fonction des fractions molaires  $x_k$  des composantes,

$$S = -R \sum_{k=1}^n x_k \ln x_k.$$

Exprimer  $dS$  en termes des différentielles  $dx_k$ .

6. À partir d'une mesure du diamètre de sa base  $13,2 \pm 0,1 \text{ mm}$  et d'une mesure de sa hauteur  $30,1 \pm 0,1 \text{ mm}$ , on calcule le volume d'un cylindre. Calculer l'erreur relative commise sur le volume.
7. Pour un gaz obéissant à l'équation de Van der Waals,

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT,$$

l'énergie interne est

$$U = \frac{3}{2}RT - \frac{a}{V}.$$

Vérifier que  $\delta Q = dU + pdV$  n'est pas une différentielle exacte mais que  $\delta Q/T$  l'est.

8. Déterminer les points critiques des fonctions suivantes

—

$$f(x, y) = x - y + 2xy + 5x^2 + y^2$$

—

$$f(x, y) = x + y + 3xy - x^2 - 2y^2$$

—

$$f(x, y) = (x + y) + (x - y)^2$$

—

$$f(x, y) = x + 4xy + x^3 - y^2.$$

et préciser leur nature.

9. Calculer la droite des moindres carrés pour les données correspondant à la figure 8, page 25 :

x	1	2	3	4	5
y	-2	5	4	-1	9

10. Déterminer les point critiques des fonctions suivantes sous les contraintes indiquées :

$$f(x, y, z) = (1-x)(1-y)(1-z), \quad x + y + z = 1$$

$$f(x, y, z) = x \ln x + y \ln y + z \ln z, \quad x + y + z = 1, x > 0, y > 0, z > 0$$

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, \quad x + y + z = N.$$

11. Utiliser l'identité

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -1$$

pour obtenir

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

si

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT.$$

12. Si  $z = \ln(x^2 + 2y^2)$  et si  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ , calculer  $dz/dt$ . Vérifier la règle de dérivation en chaîne sur cet exemple.
13. Une fonction  $f$  d'un point  $P$  du plan est proportionnelle au logarithme de sa distance à l'origine. Écrire la formule pour  $f$  puis calculer ses dérivées partielles en coordonnées cartésiennes d'abord, en coordonnées polaires ensuite. Vérifier la règle de dérivation en chaîne sur cet exemple. Vérifier que  $f$  satisfait l'équation de Laplace.
14. L'énergie interne d'un gaz parfait ( $pV = RT$ ) est  $U = (3/2)RT$  et son entropie est

$$S = \frac{3}{2}R \ln U + R \ln V.$$

Calculer les dérivées partielles suivantes :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U, \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V, \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_p \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_V.$$

15. Les coordonnées géographiques de Québec sont  $46,82^\circ N$ ,  $71,23^\circ O$ . Quelles sont ses coordonnées cartésiennes dans un repère centré au centre de la Terre ?

16. Une fonction  $f$  d'un point  $P$  dans l'espace est proportionnelle à l'inverse de sa distance à l'origine. Écrire la formule pour  $f$  puis calculer ses dérivées partielles en coordonnées cartésiennes d'abord, en coordonnées sphériques ensuite. Vérifier que  $f$  satisfait l'équation de Laplace.
17. Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_C xy \, dx + x \, dy$$

le long de la droite joignant  $(0, 0)$  à  $(1, 1)$  puis le long de la ligne brisée passant par  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  et  $(1, 1)$ .

18. Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_C x \, dx + 2y \, dy$$

le long des mêmes courbes.

19. Calculer

$$\iint_A x e^{-y} \, dx \, dy$$

si  $A$  est le rectangle décrit par  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$ .

20. Calculer la valeur moyenne de  $f(x, y) = x$  dans le triangle  $A$  de sommets  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  et  $(1, 1)$ .
21. Calculer la valeur moyenne de la température  $T$  dans une plaque circulaire  $A$  décrite par  $x^2 + y^2 < R^2$  si au point  $(x, y)$  cette température vaut

$$T(x, y) = T_0 e^{-\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

22. Calculer le volume du cône  $A$  donné par  $0 < z < R - \sqrt{x^2 + y^2}$ .
23. Calculer la masse du tétraèdre  $V$  déterminé par les inégalités  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z > 0$  et  $x + y + z < 1$  si sa densité au point  $(x, y, z)$  est  $z$ .
24. La distance moyenne  $\bar{d}$  entre le proton et l'électron de l'atome d'hydrogène est donnée par l'intégrale

$$\frac{1}{\pi a^3} \iiint_{\mathbb{R}^3} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} e^{-2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}/a} \, dx \, dy \, dz.$$

Calculer  $\bar{d}$ . (Suggestion : intégrer par parties).

## 4 Vecteurs

La physique utilise régulièrement des vecteurs pour représenter des quantités ayant à la fois une grandeur et une direction. On écrit

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$$

où

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0), \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

et l'addition et la multiplication des vecteurs par des nombres sont définies par

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_x + w_x, v_y + w_y, v_z + w_z)$$

et

$$c\mathbf{v} = (cv_x, cv_y, cv_z).$$

### 4.1 Géométrie analytique vectorielle

#### 4.1.1 Le produit scalaire

Le produit scalaire des vecteurs  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  est le nombre défini par

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z.$$

Son expression géométrique est

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \cos \theta$$

où

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2}$$

désigne la *norme* du vecteur  $\mathbf{v}$  et  $\theta$  est le petit angle formé par  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  :

$$0 \leq \theta \leq \pi.$$

(Figure 13, page 47). Les vecteurs sont dit *orthogonaux* lorsque  $\theta = \pi/2$ . Ces deux expressions pour le produit scalaire permettent de calculer facilement l'angle qu'ils forment.

Exemple. Calculons le produit scalaire des vecteurs  $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$  et  $\mathbf{w} = (4, 5, 6)$  et l'angle qu'ils forment. On a

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 4 + 10 + 18 = 32,$$

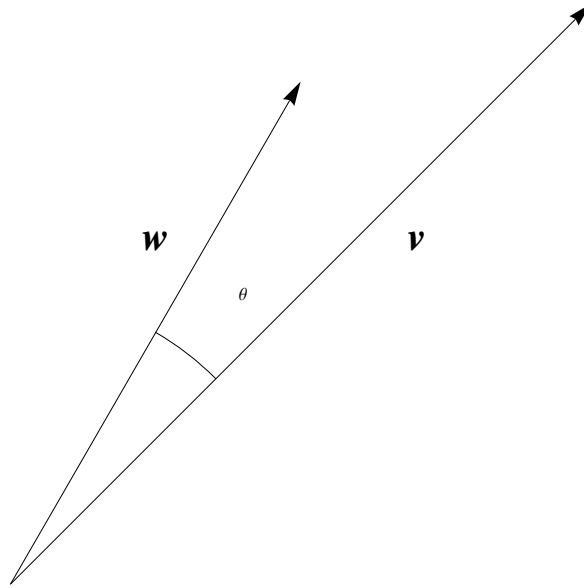


FIG. 13 – Le produit scalaire

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}, \quad \|\mathbf{w}\| = \sqrt{16 + 25 + 36} = \sqrt{77}$$

et

$$\theta = \arccos \frac{32}{\sqrt{13}\sqrt{77}} = 0,2257 \approx 13^\circ.$$

On désigne par  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  le *vecteur position* du point  $P$  de coordonnées  $(x, y, z)$ . L'équation du plan passant par le point  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  et perpendiculaire à la direction déterminée par le vecteur  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ ,

$$n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - z_0) = 0,$$

peut s'écrire simplement en utilisant le produit scalaire :

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0.$$

Exemple.

1. L'équation du plan passant par le point  $(1, 2, 3)$  et orthogonal à la direction du vecteur  $(4, 5, 6)$  est

$$(4, 5, 6) \cdot ((x, y, z) - (1, 2, 3)) = 0$$

c'est-à-dire

$$4x + 5y + 6z = 32.$$



2. Réciproquement, la direction *normale* au plan d'équation

$$ax + by + cz = d$$

est celle du vecteur  $n = (a, b, c)$  et, pour point  $\mathbf{r}_0$ , on peut choisir n'importe quel point satisfaisant l'équation, par exemple,  $\mathbf{r}_0 = (d/a, 0, 0)$  si  $a \neq 0$ .

#### 4.1.2 Le produit vectoriel

Le produit vectoriel des vecteurs  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  est le vecteur  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$  défini par

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (v_y w_z - v_z w_y)\mathbf{i} + (v_z w_x - v_x w_z)\mathbf{j} + (v_x w_y - v_y w_x)\mathbf{k}.$$

Ce vecteur  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$

1. a pour norme

$$\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \sin \theta;$$

2. est orthogonal à  $\mathbf{v}$  et à  $\mathbf{w}$ ;

3. est tel que les vecteurs  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$  soient orientés de la même façon que le sont les vecteurs  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  et  $\mathbf{k}$ . (Figure 14, page 48).

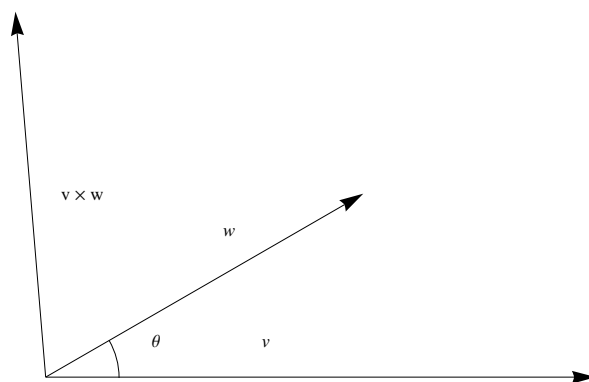


FIG. 14 – Le produit vectoriel

L'expression habituelle du produit vectoriel utilise un déterminant :

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix}$$

RAPPEL SUR LES DÉTERMINANTS

Règles de calcul.

