MAT2050 : analyse 2

Dimitris Koukoulopoulos

Université de Montréal

Dernière mise-à-jour : 29 septembre 2020

Table des matières

Notation

Les symboles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ dénotent les ensembles de nombres naturels, entiers, rationnels, réels et complexes, respectivement. On n'inclut pas le nombre 0 à l'ensemble de nombres naturels. On écrit aussi $\mathbb{Z}_{\geq a}$ pour l'ensemble d'entiers $\geq a$, $\mathbb{R}_{<0}$ pour l'ensemble de nombres réels négatifs, etc. Donc, $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Étant donné un ensemble A, on dénote par $\mathbf{1}_A$ sa fonction indicatrice. De façon plus générale, on écrit, par exemple, $\mathbf{1}_{m=n}$ pour dénoter la fonction indicatrice de l'événement $m = n$.

Le symbole $\log x$ dénote toujours le logarithme naturel de x (dénoté par $\ln x$ dans quelques livres).

Étant donné un intervalle, on écrit $C^k(I)$ pour l'ensemble de fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ qui sont dérivables k fois, et dont la k-ième dérivée $f^{(k)}$ est continue sur I.

Notons que si $I = [a, b]$, alors les dérivées en a et en b sont définies en utilisant les limites $\lim_{x \to a^+}$ et $\lim_{x \to b^-}$, respectivement. De même, si $I = [a, b)$, alors pour définir la dérivée en a, on utilise la limite $\lim_{x \to a^+}$, etc.

Étant donné un nombre réel x, on utilise la notation $\lfloor x \rfloor$ pour dénoter sa **partie entier**, qui est défini d'être le plus grand entier n qui est plus petit que x, c'est-à-dire

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}.$$

De plus, on utilise la notation $\{x\}$ pour dénoter la partie fractionnel de x, qui est définie par

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor .$$

On remarque ici que la partie entier de x est l'unique entier n satisfaisant les inégalités $n \leq x < n + 1$. Une autre propriété de la partie entier qu'on utilisera beaucoup est que si $x > 0$, alors

$$\lfloor x \rfloor = \#\{n \in \mathbb{Z} : 1 \leq n \leq x\}.$$

Première partie

L'intégrale de Riemann

Chapitre 1

Intégrabilité

Le but principal de la théorie de l'integration est de calculer l'aire entre le graph d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et l'axe de x. La fonction f peut être très irrégulière, donc l'idée est d'essayer de trouver des approximations de f par des fonctions plus simples dont l'aire correspondante peut se calculer facilement. En particulier, on utilise des fonctions en escalier pour donner une approximation de f, car c'est très facile de calculer l'aire entre le graph d'une fonction en escalier et l'axe de x.

Une fonction en escalier définie sur $[a, b]$, sera constante de a jusqu'à un certain point x_1, puis de x_1 jusqu'à un deuxième point x_2, et ainsi de suite. Cette observation nous amène naturellement à la définition suivante :

Définition 1.1. Une partition P de l'intervalle $[a, b]$ est un ensemble $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ tel que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Elle partage $[a, b]$ dans les intervalles

$$I_1 = [x_1, x_0], \quad I_2 = [x_2, x_1], \quad \ldots \quad I_n = [x_{n-1}, x_n]$$

qu'on dénote collectivement par

$$\mathcal{I}(P) := \{I_1, \ldots, I_n\}.$$

Finalement, l'**épaisseur** de P est le maximum entre les longueurs de $I_1, \ldots, I_n$, c'est-à-dire

$$\|P\| := \max_{1 \leq j \leq n} (x_j - x_{j-1}). \qquad \square$$

Définition 1.2. Si $I = [a, b]$ est un intervalle, alors on dénote sa longueur par

$$|I| = b - a. \qquad \square$$

Étant donnée une partition P de $[a, b]$ avec $\mathcal{I}(P) = \{I_1, \ldots, I_n\}$, c'est facile de trouver des fonctions en escalier qui pourraient servir comme d'approximations de f : pour chaque intervalle I_j, on choisit un point $\xi_j \in I_j$ et on calcule la valeur de f en ξ_j. La fonction en escalier qu'on considère est

$$g = f(\xi_1) \cdot \mathbf{1}_{I_1} + f(\xi_2) \cdot \mathbf{1}_{I_1} + \cdots + f(\xi_n) \cdot \mathbf{1}_{I_n}.$$

