

MAT 1978 - Probabilités et Statistique

Examen final

Le 12 décembre 2005, de 18:00 à 21:00

Documentation permise : une feuille 8 et 1/2 par 11 seulement.
Chaque question vaut 8,33 points.

1. Le salaire moyen d'un ingénieur chimiste fraîchement diplômé est de 43 000\$ avec un écart-type de 3 200\$. Calculer la probabilité approchée que la moyenne des salaires de 12 tels ingénieurs excède 45 000\$. (Exprimer la réponse en terme de $\Phi(u)$, la fonction de répartition normale standard Φ avec un argument positif u).
2. Déterminer l'estimateur à vraisemblance maximale pour θ lorsque l'échantillon X_1, X_2, \dots, X_n provient d'une variable aléatoire X dont la fonction de densité de probabilité est

$$f(x) = \begin{cases} \theta^2 x e^{-\theta x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Un échantillon aléatoire de 100 items sortis d'une ligne de montage en contient 17 défectueux. Déterminer un intervalle bilatéral de confiance à 95% pour la probabilité p qu'un item sorti de cette ligne de montage soit défectueux. Déterminer aussi un intervalle unilatéral à droite de confiance à 99% pour cette probabilité. (Exprimer la réponse en terme des nombres z_α de la loi normale standard).
4. Un fabricant affirme qu'un certain type de batterie a une vie utile d'au moins 240 heures. Un échantillon de 18 telles batteries est pris. La moyenne de l'échantillon est 237, sa variance 127. En supposant que la vie utile d'une batterie est une variable aléatoire normale $N(\mu, \sigma^2)$, quelle statistique utiliseriez-vous pour tester l'hypothèse

$$H_0 : \mu \geq 240?$$

Pour quelle valeur de cette statistique rejèteriez-vous l'hypothèse H_0 au seuil 10%? (Exprimer la réponse en terme des nombres $t_{\alpha,n}$ de la loi de Student).

5. Une compagnie produit un médicament dont le poids a un écart-type de 0,5 mg et envisage une nouvelle méthode de production pour réduire cet écart-type à 0,4 mg. Un échantillon de 10 médicaments produits avec la nouvelle méthode est pris. La moyenne de l'échantillon est 5.724 mg et sa variance est 0,000016 mg. En supposant que le poids du médicament est une variable aléatoire normale $N(\mu, \sigma^2)$, quelle statistique utiliseriez-vous pour tester l'hypothèse

$$H_0 : \sigma \geq 0,4?$$

Pour quelles valeurs de cette statistique rejèteriez-vous l'hypothèse H_0 au seuil 1% (et donc accepteriez-vous la nouvelle méthode de production)? (Exprimer la réponse en terme des nombres $\chi_{\alpha,n}^2$ de la loi du Khi-deux).

6. On a mesuré les grandeurs de 12 avocats exerçant le même type de droit, de formation académique identique et de performance universitaire comparable afin de repérer une éventuelle dépendance de leur salaire Y sur leur grandeur x . Les données obtenues sont les suivantes :
- | | | | | | | | | | | | | |
|-----------------|----|----|----|-----|----|----|-----|----|-----|-----|----|-----|
| <i>Grandeur</i> | 64 | 65 | 66 | 67 | 69 | 70 | 72 | 72 | 74 | 74 | 75 | 76 |
| <i>Salaire</i> | 91 | 94 | 88 | 103 | 77 | 96 | 105 | 88 | 122 | 102 | 90 | 114 |
- (les grandeurs sont en pouces et les salaires en milliers de dollars). Dans une relation linéaire

$$Y = \gamma + \beta x,$$

quel est l'estimateur de moindre carré pour β ? Quelle statistique utiliseriez-vous pour tester l'hypothèse

$$H_0 : \beta = 0?$$

Pour quelle valeur de cette statistique rejèteriez-vous l'hypothèse H_0 au seuil 5%? (Exprimer la réponse en terme des nombres $t_{\alpha,n}$ de la loi de Student).

André Giroux