1. Le déterminant d'une matrice carrée  $A$  d'ordre deux est :

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2. Le déterminant d'une matrice carrée  $A$  d'ordre  $n \geq 3$  se calcule par récurrence. On choisit une ligne ou une colonne et on développe suivant cette ligne ou cette colonne. Par exemple, en choisissant la ligne  $i$ , on a

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

où  $A_{ij}$  désigne la matrice carrée d'ordre  $n - 1$  obtenue de  $A$  en y enlevant la ligne  $i$  et la colonne  $j$ .

Propriétés.

1. Si l'on permute deux lignes ou deux colonnes d'une matrice carrée, l'on change le signe de son déterminant. En particulier, si deux lignes ou deux colonnes sont identiques, le déterminant est nul.
2. Le déterminant d'une matrice triangulaire (c'est à dire telle que  $a_{ij} = 0$  pour tout  $i > j$  ou telle que  $a_{ij} = 0$  pour tout  $i < j$ ) est égal au produit des entrées diagonales  $a_{ii}$ . En particulier, le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit de ses entrées.
3. Le déterminant de la matrice transposée  $A^T$  de  $A$ , c'est-à-dire de la matrice dont les lignes sont les colonnes de  $A$ , est égal à celui de  $A$ .

Exemples.

1. On a

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + 3 \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = 0$$

2. En développant suivant la deuxième ligne,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = -4 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} + 3 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} = 19$$

3. Développant suivant la première colonne,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = 5 \det \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = 400.$$


---

Exemple. Calculons le produit vectoriel des vecteurs  $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$  et  $\mathbf{w} = (4, 5, 6)$ . On a

$$(1, 2, 3) \times (4, 5, 6) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$$

On a bien

$$\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \sqrt{9 + 36 + 9} = \sqrt{14}\sqrt{77} \sin 0,2257 = 7,348.$$

L'équation du plan passant par trois points  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  et  $\mathbf{r}_3$  peut s'écrire simplement en utilisant le produit vectoriel :

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = 0.$$

Exemple. L'équation du plan passant par  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 2, 3)$  et  $(4, 5, 6)$  est

$$(1, 2, 3) \times (4, 5, 6) \cdot (x, y, z) = 0$$

c'est-à-dire

$$x - 2y + z = 0.$$

L'aire d'un parallélogramme de côtés  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  est  $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$  et le volume d'un parallélépipède d'arêtes  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  est  $|\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}|$ .

Exemple. L'aire du triangle de côtés  $(1, 2, 3)$  et  $(4, 5, 6)$  est

$$\frac{1}{2} \|(1, 2, 3) \times (4, 5, 6)\| = \frac{\sqrt{54}}{2}.$$

Le volume du parallélépipède d'arêtes  $(1, 0, 0)$ ,  $(1, 2, 3)$  et  $(4, 5, 6)$  est

$$|(1, 2, 3) \times (4, 5, 6) \cdot (1, 0, 0)| = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \right| = 3.$$

## 4.2 Calcul vectoriel

### 4.2.1 Mécanique newtonienne

En mécanique newtonienne, la position  $\mathbf{r}(t)$ , la vitesse  $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}(t)/dt$  et l'accélération  $\mathbf{a}(t) = d\mathbf{v}(t)/dt$  d'une particule de masse  $m$  sont des quantités vectorielles soumises à la loi de Newton

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

Exemple. Pour une particule se déplaçant le long d'une hélice circulaire de rayon 2 et de pas 7, on a

$$\mathbf{r} = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} + 7t \mathbf{k},$$

$$\mathbf{v} = -2 \sin t \mathbf{i} + 2 \cos t \mathbf{j} + 7 \mathbf{k}$$

et

$$\mathbf{a} = -2 \cos t \mathbf{i} - 2 \sin t \mathbf{j}.$$

La particule subit une force centripète

$$\mathbf{F} = -2m(\cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j})$$

sans aucune composante verticale.

### 4.2.2 Gradient d'un champ scalaire

En physique, une fonction d'un point de l'espace  $\mathbb{R}^3$  s'appelle un *champ* ; il peut être scalaire ou vectoriel. Pour l'étudier, on emploie le « vecteur-opérateur » (lire nabla) :

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Le gradient d'un champ scalaire  $f(x, y, z)$  est ainsi défini par

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

C'est un champ vectoriel qui mesure la variation de  $f$  dans l'espace. Sa direction en un point est toujours celle de variation maximale du champ  $f$  en ce point. En général, si  $\mathbf{u}$  est un vecteur unitaire ( $\|\mathbf{u}\| = 1$ ), la variation de  $f$  dans la direction de  $\mathbf{u}$  est  $\nabla f \cdot \mathbf{u}$ .

Exemples.

1. Pour le champ de température

$$T = T_0 - \left( x^2 + y^2 + \frac{1}{3}z^2 \right),$$

on a

$$\nabla T = \left( -2x, -2y, -\frac{2}{3}z \right).$$

La variation maximale de température au point  $(1, 1, 1)$  s'effectue dans la direction du vecteur  $\nabla T(1, 1, 1) = (-2, -2, -2/3)$ . Sa variation au point  $(1, 1, 1)$  dans la direction du vecteur  $(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{6}$  est  $-14/3\sqrt{6}$ .

2. La concentration d'une substance dans un cylindre de rayon  $R$ ,  $x^2 + y^2 < R^2$ , et de hauteur  $H$ ,  $0 < z < H$ , étant donnée par

$$\rho = \rho_0(R^2 - x^2 - y^2)e^{-z},$$

son gradient est

$$\nabla \rho = (-2x\rho_0e^{-z}, -2y\rho_0e^{-z}, -\rho_0(R^2 - x^2 - y^2)e^{-z}).$$

Au point  $(0, 0, 0)$ , la concentration est maximale,  $\rho(0, 0, 0) = \rho_0R^2$ , et elle varie le plus rapidement dans la direction de  $\nabla \rho(0, 0, 0) = (0, 0, -\rho_0R^2)$ , c'est-à-dire, verticalement.

### 4.2.3 Divergence d'un champ vectoriel

La divergence d'un champ vectoriel  $\mathbf{F}(x, y, z)$  est une mesure de sa dispersion autour du point où elle est calculée. C'est un champ scalaire défini par

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Exemples.

1. Le champ électrostatique créé par une charge électrique unité au repos à l'origine est

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} = -\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Sa divergence est nulle :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0.$$

2. Pour le champ

$$\mathbf{F} = (xy, yz, zx),$$

on a

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = x + y + z.$$

#### 4.2.4 Rotationnel d'un champ vectoriel

Le rotationnel d'un champ vectoriel  $\mathbf{F}(x, y, z)$  est une mesure de sa rotation sur lui-même. C'est un champ vectoriel défini par

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix}.$$

Exemples.

1. Pour le champ électrostatique  $\mathbf{E}$ , le rotationnel est nul :

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}.$$

2. Pour le champ

$$\mathbf{F} = (xy, yz, zx),$$

on a

$$\nabla \times \mathbf{F} = (-y, -z, -x).$$

#### 4.2.5 Travail

Le travail effectué par un champ de forces  $\mathbf{F}$  (tel un champ électrique ou gravitationnel) lors d'un déplacement d'un point  $A$  à un point  $B$  le long d'un chemin  $C$ , est, par définition, donné par une intégrale curviligne dans l'espace :

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Une telle intégrale s'évalue comme une intégrale curviligne plane, en paramétrant la courbe  $C$  :

$$\begin{aligned} & \int_C F_x dx + F_y dy + F_z dz \\ &= \int_a^b \left( F_x(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} + F_y(x(t), y(t), z(t)) \frac{dy}{dt} + F_z(x(t), y(t), z(t)) \frac{dz}{dt} \right) dt. \end{aligned}$$

Dans le cas très important où le champ est *conservatif*, c'est-à-dire où il existe une fonction *énergie potentielle*  $V$  telle que

$$\mathbf{F} = -\nabla V,$$

ce travail est indépendant du chemin  $C$  effectivement suivi pour joindre les points  $A$  et  $B$  et est égal au changement d'énergie potentielle entre ces points :

$$W = - \int_A^B \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = - \int_A^B dV = V(A) - V(B).$$

Exemple. Le champ électrostatique  $\mathbf{E}$  est conservatif et

$$V = \frac{1}{\|\mathbf{r}\|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

comme on le vérifie facilement. Par suite,

$$W = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} - \frac{1}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}.$$

### 4.3 Exercices

1. Écrire l'équation du plan passant par le point  $(1, 2, -2)$  et orthogonal au vecteur  $(1, -2, -3)$ .
2. Calculer l'angle formé par les plans d'équation  $x + y - z = 0$  et  $7x + y + 2z = 6$ .
3. Écrire l'équation du plan passant par les points  $(1, 2, -2)$ ,  $(0, -1, 5)$  et  $(1, 1, 0)$ .
4. Calculer le volume du parallélépipède d'arêtes  $(1, 2, -2)$ ,  $(0, -1, 5)$  et  $(1, 1, 0)$ .
5. Le vecteur position d'un corps de masse unité est

$$\mathbf{r} = e^{-t} \cos t \mathbf{i} + e^{-t} \sin t \mathbf{j} + \frac{1}{1+t} \mathbf{k}.$$

Calculer la force qu'il subit.