Evidemment, l'aire entre le graphe de g et l'axe de x est donnée par la somme

$$R(f,P,\boldsymbol{\xi}) := f(\xi_1)|I_1| + f(\xi_2)|I_2| + \cdots + f(\xi_n)|I_n|.$$

Cette somme est appelée la **somme de Riemann** de f correspondant à la partition P et au choix des points $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$. Pour que l'intégrale de f soit bien définie, il faut que les sommes de Riemann $R(f,P,\boldsymbol{\xi})$ tendent toutes vers le même nombre (qu'on va noter par $\int_a^b f$), indépendamment du choix des points $\xi_1,\ldots,\xi_n$, à condition que $\|P\|$ tend vers 0. La définition suivante exprime cette idée intuitive :

Définition 1.3. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction et $[a,b] \subseteq X$. On dit que f est **Riemann-intégrable** sur $[a,b]$ s'il existe un nombre réel S ayant la propriété suivante :

Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ est n'importe quelle partition de $[a,b]$ d'épaisseur $\|P\| < \delta$ et $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ est n'importe quel choix de points $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$, $1 \le j \le n$, alors

$$|R(f,P,\boldsymbol{\xi}) - S| < \varepsilon.$$

Dans ce cas-ci, on appelle le nombre S l'**intégrale de Riemann** de f et on le dénote par $\int_a^b f$ ou, même, par $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. □

Au cours du calcul intégral, on a vu plusieurs façons de calculer le nombre S, *s'il existe.* Le point de départ est la notion de la primitive :

Définition 1.4. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, alors une **antidérivée** ou une **primitive** de f est une fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que :

— F est continue sur $[a,b]$;

— F est différentiable sur (a,b) et, pour tout $x \in (a,b)$, on a que $F'(x) = f(x)$.

□

Exemple 1.5. Si $[a,b] \subseteq (0,+\infty)$, alors une primitive de la fonction $f(x) = x^p$ est donnée par

$$F(x) = \begin{cases} x^{p+1}/(p+1) & p > -1, \\ \log x & \text{si } p = -1, \\ x^{p+1}/(p+1) & \text{si } p < -1. \end{cases}$$

□

L'importance de la notion d'une antidérivée se manifeste au **théorème fondamental du calcul intégral** :

Théorème 1.6 (théorème fondamental du calcul intégral)**.** *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction* **intégrable** *sur* $[a,b]$. *Si* F *est une antidérivée de* f, *alors*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_{x=a}^{b}.$$

Démonstration. Soit $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ une partition de $[a, b]$. Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, le théorème des accroissements finis implique qu'il existe $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$ tel que

$$F(x_j) - F(x_{j-1}) = F'(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Donc

$$R(f, P, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} (F(x_j) - F(x_{j-1})) = F(b) - F(a).$$

Le côté droit ne dépend pas de P et le côté gauche tend vers $\int_a^b f$ quand $\|P\| \to 0$ car on a supposé que f est intégrable [1]. Par comparaison, on trouve que $\int_a^b f = F(b) - F(a)$, comme voulu. □

L'énoncé du théorème fondamental du calcul intégral suscite une *question fondamentale* :

Quelles fonctions sont intégrables ?

En effet, c'est facile de voir que $x^2/2$ est une primitive de x, donc on soupçonne que $\int_0^1 x\mathrm{d}x = 1/2$. Cependant, pour appliquer le théorème 1.6 il faut d'abord savoir que la fonction x est intégrable !

Exemple 1.7. La fonction-constante c est intégrable sur chaque intervalle $[a, b]$. De plus, on a que

$$\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c \cdot (b - a).$$

En effet, si $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ est une partition de $[a, b]$, alors

$$R(f, P, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^{n} c \cdot (x_j - x_{j-1}) = c \cdot (x_n - x_0) = c \cdot (b - a)$$

par sommation télescopique. Donc, $|R(f, P, \boldsymbol{\xi}) - c(b - a)| = 0 < \varepsilon$ pour chaque ε, d'où on déduit que $\int_a^b c\mathrm{d}x$ existe est est égale à $c(b - a)$.