6. La densité d'un fluide dans un cylindre vertical de rayon  $R$  et de hauteur  $H$  est

$$f(x, y, z) = R^2 - (x^2 + y^2)e^{-z}.$$

Calculer son gradient  $\nabla f$ . Déterminer la direction dans laquelle la densité varie le plus rapidement au point  $(R/2, 0, H/2)$ . Calculer son taux de variation au point  $(R/2, R/2, H/2)$  dans la direction du vecteur  $(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{3}$ .

7. La vitesse d'écoulement d'un fluide est

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (x^2 - y^2)\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xy^2z\mathbf{k}.$$

Calculer sa divergence et son rotationnel.

8. Soit le champ de forces

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Calculer le travail effectué lorsque l'on se déplace du point  $(0, 0, 0)$  au point  $(1, 1, 1)$  le long de la droite unissant ces deux points. Vérifier que le champ est conservatif et que le potentiel est

$$V(x, y, z) = x^2 - y^2 + z.$$

Calculer le travail effectué lorsque l'on se déplace du point  $(0, 0, 0)$  au point  $(1, 1, 1)$  le long de la courbe paramétrée par

$$x = \frac{2t}{1+t}, \quad y = t \cos 2\pi t, \quad z = t \quad \text{avec } 0 < t < 1.$$



## 5 Équations différentielles ordinaires

Une équation différentielle ordinaire est une équation faisant intervenir une fonction inconnue d'une variable  $x(t)$  et certaines de ses dérivées ; il s'agit de déterminer la fonction à partir de l'équation et d'une ou plusieurs conditions supplémentaires. De nombreux problèmes physiques sont modélisés par des équation différentielles.

### 5.1 Équations du premier ordre

Une telle équation ne fait apparaître que la première dérivée  $x'(t)$  de la fonction inconnue  $x(t)$ . Une *condition initiale*  $x(0) = x_0$  suffit pour déterminer uniquement la solution.

#### 5.1.1 Équations séparables

Lorsque l'équation est de la forme

$$\frac{dx}{dt} = f(x)g(t),$$

on peut séparer la variable  $t$  de la fonction  $x$  et intégrer :

$$\int_{x_0}^x \frac{dy}{f(y)} = \int_0^t g(s) ds.$$

Exemples.

1. La solution du problème

$$\frac{dx}{dt} = rx, \quad x(0) = x_0 \quad (r > 0)$$

est

$$x = x_0 e^{rt}.$$

2. La solution du problème

$$\frac{dx}{dt} = -kx, \quad x(0) = x_0 \quad (k > 0)$$

est

$$x = x_0 e^{-kt}.$$

### 3. La solution du problème

$$\frac{dx}{dt} = -tx, \quad x(0) = x_0$$

est

$$x = x_0 e^{-t^2/2}.$$

(Figure 15, page 57).

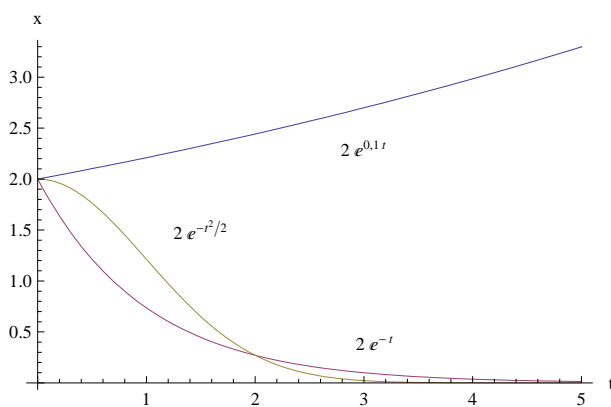


FIG. 15 – Équations séparables

On rencontre des équations différentielles de ce type en stœchiométrie.

1. Un réactif  $A \rightarrow$  produits (réaction d'ordre un).

Désignons par  $[A]$  la concentration du produit  $A$  en fonction du temps.

Alors

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A]$$

et

$$[A] = [A]_0 e^{-kt}.$$

2. Un réactif  $A \rightarrow$  produits (réaction d'ordre 2). On a maintenant

$$\frac{1}{2} \frac{d[A]}{dt} = -k[A]^2$$

et

$$[A] = \frac{[A]_0}{1 + 2kt[A]_0}.$$

3. Deux réactifs  $A + B \rightarrow$  produits (réaction d'ordre 2). On a deux équations

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A][B] \quad \text{et} \quad \frac{d[B]}{dt} = -k[A][B].$$

En posant  $a = [A]_0$ ,  $b = [B]_0$ ,  $x = a - [A]$  et  $y = b - [B]$ , elles deviennent

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-y), \quad x(0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dt} = k(a-x)(b-y), \quad y(0) = 0.$$

Autrement dit,  $x = y$  et

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x), \quad x(0) = 0.$$

En séparant les variables, on trouve, dans le cas où  $a = b$ ,

$$[A] = \frac{[A]_0}{1 + kt[A]_0}$$

et dans le cas où  $a \neq b$ , en décomposant en fractions partielles,

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)} = \frac{1}{b-a} \left( \frac{1}{a-x} - \frac{1}{b-x} \right),$$

on obtient

$$\ln \frac{[B]}{[A]} - \ln \frac{[B]_0}{[A]_0} = ([B]_0 - [A]_0)kt.$$

### 5.1.2 L'équation linéaire d'ordre un

On considère

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = r(t)$$

où  $p(t)$  et  $r(t)$  sont des fonctions données. On pose

$$P(t) = \int p(t) dt.$$

Alors l'équation précédente est équivalente à l'équation

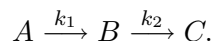
$$\frac{d}{dt} (xe^{P(t)}) = r(t)e^{P(t)}$$

et sa *solution générale* est

$$x = \left( \int r(t)e^{P(t)} dt + C \right) e^{-P(t)}$$

où  $C$  est une constante.

Exemple. On considère la réaction chimique



Elle se traduit par les équations

$$\frac{d[A]}{dt} = -k_1[A], \quad \frac{d[B]}{dt} = k_1[A] - k_2[B], \quad \frac{d[C]}{dt} = k_2[B]$$

sous les conditions initiales  $[B]_0 = [C]_0 = 0$ . La première est séparable et admet pour solution

$$[A] = [A]_0 e^{-k_1 t},$$

la deuxième, une fois  $[A]$  remplacée par l'expression précédente, est linéaire et admet pour solution

$$[B] = \begin{cases} \frac{k_1[A]_0}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) & \text{si } k_1 \neq k_2 \\ k_1[A]_0 t e^{-k_2 t} & \text{si } k_1 = k_2. \end{cases}$$

Quant à  $[C]$ , on l'obtient de

$$[A] + [B] + [C] = [A]_0.$$

(Figures (16, 17, 18) pages (59, 60, 60)).

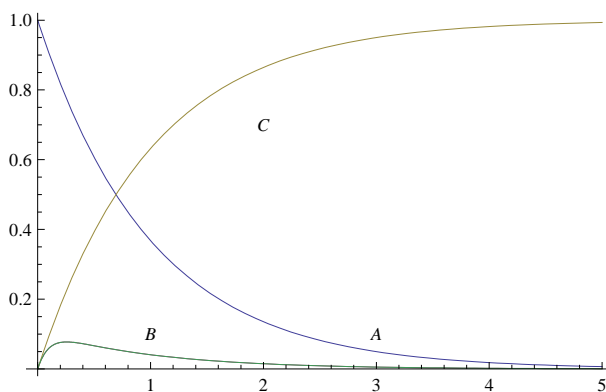


FIG. 16 – Réactifs,  $k_1 < k_2$

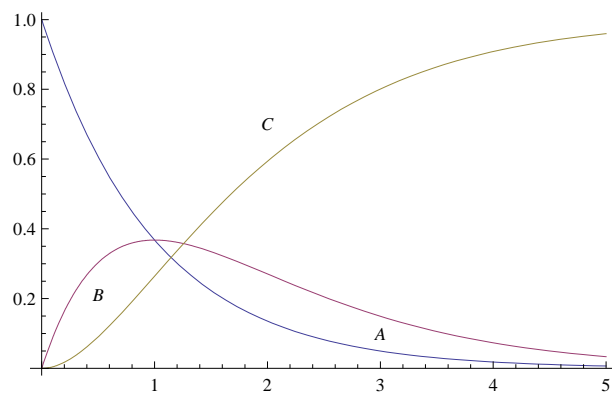


FIG. 17 – Réactifs,  $k_1 = k_2$

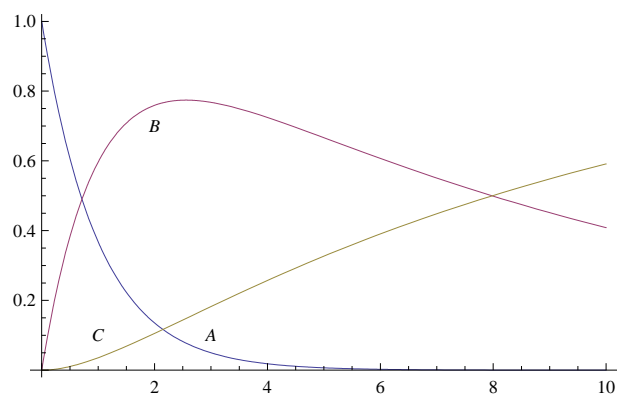


FIG. 18 – Réactifs,  $k_1 > k_2$

## 5.2 Équations du second ordre

### 5.2.1 L'équation linéaire d'ordre deux

L'équation linéaire homogène d'ordre deux est

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes. Parce qu'elle est d'ordre deux, sa solution générale contient deux constantes et parce qu'elle est linéaire, toute combinaison linéaire  $c_1y_1 + c_2y_2$  de solutions  $y_1$  et  $y_2$  est une solution. En cherchant une solution de la forme  $y = e^{\lambda x}$ , on voit que le paramètre  $\lambda$  doit satisfaire l'équation algébrique

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

c'est-à-dire que

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Trois cas sont possibles.

1.  $a^2 - 4b > 0$ . Alors on a deux racines réelles distinctes

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

et la solution générale de l'équation différentielle est

$$y = c_1e^{\lambda_1x} + c_2e^{\lambda_2x}.$$

Exemple. La solution générale de l'équation différentielle

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

est

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^x.$$

Si  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 0$ , elle devient

$$y = -e^{2x} + 2e^x.$$

2.  $a^2 - 4b = 0$ . Alors on a une racine réelle double

$$\lambda_0 = -\frac{a}{2}$$

et la solution générale de l'équation différentielle est

$$y = (c_1 + c_2x)e^{\lambda_0x}.$$

3.  $a^2 - 4b < 0$ . Alors on a deux racines complexes conjuguées

$$\lambda = \frac{-a \pm i\sqrt{4b - a^2}}{2}.$$

En posant

$$\omega = \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}$$

et en utilisant la formule d'Euler, la solution générale de l'équation différentielle peut s'écrire comme

$$y = e^{-\frac{a}{2}x} (c_1 e^{i\omega x} + c_2 e^{-i\omega x})$$

ou comme

$$y = e^{-\frac{a}{2}x} (k_1 \cos \omega x + k_2 \sin \omega x).$$

Exemple. La solution générale de l'équation différentielle

$$y'' + y' + y = 0$$

peut se mettre sous la forme

$$y = e^{-x/2} (c_1 e^{i\sqrt{3}x/2} + c_2 e^{-i\sqrt{3}x/2})$$

ou sous la forme

$$y = e^{-x/2} \left( k_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + k_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right).$$

Si  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 1$ , elle devient

$$y = e^{-x/2} \left( -\frac{i}{\sqrt{3}} e^{i\sqrt{3}x/2} + \frac{i}{\sqrt{3}} e^{-i\sqrt{3}x/2} \right)$$

ou encore

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-x/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Les équations d'ordre deux interviennent en physique à cause de la deuxième loi de Newton,  $F = ma$ .

Exemple. L'oscillateur harmonique.

Une particule de masse  $m$  soumise à une force de rappel  $F = -kx$  obéit à l'équation différentielle

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0.$$

dont la solution générale est

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$$

si l'on pose

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Sous les conditions initiales

$$x(0) = A \text{ et } x'(0) = 0,$$

on trouve

$$x = A \cos \omega t.$$

La période des oscillations est  $2\pi/\omega$  et leur fréquence est  $\omega/2\pi$ . Comme la force  $F$  dérive d'un potentiel

$$V = \frac{1}{2}kx^2,$$

l'énergie totale  $E$  du système est constante. Son énergie cinétique est

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2 \omega t$$

et son énergie potentielle

$$V = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2 \omega t$$

de telle sorte que

$$E = T + V = \frac{1}{2}kA^2.$$

(Figure 19, page 64).

Exemple. L'équation de Schrödinger en une dimension.  
Soit à résoudre l'équation

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} = E\Psi$$

sous les *conditions aux limites*

$$\Psi(0) = \Psi(l) = 0$$



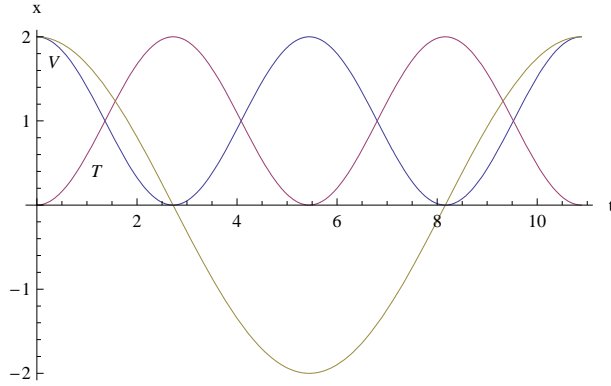


FIG. 19 – L'oscillateur harmonique

( $\hbar$  est une constante,  $m$  est donnée mais  $E$  est inconnue à priori). Écrivant  $\omega = \sqrt{2mE}/\hbar$ , la solution générale de

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \omega^2\Psi = 0$$

est

$$\Psi = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x.$$

Pour satisfaire les conditions aux bords, il faut que

$$\omega = \frac{n\pi}{l} \text{ avec } n = 1, 2, 3, \dots$$

La solution est alors

$$\Psi_n = C_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

et le niveau d'énergie possible correspondant est

$$E_n = \frac{n^2 \hbar^2}{8ml^2}$$

où  $h = 2\pi\hbar$ .

### 5.2.2 Fonctions spéciales

Pour résoudre une équation à coefficients non constants,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y = 0,$$

la méthode de base consiste à la chercher sous la forme d'une série généralisée

$$y = x^r \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

et à déterminer les coefficients inconnus  $a_k$  en utilisant l'équation. C'est ainsi que l'on obtient de nouvelles fonctions, les *fonctions spéciales de la physique mathématique*. Leurs propriétés sont bien connues des mathématiciens.

1. Les polynômes de Legendre sont des solutions  $y = P_l(x)$  de l'équation

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + l(l + 1)y = 0.$$

Les premiers sont

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \dots$$

2. Les polynômes d'Hermite sont des solutions  $y = H_n(x)$  de l'équation

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

Les premiers sont

$$H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2, \dots$$

3. Les polynômes de Laguerre sont des solutions  $y = L_n(x)$  de l'équation

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0.$$

Les premiers sont

$$L_0(x) = 1, L_1(x) = 1 - x, L_2(x) = x^2 - 4x + 2, \dots$$

4. Les fonctions de Bessel sont des solutions  $y = J_n(x)$  de l'équation

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

( $n$  n'est pas nécessairement un entier). On a par exemple

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

et

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2 2^k} x^k.$$

Exemples.

1. On sait que la solution générale de  $y' + y = 0$  est  $y = Ce^{-x}$ . Avec la méthode des séries, on pose

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

donc

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots$$

de telle sorte que l'on veut avoir

$$(a_0 + a_1) + (a_1 + 2a_2)x + (a_2 + 3a_3)x^2 + \dots = 0$$

pour tout  $x$ . Égalant à 0 les coefficients de chacune des puissances de  $x$ , on trouve

$$a_0 + a_1 = a_1 + 2a_2 = a_2 + 3a_3 = \dots = 0$$

ce qui conduit à

$$a_k = -\frac{1}{k}a_{k-1} = \frac{1}{k(k-1)}a_{k-2} = \dots = \frac{(-1)^k}{k!}a_0.$$

Donc

$$y = a_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k = a_0 e^{-x}$$

comme de bien entendu.

2. Pour résoudre l'équation d'Airy,

$$y'' - xy = 0,$$

on pose

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

Après substitution dans l'équation, on obtient les relations

$$\begin{aligned} a_2 &= 0, \\ a_3 &= \frac{a_0}{3 \cdot 2}, \\ a_4 &= \frac{a_1}{4 \cdot 3}, \\ a_5 &= \frac{a_2}{5 \cdot 4} = 0, \\ a_6 &= \frac{a_3}{6 \cdot 5} = \frac{a_0}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}, \\ a_7 &= \frac{a_4}{7 \cdot 6} = \frac{a_1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}, \\ a_8 &= \frac{a_5}{8 \cdot 7} = 0, \dots \end{aligned}$$

de telle sorte que la solution est

$$y = a_0 \left( 1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \dots \right) + a_1 \left( x + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \right).$$

### 5.3 Exercices

1. Obtenir la solution des chacune des équation différentielles suivantes sous la condition initiale  $x(0) = x_0$  :

$$\frac{dx}{dt} = x^2 t^2, \quad (1 + t^2)x \frac{dx}{dt} = t.$$

2. Obtenir la solution des chacune des équation différentielles suivantes sous la condition initiale  $x(0) = x_0$  :

$$\frac{dx}{dt} - x = -e^t, \quad \frac{dx}{dt} + x = t.$$

3. Une substance radioactive se décompose suivant l'équation différentielle

$$\frac{dQ}{dT} = -kQ$$

où  $Q$  est la quantité de cette matière restante à l'instant  $t$ . Sachant qu'une masse de radium met 1 600 ans à diminuer de moitié, déterminer la constante  $k$  pour le radium puis calculer le pourcentage d'une masse donnée de radium subsistant après 100 ans.

4. La loi de refroidissement de Newton exprime qu'en certaines circonstances, un corps à la température  $T$  et plongé dans un milieu à la température  $S$  ( $S < T$ ) se refroidira de telle sorte que la vitesse de refroidissement sera proportionnelle à la différence de température  $T - S$  entre le corps et le milieu ambiant. Poser puis résoudre (en termes de  $T_0 = T(0)$ ) l'équation différentielle appropriée. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} T(t)$$

pour la solution obtenue.