Exemple 1.8. La fonction x est intégrable sur $[0, 1]$ et on a que $\int_0^1 x\mathrm{d}x = 1/2$.

En effet, $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ est une partition de $[a, b]$, alors

$$R(f, P, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j (x_j - x_{j-1}).$$

Si notre partition est $P = \{0, 1/N, \dots, N/N\}$ et on choisit $x_j = j/N$, alors

$$R(f, P, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{N} \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N} j = \frac{N+1}{2N} \to \frac{1}{2}$$

1. Cette hypothèse est importante et elle n'est pas impliquée par l'existence de la primitive F ; voir exercice 3.1(a).

quand $N \to \infty$. (Ici, on a utilisé le fait que $1+2+\cdots+N = N(N+1)/2$. Montrez-le comme exercice !)

On peut généraliser le calcul précédent : tout d'abord, si $c_j = (x_j + x_{j-1})/2$ est le centre de l'intervalle $[x_{j-1}, x_j]$, alors

$$\sum_{j=1}^{n} c_j(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(x_j + x_{j-1})(x_j - x_{j-1})}{2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2 - x_{j-1}^2}{2} = \frac{x_n^2 - x_0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

par sommation télescopique. De plus, on a que

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \xi_j(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j - x_{j-1}) \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} (\xi_j - c_j)(x_j - x_{j-1}) \right| \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{2}$$

car $|\xi_j - c_j| \leq (x_j - x_{j-1})/2$ pour chaque $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ (le nombre c_j se trouve au *centre* de l'intervalle $[x_{j-1}, x_j]$). Puisque $x_j - x_{j-1} \leq \|P\|$, on en déduit que

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \xi_j(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j - x_{j-1}) \right| \leq \frac{\|P\|}{2} \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = \frac{\|P\|}{2}$$

par sommation télescopique. On a déjà montré que $\sum_{j=1}^{n} c_j(x_j - x_{j-1}) = 1/2$. Donc, on a que

$$|R(f, P, \boldsymbol{\xi}) - 1/2| \leq \|P\|/2.$$

On en déduit facilement que f est intégrable sur $[0, 1]$ avec intégrale $1/2$: si $\varepsilon > 0$ et $\|P\| < 2\varepsilon$, alors $|R(f, P, \boldsymbol{\xi}) - 1/2| < \varepsilon$ pour n'importe quel choix de points $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$.

Même pour la fonction simple $f(x) = x$, on a travaillé durement pour montrer qu'elle est intégrable. On cherche alors une façon plus systématique et générale pour montrer que plusieurs fonctions intéressantes sont intégrables.

Le critère d'intégrabilité de Darboux

Soit P une partition avec $\mathcal{I}(P) = \{I_1, \ldots, I_n\}$. On commence en observant que

$$(1.1) \qquad |R(f, P, \boldsymbol{\xi}) - S| \leq \varepsilon \quad \iff \quad S - \varepsilon \leq R(f, P, \boldsymbol{\xi}) \leq S + \varepsilon.$$

Il faut que cette relation soit vraie pour chaque choix de $\xi_j \in I_j$ quand P est assez fine. Ceci est équivalent au fait que

$$(1.2) \qquad R^+(f, P) \leq S + \varepsilon \quad \text{et} \quad R^-(f, P) \geq S - \varepsilon,$$

où

$$R^+(f, P) := \sup_{\substack{\xi_j \in I_j \\ 1 \leq j \leq n}} R(f, P, \boldsymbol{\xi}) \quad \text{et} \quad R^-(f, P) := \inf_{\substack{\xi_j \in I_j \\ 1 \leq j \leq n}} R(f, P, \boldsymbol{\xi}).$$

On appelle $R^+(f,P)$ la **somme supérieure de Darboux** de f (par rapport à P), et on appelle $R^-(f,P)$ la **somme inférieure de Darboux** de f (par rapport à P).