5. Vérifier que la solution du problème

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x), \quad x(0) = 0$$

est

$$x = \frac{ka^2t}{1 + kat}$$

si  $a = b$  et

$$x = ab \frac{1 - e^{k(a-b)t}}{b - ae^{k(a-b)t}}$$

si  $a \neq b$ . Calculer

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$$

dans les deux cas.

6. Résoudre l'équation de l'oscillateur harmonique lorsqu'un petit amortissement proportionnel à la vitesse est présent, c'est-à-dire résoudre l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + kx = 0, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = 0$$

avec  $\mu < 2\sqrt{k}$ .

7. Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

par la méthode des séries entières, en posant

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

## 6 Équations aux dérivées partielles

Une équation aux dérivées partielles est une équation faisant intervenir une fonction inconnue de plusieurs variables et certaines de ses dérivées partielles ; il s'agit de déterminer la fonction à partir de l'équation et d'une ou plusieurs conditions supplémentaires. La méthode de résolution de base est celle de la séparation des variables couplée à la représentation des fonctions par des séries de Fourier.

### 6.1 Séparation des variables

La méthode consiste par exemple à chercher une fonction de deux variables  $f(x, y)$  en la supposant de la forme  $f(x, y) = X(x)Y(y)$ .

Exemple. Soit à résoudre l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x} + 7\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

On suppose que  $f(x, y) = X(x)Y(y)$ . Alors, on veut que

$$X'(x)Y(y) + 7X(x)Y'(y) = 0$$

c'est-à-dire

$$\frac{X'}{X} = -7\frac{Y'}{Y}.$$

Puisque le membre de gauche ne dépend que de  $x$  et que le membre de droite ne dépend que de  $y$ , ils doivent être tous les deux égaux à une même constante  $C$ . On obtient ainsi deux équations différentielles ordinaires découplées

$$X' = CX \quad \text{et} \quad Y' = -\frac{C}{7}Y$$

dont les solutions respectives sont

$$X = X_0 e^{Cx}$$

et

$$Y = Y_0 e^{-C/7 y}.$$

Une solution de l'équation originale est donc

$$f(x, y) = Ae^{C(x-y/7)}.$$

Il est facile maintenant de vérifier que toute fonction de la forme

$$f(x, y) = F(x - y/7)$$

est une solution.

L'équation de Schrödinger en deux dimensions.

Soit à résoudre l'équation

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) = E\Psi$$

sous les conditions aux limites

$$\Psi(0, y) = \Psi(a, y) = \Psi(x, 0) = \Psi(x, b) = 0.$$

Posant  $\Psi = XY$  on trouve

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\frac{2mE}{\hbar^2}.$$

D'où

$$\frac{X''}{X} = -\omega_x^2, \quad \frac{Y''}{Y} = -\omega_y^2 \quad \text{avec} \quad \omega_x^2 + \omega_y^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}.$$

Pour

$$X'' + \omega_x^2 X = 0, \quad X(0) = X(a) = 0,$$

on a

$$X_p = \sin p \frac{\pi}{a} x \quad \text{avec} \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

et pour

$$Y'' + \omega_y^2 Y = 0, \quad Y(0) = Y(b) = 0,$$

on a

$$Y_q = \sin q \frac{\pi}{b} y \quad \text{avec} \quad q = 1, 2, 3, \dots$$

Une solution, pour chaque paire  $(p, q)$  est donc

$$\Psi_{p,q} = \sin p \frac{\pi}{a} x \quad \sin q \frac{\pi}{b} y.$$

L'énergie correspondante est

$$E_{p,q} = \frac{\hbar^2}{8m} \left( \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} \right).$$

La corde vibrante.

Une corde liée en ses deux extrémités se met à vibrer lorsque légèrement déplacée de sa position d'équilibre. Si  $y(x, t)$  désigne son écart avec l'horizontale au point  $x$  et à l'instant  $t$ , on a

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \text{ avec } y(0, t) = y(l, t) = 0$$

où

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \rho \text{ étant sa densité linéaire et } T, \text{ sa tension.}$$

Posant

$$y = X(x)T(t),$$

on obtient

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{v^2} \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2$$

(une constante positive conduit à des écarts infinis). Donc

$$X'' + \lambda^2 X = 0, X(0) = X(l) = 0$$

et

$$\lambda = \frac{k\pi}{l} \text{ pour } k = 1, 2, 3, \dots$$

puis

$$X_k = \sin k \frac{\pi}{l} x.$$

Ensuite

$$T'' + v^2 \frac{k^2 \pi^2}{l^2} T = 0$$

donc

$$T_k = a_k \cos k \frac{\pi v}{l} t + b_k \sin k \frac{\pi v}{l} t.$$

Finalement,

$$y_k = \sin k \frac{\pi}{l} x \left( a_k \cos k \frac{\pi v}{l} t + b_k \sin k \frac{\pi v}{l} t \right).$$

Puisque l'équation est linéaire, on peut additionner ces solutions et obtenir une solution plus générale :

$$y = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin k \frac{\pi}{l} x \left( a_k \cos k \frac{\pi v}{l} t + b_k \sin k \frac{\pi v}{l} t \right).$$



Pour obtenir une solution explicite, il faut connaître le déplacement initial de la corde et la vitesse qui lui est impartie. Ces données détermineront les coefficients inconnus via

$$y(x, 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin k \frac{\pi}{l} x$$

et

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k k \frac{\pi v}{l} \sin k \frac{\pi}{l} x.$$

## 6.2 Séries de Fourier

Donnée une fonction  $f(x)$  sur l'intervalle  $-\pi < x < \pi$ , il est possible de la représenter par une série de fonctions trigonométriques

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Il faut pour cela calculer les coefficients avec les formules de Fourier :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx dx.$$

Lorsque la fonction est paire ( $f(-x) = f(x)$ ), il n'y a que des termes en cosinus et lorsqu'elle est impaire ( $f(-x) = -f(x)$ ), il n'y a que des termes en sinus. En effet,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} I(x) dx = 0 \quad \text{si } I \text{ est impaire.}$$

Donnée une fonction sur l'intervalle  $(0, \pi)$ , on peut toujours la représenter comme une série de sinus ou une série de cosinus, au choix, en la considérant comme la moitié d'une fonction impaire ou paire définie sur  $(-\pi, \pi)$ .

Le développement de Fourier repose sur les propriétés d'orthogonalité des fonctions trigonométriques :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \cos nx dx = 0 \quad \text{si } k \neq n,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \sin nx \, dx = 0 \quad \text{si } k \neq n,$$

et

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \sin mx \, dx = 0.$$

Exemples.

1. Soit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \pi \\ -1 & \text{si } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Cette fonction étant impaire, son développement de Fourier ne contiendra que des termes en sinus. On aura

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{1}{\pi} \left( - \int_{-\pi}^0 \sin kx \, dx + \int_0^{\pi} \sin kx \, dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi k} (1 - (-1)^k) = \begin{cases} \frac{4}{\pi k} & \text{si } k \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases} \end{aligned}$$

D'où

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left( \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right).$$

2. Soit

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < \pi \\ -x & \text{si } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Cette fonction étant paire, son développement de Fourier ne contiendra que des termes en cosinus. On aura

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{2\pi} \left( - \int_{-\pi}^0 x \, dx + \int_0^{\pi} x \, dx \right) = \frac{\pi}{2}$$

(la valeur moyenne de la fonction) et

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \left( - \int_{-\pi}^0 x \cos kx \, dx + \int_0^{\pi} x \cos kx \, dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi k^2} ((-1)^k - 1) = \begin{cases} -\frac{4}{\pi k^2} & \text{si } k \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases} \end{aligned}$$

D'où

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \dots \right).$$

3. Soit à développer en une série de sinus la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{2}{\pi}(\pi - x) & \text{si } \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

En considérant que cette fonction est la moitié d'une fonction impaire et en utilisant le fait que pour toute fonction paire  $P$ , on a

$$\int_{-\pi}^{+\pi} P(x) dx = 2 \int_0^{\pi} P(x) dx,$$

on calcule les coefficients de Fourier de la fonction donnée au moyen de la formule

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx.$$

Donc, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \left( \int_0^{\pi/2} \frac{2}{\pi} x \sin kx dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{2}{\pi} (\pi - x) \sin kx dx \right) \\ &= \frac{8}{\pi^2 k^2} \sin k \frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ \frac{8}{\pi^2 k^2} (-1)^{(k-1)/2} & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2} \left( \sin x - \frac{\sin 3x}{9} + \frac{\sin 5x}{25} - \dots \right).$$

(Figure 20, page 75).

### 6.3 Exercices

1. Obtenir une solution de l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Quelle serait la forme générale de la solution ?

2. Obtenir une solution de l'équation

$$r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = 0$$

(elle est en coordonnées polaires, poser  $f = R\Theta$ ).

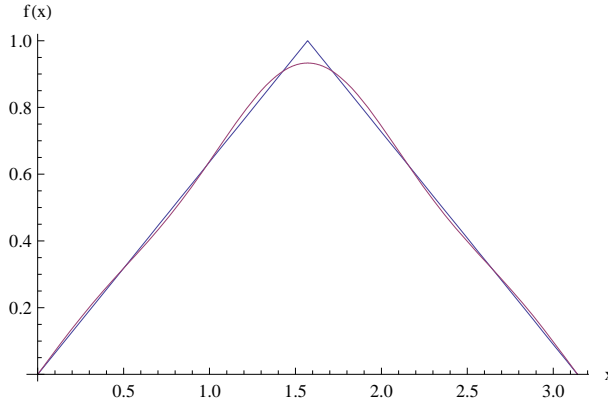


FIG. 20 – Approximation de Fourier

3. Résoudre l'équation de Schrödinger en trois dimensions,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) = E\Psi.$$

sous les conditions aux limites

$$\begin{aligned} \Psi(0, y, z) &= \Psi(a, y, z) = \Psi(x, 0, z) = \Psi(x, b, z) \\ &= \Psi(x, y, 0) = \Psi(x, y, c) = 0. \end{aligned}$$

4. On considère la fonction  $f(x) = 1$  pour  $0 < x < \pi$ . En la considérant comme la moitié droite d'une fonction impaire définie sur l'intervalle  $(-\pi, \pi)$ , calculer sa série de Fourier. Même question en la considérant comme la moitié droite d'une fonction paire.
5. Calculer la série de Fourier de la fonction  $f(x) = x$  pour  $-\pi < x < \pi$ .
6. Calculer la série de Fourier de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ x & \text{si } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

7. Calculer la solution de l'équation de la corde vibrante lorsque sa longueur  $l = \pi$ , que sa vitesse initiale  $\frac{\partial y}{\partial t}$  est nulle et que son déplacement initial  $y$  est donné par

$$y(x, 0) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{2}{\pi}(\pi - x) & \text{si } \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

## 7 Algèbre linéaire

### 7.1 Matrices

La multiplication par un nombre et l'addition de deux matrices de mêmes dimensions  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{ij})$  se font entrée par entrée :

$$cA = (ca_{ij}) \quad \text{et} \quad A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Pour multiplier la matrice  $A$  par la matrice  $B$ , il faut que le nombre de colonnes de  $A$  soit égal au nombre de lignes de  $B$ . Si  $A$  est une matrice  $m \times n$  et  $B$  est une matrice  $n \times p$ ,  $AB$  est une matrice  $m \times p$  dont l'entrée  $c_{ij}$  à la ligne  $i$  et la colonne  $j$  est donnée par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Il est remarquable que ce produit n'est pas commutatif : si  $A$  et  $B$  sont deux matrices carrées de même dimension, leur *commutateur*

$$[A, B] = AB - BA$$

n'est pas nécessairement la matrice nulle  $O$  dont toutes les entrées sont égales à 0.

Exemple. Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

on a

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

mais

$$BA = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Le commutateur de ces deux matrices est

$$[AB - BA] = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Le produit matriciel de matrices carrées admet cependant un élément neutre, la matrice identité  $I$ , matrice diagonale dont toutes les entrées diagonales sont égales à 1 : pour toute matrice carrée  $A$ , on a

$$AI = IA = A.$$

Une matrice carrée est dite *inversible* si elle admet une matrice inverse  $A^{-1}$  telle que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

La condition nécessaire et suffisante pour cela est que son déterminant  $\det(A)$  soit différent de 0. Écrivant alors  $A^{-1} = (d_{ij})$ , on a

$$d_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det(A_{ji})}{\det(A)}$$

où  $A_{ji}$  est la matrice carrée d'ordre  $n - 1$  obtenue de  $A$  en y enlevant la ligne  $j$  et la colonne  $i$ . Si  $A$  est inversible et

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

l'équation matricielle

$$Ax = b$$

admet alors une solution unique

$$x = A^{-1}b.$$

#### RAPPEL SUR LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

Un système de  $m$  équations linéaires en  $n$  inconnues,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

peut admettre une solution unique, une infinité de solutions ou aucune solution. Lorsque  $m = n$  et que la matrice  $A$  des coefficients est inversible, la solution est unique et peut s'écrire à l'aide de la règle de Cramer :

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, \quad 1 \leq j \leq n$$

où  $A_j$  désigne la matrice obtenue de la matrice  $A$  en y remplaçant la colonne  $j$  par  $b$ . Si  $A$  n'est pas inversible, le système peut admettre une infinité de solutions ou aucune, dépendant de  $b$  (il y en a toujours une infinité si  $b = 0$ ).

Exemples.

1. La matrice des coefficients du système

$$\begin{aligned} x - y + 2t &= 1 \\ 4z + 3t &= 0 \\ x + 2y + t &= 0 \\ 4x - 2y - z + 5t &= 0 \end{aligned}$$

est inversible car  $\det(A) = 19$ . On peut donc calculer son unique solution avec la règle de Cramer :

$$x = -\frac{54}{19}, \quad y = \frac{7}{19}, \quad z = -\frac{30}{19}, \quad t = \frac{40}{19}.$$

2. La matrice des coefficients du système

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= \alpha \\ 4x + 5y + 6z &= \beta \\ 7x + 8y + 9z &= \gamma \end{aligned}$$

n'est pas inversible. Ce système étant équivalent à

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= \alpha \\ -3y - 6z &= \beta - 4\alpha \\ -6y - 12z &= \gamma - 7\alpha \end{aligned}$$

il admet une solution si et seulement si

$$-\alpha + 2\beta - \gamma = 0.$$

On a alors

$$\begin{aligned}x &= z - \frac{5}{3}\alpha - \frac{2}{3}\beta \\y &= -2z + \frac{4}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta\end{aligned}$$

où  $z$  est arbitraire.

3. Lorsque  $n = 2$ , les équations

$$ax + by = \alpha \quad \text{et} \quad cx + dy = \beta$$

admettent une et une seule solution si et seulement si les deux droites se coupent si et seulement si leurs pentes sont différentes si et seulement si

$$ad - bc \neq 0.$$

Autrement, elles peuvent être parallèles (aucune solution) ou confondues (une infinité de solutions).

---

Si  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont inversibles, alors leur produit  $\mathbf{AB}$  l'est aussi car l'on a

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$$

mais, attention,

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

Une matrice  $\mathbf{A}$  est dite *orthogonale* si elle est inversible et si son inverse est égale à sa transposée :

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T.$$

Une matrice  $\mathbf{A}$  est orthogonale si et seulement si ses colonnes  $\mathbf{a}_j$  sont deux à deux orthogonales et chacune est de norme unité :

$$\mathbf{a}_j^T \mathbf{a}_k = \sum_{i=1}^n a_{ij} a_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Exemples.

1. La matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

est orthogonale et

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Cette matrice représente une rotation du plan.



2. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

est orthogonale et  $\det(A) = 1$ . Observons la relation

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui exprime que la matrice  $A$  est le produit de deux rotations consécutives dans deux plans différents.

## 7.2 Valeurs propres et vecteurs propres

Lorsque

$$Ax = \lambda x \text{ avec } x \neq 0,$$

on dit que  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  et que  $x$  est un vecteur propre associé.

La condition nécessaire et suffisante pour ceci est que

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

ce qui est une équation de degré  $n$  pour  $\lambda$  (*l'équation caractéristique*).

Une matrice  $A$  est dite *symétrique* si elle coïncide avec sa transposée :

$$A = A^T.$$

Pour une telle matrice, il y a toujours  $n$  valeurs propres réelles (en comptant les multiplicités) et les vecteurs propres associés peuvent toujours être choisis orthogonaux. (En général, il peut y avoir des valeurs propres complexes et il n'y a pas nécessairement  $n$  vecteurs propres indépendants.) Lorsque  $n = 2$ , on a

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix},$$

l'équation à résoudre s'écrit

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - b^2 = 0$$

et elle admet pour racines

$$\lambda = \frac{(a + d) \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4b^2}}{2}.$$

Exemples.

1. Pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

on a  $\lambda_1 = (5 + \sqrt{5})/2$  et  $\lambda_2 = (5 - \sqrt{5})/2$  et des vecteurs associés orthogonaux sont

$$x_1 = \begin{pmatrix} -1 - \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

les valeurs propres sont  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 4$  et  $\lambda_3 = 6$  et des vecteurs propres associés sont

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } x_3 = \begin{pmatrix} 16 \\ 25 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

3. Un modèle moléculaire conduit à l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont connus mais  $E$  ne l'est pas. Il s'agit donc de trouver les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice carrée d'ordre trois. L'équation caractéristique est

$$(\alpha - E)(E^2 - 2\alpha E + \alpha^2 - 2\beta^2) = 0$$

et ses solutions sont

$$E_1 = \alpha, E_2 = \alpha + \beta\sqrt{2}, E_3 = \alpha - \beta\sqrt{2}.$$

On peut prendre pour vecteurs propres

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Pour la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

l'équation caractéristique est

$$(\alpha - \beta - E)((\alpha - E)^2 + \beta(\alpha - E) - 2\beta^2) = 0$$

qui admet pour racines  $E = \alpha - \beta$ ,  $E = \alpha - \beta$  et  $E = \alpha + 2\beta$ . À ces valeurs propres sont associés les vecteurs propres

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

### 7.3 Exercices

1. Soient

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 1 & c & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer  $A + 2B + C$  puis  $AB^2C$ .

2. Calculer le commutateur  $[AB - BA]$  des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Vérifier que, pour toutes matrices carrées,

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Le produit de matrices symétriques est-il nécessairement une matrice symétrique ?