Observons que, puisque $R(f,P,\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)|I_j|$ et $|I_j| = x_j - x_{j-1} > 0$, on a que

$$R^+(f,P) = \sum_{j=1}^n \Big(\sup_{x_{j-1}\le\xi_j\le x_j} f(\xi_j)\Big) \cdot (x_j - x_{j-1}).$$

De façon plus compacte, on peut écrire cette relation comme

$$R^+(f,P) = \sum_{j=1}^n \Big(\sup f(I_j)\Big) \cdot |I_j|$$

Idem, on a que

$$R^-(f,P) = \sum_{j=1}^n \Big(\inf_{x_{j-1}\le\xi_j\le x_j} f(\xi_j)\Big) \cdot (x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^n \Big(\inf f(I_j)\Big) \cdot |I_j|.$$

On reviens maintenant à la relation (1.2) :

$$S - \varepsilon \le R^-(f,P) \le R^+(f,P) \le S + \varepsilon.$$

Donc, les nombres $R^\pm(f,P)$ se trouvent dans un intervalle de longueur 2ε. En particulier, leur différence est $\le 2\varepsilon$. On appelle leur différence l'**oscillation** de f par rapport à P et on la dénote par[2]

$$\begin{aligned} D(f,P) &:= R^+(f,P) - R^-(f,P) \\ &= \sum_{j=1}^n \Big(\sup_{x_{j-1}\le\xi_j\le x_j} f(\xi_j) - \inf_{\xi_j\in I_j} f(\xi_j)\Big) \cdot (x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^n \Big(\sup f(I_j) - \inf f(I_j)\Big) \cdot |I_j|. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Le terme 'oscillation' est justifié de la définition suivante :

Définition 1.9. (a) Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. Définissons le **diamètre** de A par

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{|a-b| : a, b \in A\}.$$

(Le diamètre pourrait être ∞.) L'exercice 1.4 montre que

$$\operatorname{diam}(A) = \sup(A) - \inf(A).$$

2. On n'a pas besoin de savoir que f est bornée pour montrer que $D(f,P) = \sum_{j=1}^n (\sup f(I_j) - \inf(I_j))(x_j - x_{j-1})$. En effet, on a toujours que $\sup f(I_j) > -\infty$, ainsi que $\inf f(I_j) < +\infty$. Or, si f est non-bornée, alors il existe j tel que soit $\sup f(I_j) = +\infty$ ou $\inf f(I_j) = -\infty$. Donc, toutes les expressions apparaissant à (1.3) valent $+\infty$.

(b) Soit $f : X \to \mathbb{R}$ et $Y \subseteq X$. L'oscillation de f sur Y est définie comme

$$\operatorname{osc}_f(Y) := \sup_{s,t\in Y} |f(s) - f(t)| = \operatorname{diam}(f(Y)) = \sup f(Y) - \inf f(Y). \qquad \square$$

Avec la définition précédente, on a que

$$\begin{aligned} D(f,P) &= \sum_{j=1}^{n} \sup_{x_{j-1}\leq \xi_j,\xi_j'\leq x_j} |f(\xi_j) - f(\xi_j')| \cdot (x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \operatorname{osc}_f(I_j) \cdot |I_j|. \end{aligned}$$

Darboux a utilisé les quantités $D(f,P)$ et $R^{\pm}(f,P)$ pour donner une approche alternative à la théorie d'intégration de Riemann. Son grand succès est une caractérisation *intrinsèque* de la notion d'intégrabilité :

Théorème 1.10 (le critère d'intégrabilité de Darboux)**.** *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ avec $X \supseteq [a,b]$. Alors, f est intégrable sur $[a,b]$* ***si, et seulement si*** *:*

pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une partition P de $[a,b]$ telle que $D(f,P) < \varepsilon$.

On peut directement voir que le critère d'intégrabilité de Darboux est beaucoup plus simple que la définition de Riemann : elle ne fait pas référence au nombre inconnu S, et on n'a pas besoin de vérifier que $D(f,P) < \varepsilon$ pour *toutes* les partitions P qui sont assez fines (c'est-à-dire, dont l'épaisseur est assez petite), mais de trouver simplement *une* partition P avec $D(f,P) < \varepsilon$.

Remarque 1.11. Le critère d'intégrabilité de Darboux est l'analogue du critère de Cauchy pour la convergence de suites : la série $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge si, et seulement si, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $|a_m - a_n| < \varepsilon$ pour $m,n \geq N$. L'avantage du critère de Cauchy est qu'on n'a pas besoin de savoir quelle est la limite de $(a_n)_{n\geq 1}$ pour montrer qu'elle est convergente. $\square$

Le critère d'intégrabilité de Darboux rend clair que la propriété d'être intégrable est essentiellement équivalente à la *continuité en moyenne*. En effet, si f est continue et l'intervalle I_j est assez court, alors la quantité $\operatorname{osc}_f(I_j)$ est petite. Cependant, pour que $D(f,P)$ soit petite, on n'a pas besoin de savoir que $\operatorname{osc}_f(I_j)$ est petite pour *chaque* j, mais seulement pour la *majorité* de j, dans le sens que

$$\sum_{\substack{1\leq j\leq n \\ \operatorname{osc}_f(I_j)=\text{grand}}} |I_j| = \text{petit},$$

c'est-à-dire f oscille beaucoup sur un ensemble de longueur totale courte.

Afin de confirmer notre intuition de la relation entre l'intégrabilité et la continuité, et afin de démontrer la puissance du critère d'intégrabilité de Darboux, on prouve le résultat suivant :

Théorème 1.12. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors elle est intégrable sur $[a,b]$.*

Démonstration. Puisque $[a,b]$ est compacte, f est uniformément continue. Donc, si $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ quand $|x - y| \leq \delta$. En particulier, si $I \subseteq [a,b]$ a longueur $< \delta$, on a que $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ pour tout $x, y \in I$, c'est-à-dire $osc_f(I) \leq \varepsilon$. On en déduit que si $\|P\| \leq \delta$, alors

$$D(f,P) \leq \varepsilon \cdot (|I_1| + \cdots + |I_n|) = \varepsilon \cdot (b-a).$$

On peut toujours trouver une partition avec $\|P| \leq \delta$ (par exemple, $P = \{a + (b-a)n/N : 0 \leq n \leq N\}$ avec N assez grand), donc on peut utiliser le critère de Darboux pour déduire que f est intégrable sur $[a,b]$. □

On montre maintenant le théorème 1.10 a plusieurs étapes. La partie directe du théorème est facile à prouver :

Démonstration du théorème 1.10 : "$\Rightarrow$". Soit $S = \int_a^b f$. Soit $\varepsilon > 0$ et choisissons $\delta > 0$ tel que

$$|R(f,P,\boldsymbol{\xi}) - S| < \varepsilon/3$$

quand $\|P\| < \delta$. D'après (1.1) et (1.2), on a que

$$S - \varepsilon/3 \leq R^-(f,P) \leq R^+(f,P) \leq S + \varepsilon/3.$$

Donc,

$$D(f,P) = R^+(f,P) - R^-(f,P) \leq 2\varepsilon/3 < \varepsilon,$$

pour chaque P d'épaisseur $< \delta$. Ceci conclut la démonstration. □

La direction converse du théorème 1.10 est beaucoup plus difficile. D'abord, il faut construire le nombre S. Darboux a réussi de le faire en considérant l'**intégrale supérieure** de f

$$\overline{\int_a^b} f := \inf\{R^+(f,P) : P \text{ partition de } [a,b]\}$$

et l'**intégrale inférieure de** f

$$\underline{\int_a^b} f := \sup\{R^-(f,P) : P \text{ partition de } [a,b]\}.$$

Le résultat - clé pour démontrer la direction converse du critère de Darboux est le lemme suivant :

Lemme 1.13. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ satisfaisant le critère de Darboux, c'est-à-dire :*

pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une partition P de $[a,b]$ telle que $D(f,P) < \varepsilon$.

Alors, f a les propriétés suivantes :

(a) f est bornée ;

(b) $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$;

(c) *pour chaque* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que* $D(f, P) < \varepsilon$ *pour chaque partition* P *de* $[a, b]$ *d'épaisseur* $< \delta$.

Avant de montrer le lemme 1.13, on verra comment on peut l'utiliser pour finir la démonstration du théorème 1.10.

Démonstration du théorème 1.10 : " $\Leftarrow$ **".** Supposons que pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une partition P de $[a, b]$ telle que $D(f, P) < \varepsilon$. On montre que f est intégrable sur $[a, b]$.

D'après le lemme 1.13(b), on a que $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$. Soit S leur valeur commune. On montrera que f est intégrable et que son intégrale est donné par S.