4. Déterminer les valeurs propres et des vecteurs propres correspondant pour les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & -a \end{pmatrix}.$$

5. Déterminer les valeurs propres et des vecteurs propres correspondant pour les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Soient  $a, b, c$  trois nombres distincts. Déterminer les valeurs propres et des vecteurs propres correspondants pour la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

## 8 Probabilités

### 8.1 Calcul des probabilités

Soit  $\Omega$  l'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire (telle le lancer de deux dés). Si tous ces cas sont équiprobables, la probabilité  $P\{E\}$  d'un événement  $E \subseteq \Omega$  est égale au nombre  $|E|$  de cas favorables à  $E$  divisé par le nombre total  $|\Omega|$  de cas possibles :

$$P\{E\} = \frac{|E|}{|\Omega|}.$$

Il suit de cette définition que lorsque deux événements  $E$  et  $F$  sont incompatibles ( $E \cap F = \emptyset$ ), leurs probabilités s'additionnent

$$P\{E \cup F\} = P\{E\} + P\{F\}$$

et que dans le cas général, on a

$$P\{E \cup F\} = P\{E\} + P\{F\} - P\{E \cap F\}.$$

D'autre part, si  $E$  et  $F$  sont indépendants, c'est-à-dire que l'occurrence de l'un ne modifie pas la probabilité de l'autre, on a

$$P\{E \cap F\} = P\{E\}P\{F\}.$$

Il est souvent plus facile de calculer la probabilité du complémentaire  $E^c = \Omega \setminus E$  que celle de l'événement  $E$  lui-même. On peut alors obtenir cette dernière de la relation

$$P\{E\} = 1 - P\{E^c\}.$$

Attention. Ce n'est pas parce qu'il n'y a qu'un nombre fini d'issues possibles qu'elles sont équiprobables. Ainsi, lors du jet de deux pièces de monnaie identiques, l'oeil ne peut distinguer que trois cas : deux piles, une pile, aucune pile mais ces trois cas ne sont pas équiprobables comme on s'en persuade aisément en répétant cette expérience une vingtaine de fois. Pour obtenir des cas équiprobables, il faut (mentalement) jeter les deux pièces l'un après l'autre. La première donne pile avec probabilité  $1/2$  et la seconde, indépendamment de la première, aussi. Donc les cas (pile, pile), (pile, face), (face, pile) et (face, face) sont vraiment équiprobables et les probabilités des trois événements observables sont  $1/4$ ,  $1/2$  et  $1/4$  respectivement.

Exemples.

1. Les dés.

On lance deux dés non pipés. Il y a 36 issues équiprobables

$$\Omega = \{(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq 6\}.$$

Alors

$$P\{\text{somme} = 8\} = P\{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\} = \frac{5}{36}$$

et

$$\begin{aligned} P\{\text{plus grand} > 3\} &= 1 - P\{\text{plus grand} \leq 3\} \\ &= P\{(3, 3), (3, 2), (3, 1), (1, 3), (2, 3), (2, 2), (2, 1), (1, 2), (1, 1)\} = \frac{27}{36}. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} P\{\text{somme divisible par 4}\} &= P\{\text{somme} = 4\} + P\{\text{somme} = 8\} \\ &\quad + P\{\text{somme} = 12\} = \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P\{\text{au moins un dé pair}\} &= P\{\text{dé 1 pair}\} + P\{\text{dé 2 pair}\} \\ &\quad - P\{\text{dé 1 et dé 2 pairs}\} = P\{\text{dé 1 pair}\} + P\{\text{dé 2 pair}\} \\ &\quad - P\{\text{dé 1 pair}\}P\{\text{dé 2 pair}\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

2. Les anniversaires.

La probabilité que, d'un groupe de  $n$  personnes, au moins deux aient leur anniversaire de naissance le même jour est

$$\begin{aligned} &P\{\text{au moins deux anniversaires identiques}\} \\ &= 1 - P\{n \text{ anniversaires distincts}\} \\ &= 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)}{365 \cdot 365 \cdots 365}. \end{aligned}$$

Lorsque  $n = 25$ , cette probabilité est 0,5687. Lorsque  $n = 80$ , elle vaut 1.

### 8.1.1 Combinatoire

Le calcul des probabilité se ramène souvent à un problème de dénombrement. Le principe de base est le suivant : si une première opération admet  $n_1$  issues, si une deuxième en admet  $n_2$  et si l'on effectue successivement ces deux opérations, le nombre total d'issues possibles sera égal à  $n_1 n_2$ . On utilise aussi souvent le nombre  $C_k^n$  de façons de choisir d'un ensemble de  $n$  éléments (distincts) un sous-ensemble de  $k$  éléments (sans tenir compte de l'ordre dans lequel ces éléments sont choisis). Il est égal à

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Exemple. Le modèle de l'urne.

Une urne contient  $B$  boules identiques sauf pour la couleur : il y en a  $N$  noires et  $R$  rouges ( $N + R = B$ ). On en retire  $k$ . La probabilité  $p$  d'observer  $n$  boules noires est

$$p = \frac{\binom{N}{n} \binom{B-N}{k-n}}{\binom{B}{k}}.$$

Ainsi, à la loterie 6/49 (simplifiée), pour gagner quelque chose, il faut avoir au moins trois des numéros tirés. On a  $B = 49$  et  $N = 6$ .

$$\begin{aligned} P\{\text{gain}\} &= P\{3 \text{ numéros}\} + P\{4 \text{ numéros}\} + P\{5 \text{ numéros}\} + P\{6 \text{ numéros}\} \\ &= \frac{\binom{6}{3} \binom{43}{3} + \binom{6}{4} \binom{43}{2} + \binom{6}{5} \binom{43}{1} + \binom{6}{6} \binom{43}{0}}{\binom{49}{6}} = 0,0186. \end{aligned}$$

(Le dénominateur est 13 983 816).

## 8.2 Variables aléatoires

Une variable aléatoire est une quantité qui prend ses valeurs avec certaines probabilités, telle le nombre de piles observé lors de 10 lancers d'une pièce de monnaie ou la température mesurée d'un mélange gazeux (à cause des erreurs de mesure). On distingue les variables discrètes des variables continues.

### 8.2.1 Variables discrètes

La *distribution* d'une variable discrète  $X$  est spécifiée en donnant les probabilités  $p_k$  de ses diverses valeurs  $x_k$

$$p_k = P\{X = x_k\}.$$

Quelles que soient ces probabilités, elles satisfont toujours

$$\sum_k p_k = 1.$$

L'espérance mathématique de  $X$ ,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_k x_k p_k$$

est une mesure de position de la variable et sa variance

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \sum_k x_k^2 p_k - \left( \sum_k x_k p_k \right)^2$$

est une mesure de la dispersion de  $X$  autour de cette position. (La racine carrée de la variance s'appelle écart-type.)

### La loi binomiale.

Le nombre  $X$  de succès observés lors de  $n$  répétitions dans les mêmes conditions d'une expérience aléatoire résultant à chaque fois en un succès avec probabilité  $p$  admet la distribution suivante :

$$P\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Son espérance mathématique est  $np$  et sa variance est  $np(1-p)$ .

Exemple. Lors de 5 lancers de deux dés non pipés, soit  $X$  le nombre de fois où une somme paire est observée. Alors  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n = 5$  et  $p = 1/2$ .

$$P\{X = k\} = \binom{5}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^5, \quad 0 \leq k \leq 5.$$

Son espérance mathématique est 2,5, sa variance 1,25.

Si  $Y$  est le nombre de fois où une somme divisible par 4 est observée,  $Y$  suit une loi binomiale de paramètres  $n = 5$  et  $p = 1/4$ .

$$P\{Y = k\} = \binom{5}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{5-k}, \quad 0 \leq k \leq 5.$$

Son espérance mathématique est 1,25, sa variance est 0,9375. (Figures [21,22](#), pages [88,88](#) ).



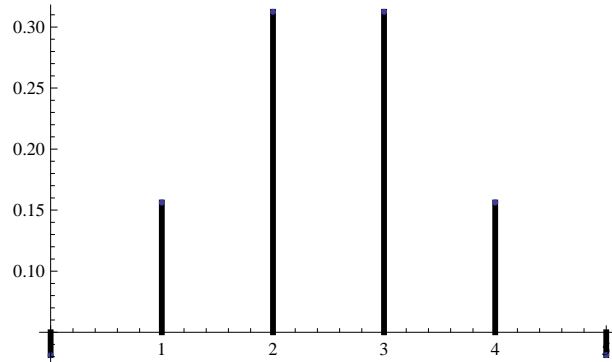


FIG. 21 – Loi binomiale,  $n = 5$ ,  $p = 1/2$

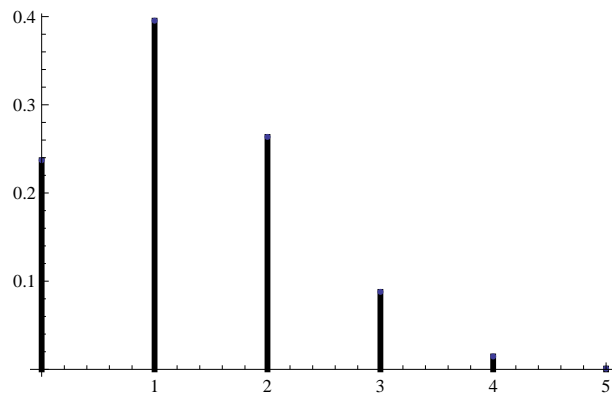


FIG. 22 – Loi binomiale,  $n = 5$ ,  $p = 1/4$

### 8.2.2 Variables continues

La distribution d'une variable continue  $X$  est spécifiée au moyen d'une fonction de densité de probabilité  $f(x)$  qui donne la probabilité que  $X = x$  « à  $dx$  près ». Pour une telle variable, en effet, la probabilité de n'importe quelle valeur  $x$  est nulle (un nombre réel est en fait une abstraction) et c'est la probabilité qu'elle soit comprise entre deux valeurs  $a$  et  $b$  qui importe, probabilité qui est donnée en intégrant la fonction de densité de probabilité entre ces valeurs :

$$P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x) dx.$$

Quelle que soit la fonction de densité de probabilité, on a toujours

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

L'espérance mathématique de  $X$  est

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

et sa variance,

$$\mathbb{V}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \right)^2.$$

#### La loi uniforme

Un nombre  $X$  choisi au hasard entre  $a$  et  $b$  admet pour fonction de densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Son espérance mathématique est  $(a+b)/2$  et sa variance est  $(b-a)^2/12$ .

Exemples.

1. Soit  $X$  le temps d'attente de la prochaine rame sur un quai de métro. S'il y a un train aux 7 minutes,  $X$  suit une loi uniforme sur l'intervalle  $(0, 7)$  et son espérance mathématique est 3,5.

2. Si  $X$  est un point choisi au hasard dans l'intervalle  $(0, L)$  et  $R$  désigne le rapport de la longueur du plus petit segment déterminé par  $X$  au plus grand,

$$\begin{aligned} P\left\{R < \frac{1}{4}\right\} &= P\left\{\frac{X}{L-X} < \frac{1}{4}\right\} + P\left\{\frac{L-X}{X} < \frac{1}{4}\right\} \\ &= P\left\{X < \frac{L}{5}\right\} + P\left\{X > \frac{4L}{5}\right\} \\ &= \frac{1}{L} \frac{L}{5} + \frac{1}{L} \left(L - \frac{4L}{5}\right) = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

### La loi normale

Le résultat  $X$  d'une mesure en laboratoire est généralement considéré comme une variable aléatoire distribuée suivant une loi normale de paramètres  $\mathbb{E}(X) = \mu$  égale à la « vraie » valeur mesurée et de variance  $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$  dépendant de la précision des appareils de mesure. La fonction de densité de probabilité d'une telle variable est

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

(Figure 23, page 90).

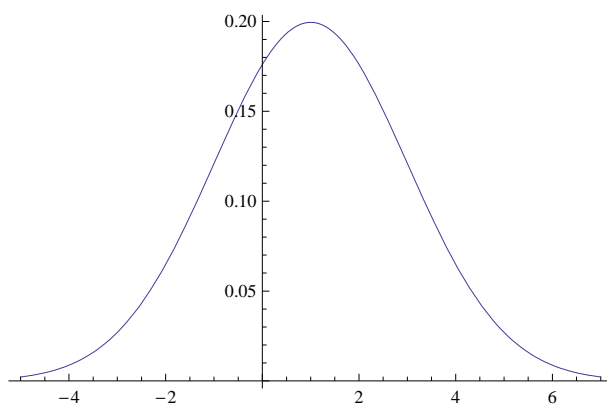


FIG. 23 – Loi normale,  $\mu = 1, \sigma^2 = 4$

Pour une variable aléatoire distribuée normalement, on a

$$P\{|X - \mu| < \sigma\} = 0,68$$

$$P\{|X - \mu| < 2\sigma\} = 0,95$$

et

$$P\{|X - \mu| < 3\sigma\} = 0,99.$$

Exemple. Si  $X$  suit une loi normale  $\mu = 10$ ,  $\sigma^2 = 36$ ,

$$P\{4 < X < 16\} = P\{-6 < X - 10 < 6\} = 0,68.$$

L'importance de la loi normale tient au *théorème central limite* suivant lequel si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires indépendantes et de même distribution (quelle que soit cette distribution), la distribution de la variable

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n\mathbb{V}(X_1)}}$$

se rapproche de la distribution normale centrée ( $\mu = 0$ ) réduite ( $\sigma = 1$ ) lorsque  $n$  tend vers l'infini. Ce résultat est applicable à beaucoup de situations.

Exemple. Un variable aléatoire binomiale  $X$  de paramètres  $n$  et  $p$  peut être considérée comme une somme de  $n$  variables aléatoires binomiales  $X_k$  de paramètres 1 et  $p$  indépendantes, la variable  $X_k$  étant le nombre de succès observés lors de l'épreuve  $k$ . La distribution de  $X$  se rapproche effectivement d'une distribution normale lorsque  $n$  croit. (Figure 24, page 91).

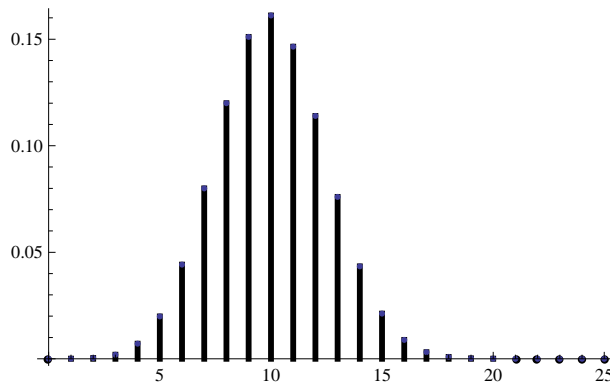


FIG. 24 – Loi binomiale,  $n = 25$ ,  $p = 0,4$ .

### 8.3 Exercices

1. Une population est composée de 100 individus qui peuvent être distingués suivant deux caractères (I ou II pour le premier, a,b ou c pour le second). On sait que 40 individus présentent le caractère I dont 10 ont caractère a et 20 le caractère b. D'autre part, 30 individus au total ont le caractère a et 50 le caractère b. On choisit un individu au hasard dans la population. Calculer la probabilité  $P\{II \text{ et } b\}$  qu'il présente les caractères I et b. Calculer de même  $P\{II \text{ ou } b\}$  puis  $P\{I \text{ et } (b \text{ ou } c)\}$ .
2. Un tiroir contient, pêle-mêle, 12 couteaux, 12 fourchettes et 12 cuillers. On y prend 3 ustensiles au hasard. Calculer la probabilité d'obtenir 3 ustensiles différents; d'obtenir 3 couteaux; d'obtenir 3 ustensiles identiques.
3. Une particule se trouve dans l'un des 3 niveaux d'énergie  $e_0, e_1, e_2$  avec probabilités

$$P\{e_i\} = \frac{1}{q} e^{-e_i/(kT)}$$

où  $k$  est une constante et  $T$  est la température. Déterminer la valeur de la constante de proportionnalité  $q$ .

4. On lance une pièce de monnaie non biaisée à 10 reprises. Quelle est la probabilité a priori d'observer 10 fois pile? Que devient cette probabilité après que l'on ait observé 9 fois pile lors des 9 premiers lancers? Soit  $X$  le nombre de piles observées. Calculer  $P\{X = 2\}$ ,  $P\{X \geq 2\}$ ,  $\mathbb{E}(X)$ ,  $\mathbb{V}(X)$ .
5. On considère l'équation quadratique

$$x^2 + Bx + 0,1 = 0.$$

Si  $B$  est un nombre choisi au hasard entre 0 et 1, quelle est la probabilité que ses racines soient réelles?

6. Soit  $X$  une variable normale centrée réduite. Calculer les probabilités suivantes :

$$P\{0 < X < 1\}, P\{1 < X < 2\}, P\{X > 2\}, P\{|X| > 3\}.$$

## Références

- [1] André Giroux. *Mathématiques pour chimistes*. Presses de l'Université de Montréal, 1983.  
Manuel de premier cycle,  
Math-Info QD 39.3 M3 G573 1983.
- [2] Erich Steiner. *The Chemistry Maths Book*. Oxford University Press, 2008.  
Manuel de premier cycle,  
Math-Info QA 37.3 S737 2008.

## Index

- accélération, 51
- angle, 46
- argument, 12
- Bessel, 65
- champ électrostatique, 54
- condition initiale, 56
- conditions aux limites, 63
- conjugué, 12
- coordonnées polaires, 12
- corde vibrante, 71
- dénombrement, 86
- dérivation en chaîne, 29
- de Moivre, 15
- droite des moindres carrés, 24
- ecart-type, 87
- energie potentielle, 53
- entiers naturels, 11
- entiers relatifs, 11
- equation caractéristique, 80
- equation d'Airy, 66
- equation de Schrödinger, 75
- equation de Laplace, 30, 33
- equation de Schrödinger, 63, 70
- equiprobabilité, 84
- espérance mathématique, 87, 89
- Euler, 15
- expérience aléatoire, 84
- fonction de densité de probabilité, 89
- fonction impaire, 72
- fonction paire, 72
- Hermite, 65
- Laguerre, 65
- Legendre, 65
- méridien, 32
- matrice diagonale, 77
- matrice identité, 77
- matrice inversible, 77
- matrice orthogonale, 79
- matrice symétrique, 80
- matrice transposée, 79
- module, 12
- multiplicateur de Lagrange, 26
- nabla, 51
- Newton, 62
- nombres complexes, 12
- nombres réels, 11
- nombres rationnels, 11
- normale, 48
- norme, 46
- orthogonalité des fonctions trigonométriques, 72
- oscillateur harmonique, 62
- parallélépipède, 50
- parallélogramme, 50
- parallèle, 32
- partie imaginaire, 12
- partie réelle, 12
- position, 51
- produit matriciel, 76
- réaction chimique, 59
- Rappel sur la fonction arctangente, 13
- Rappel sur le calcul différentiel, 20
- Rappel sur le calcul intégral, 33
- Rappel sur les déterminants, 48

Rappel sur les systèmes d'équations

linéaires, 77

représentation binaire, 5

représentation décimale, 5

série géométrique, 5

stœchiométrie, 57

Taylor-MacLaurin, 6

théorème central limite, 91

théorème fondamental de l'algèbre, 16

variance, 87, 89

vecteurs orthogonaux, 46

vitesse, 51