Soit $\varepsilon > 0$. Le lemme 1.13(c) implique qu'il existe $\delta > 0$ tel que $D(f, P) < \varepsilon$ si P est une partition de $[a, b]$ de diamètre $< \delta$. Si $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ et $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, alors on a que

$$R^-(f, P) \le R(f, P, \boldsymbol{\xi}) \le R^+(f, P).$$

D'autre côté, on a que

$$R^+(f, P) = R^-(f, P) + D(f, P) < \underline{\int_a^b} f + \varepsilon = S + \varepsilon$$

et que

$$R^-(f, P) = R^+(f, P) - D(f, P) > \overline{\int_a^b} f - \varepsilon = S - \varepsilon.$$

Donc, $S - \varepsilon < R(f, P, \boldsymbol{\xi}) < S + \varepsilon$ pour n'importe quelle partition $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ d'épaisseur $< \delta$, et pour n'importe quel choix de points $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$, $1 \le j \le n$. Ceci implique que f est intégrable et que $\int_a^b f = S$. $\square$

On conclut cette section avec la démonstration du lemme 1.14. On commence avec un résultat préparatoire :

Lemme 1.14. *Soient* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction, et* P *et* Q *deux partitions de* $[a, b]$.

(a) Si $P \subseteq Q$, *alors*

$$R^-(f, P) \le R^-(f, Q) \le R^+(f, Q) \le R^+(f, P).$$

En particulier,

$$D(f, Q) \le D(f, P).$$

(b) On a que

$$R^-(f, P) \le R^+(f, Q).$$

Démonstration. (a) Il suffit de montrer l'affirmation quand $Q = P \cup \{z\}$. Le cas général découle de ce cas particulier et d'induction, en ajoutant à P un point à la fois de l'ensemble $Q \setminus P$.

Si $\mathcal{I}(P) = \{I_1, \ldots, I_n\}$, alors il existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $z \in I_k = [x_{k-1}, x_k]$. En écrivant

$$I_{j_0} = [x_{k-1}, z] \cup [z, x_k] =: I'_k \cup I''_k,$$

on a que $\mathcal{I}(Q) = \{I_1, \ldots, I_{k-1}, I'_k, I''_k, I_{k+1}, \ldots, I_n\}$. Donc

$$R^+(f, Q) = \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne k}} \sup f(I_j) \cdot |I_j| + \sup f(I'_k) \cdot |I'_k| + \sup f(I''_k) \cdot |I''_k|.$$

et

$$R^-(f, Q) = \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne k}} \inf f(I_j) \cdot |I_j| + \inf f(I'_k) \cdot |I'_k| + \inf f(I''_k) \cdot |I''_k|.$$

Puisque $I'_k, I''_k \subseteq I_k$, on a que

$$\sup f(I'_k), \sup f(I''_k) \le \sup f(I_k) \quad \text{et} \quad \inf f(I'_k), \inf f(I''_k) \le \inf(I_k).$$

Puisque $|I'_k| + |I''_k| = |I_k|$, on trouve que

$$\sup f(I'_k) \cdot |I'_k| + \sup f(I''_k) \cdot |I''_k| \le \sup f(I_k) \cdot |I_k|$$

et

$$\inf f(I'_k) \cdot |I'_k| + \inf f(I''_k) \cdot |I''_k| \ge \inf f(I_k) \cdot |I_k|.$$

On en déduit que $R^+(f, Q) \le R^+(f, P)$ et que $R^-(f, Q) \ge R^-(f, Q)$, comme affirmé. Finalement, on voit toute de suite que

$$D(f, Q) = R^+(f, Q) - R^-(f, Q) \le R^+(f, P) - R^-(f, P) = D(f, P).$$

(b) On a que $P, Q \subseteq P \cup Q$, et l'ensemble $P \cup Q$ est aussi une partition de $[a, b]$. Donc, la partie (a) implique que

$$R^-(f, P) \le R^-(f, P \cup Q) \le R^+(f, P \cup Q) \le R^+(f, Q),$$

comme voulu. □

Démonstration du lemme 1.13. (a) On sait qu'il existe une partition P telle que $D(f, P) < 1$. Soit $\mathcal{I}(P) = \{I_1, \ldots, I_n\}$. Si $x \in [a, b]$, alors il existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $x \in I_k = [x_{k-1}, x_k]$. En particulier,

$$|f(x)| \le |f(x_k)| + |f(x) - f(x_k)| \le |f(x_k)| + \mathrm{osc}_f(I_k) \le |f(x_k)| + \frac{D(f, P)}{|I_k|},$$

puisque $D(f, P) = \sum_{j=1}^n \mathrm{osc}_f(I_j)|I_j| \ge \mathrm{osc}_f(I_k)|I_k|$ (tous les termes de cette somme sont non-négatifs). Ici, on a que $D(f, P) \le 1$. Donc,

$$|f(x)| \le |f(x_k)| + \frac{1}{|I_k|} \le \max_{1 \le j \le n} \left(|f(x_j)| + \frac{1}{|I_j|} \right).$$

Puisque la quantité au côté droit de cette inégalité est un nombre réel ne dependant pas de x, on a montré que f est bornée.

(b) Soit $S^+ = \overline{\int_a^b} f$ et $S^- = \underline{\int_a^b} f$. Pour chaque partition P de $[a, b]$, on a que

$$R^-(f, P) \leq S^- \leq S^+ \leq R^+(f, P).$$

On en déduit que

$$0 \leq S^+ - S^- \leq R^+(f, P) - R^-(f, P) = D(f, P).$$

Pour chaque $\varepsilon > 0$, on sait qu'il existe une partition P de $[a, b]$ avec $D(f, P) < \varepsilon$. En particulier, $0 \leq S^+ - S^- < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. En laissant $\varepsilon \to 0^+$, on trouve que $S^+ = S^-$.

(c) On fixe $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe une partition $P_\varepsilon = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$ de $[a, b]$ telle que $D(f, P_\varepsilon) < \varepsilon/2$. Soit P une autre partition de $[a, b]$ de diamètre $< \delta$, où δ sera déterminé pour tard. Ici, c'est important de remarquer que m est un nombre entier qui depend seulement de ε (et de f, bien sûr). Donc, le paramètre δ peut dépendre de m. Posons $Q = P \cup P_\varepsilon$ et observons que, puisque $Q \supseteq P_\varepsilon$, le lemme 1.14(a) implique que

$$D(f, Q) \leq D(f, P_\varepsilon) < \varepsilon/2.$$

D'un autre côté, Q diffère de P seulement par m points, et m est un nombre fixé ici. Donc, c'est naturel de s'attendre à ce que $D(f, Q)$ et $D(f, P)$ soient proches l'un de l'autre si δ est assez petit.

Afin de montrer cette intuition, on ajoute un point à la fois à P : on définit

$$Q_j = P \cup \{y_0, y_1, \ldots, y_j\} \quad (0 \leq j \leq m),$$

pour que on a la *filtration* de partitions

$$P = Q_0 \subseteq Q_1 \subseteq \cdots \subseteq Q_m = Q.$$

En particulier, le lemme 1.14 implique que

$$D(f, Q) = D(f, Q_m) \leq D(f, Q_{m-1}) \leq \cdots \leq D(f, Q_0) = D(f, P).$$

On affirme que si δ est assez petit, alors

$$D(f, Q_{j-1}) - D(f, Q_j) < \frac{\varepsilon}{2m} \quad (1 \leq j \leq m) \tag{1.4}$$

Clairement, ceci impliquera que

$$0 \leq D(f, P) - D(f, Q) = \sum_{j=1}^{m} (D(f, Q_{j-1}) - D(f, Q_j) < \frac{\varepsilon}{2}$$

et, par la suite,

$$D(f, P) \leq D(f, Q) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ce qui terminera la démonstration.

Il reste à montrer (1.4). Supposons $\mathcal{I}(Q_{j-1}) = \{I_0, I_1, \dots, I_n\}$ et $y = y_j$. Il existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x_{k-1} \le y \le x_i$. Soit

$$I'_k = [x_{k-1}, y] \quad \text{et} \quad I''_k = [y, x_k].$$

En adaptant l'argument de la démonstration du lemme 1.14(a), on a que

$$\begin{aligned} 0 \le D(f, Q_{j-1}) - D(f, Q_j) &= \operatorname{osc}_f(I_k)|I_k| - \operatorname{osc}_f(I'_k)|I'_k| - \operatorname{osc}_f(I''_k)|I''_k| \\ &\le \operatorname{osc}_f(I_k)|I_k|. \end{aligned}$$

Alors, si $M = \sup|f|$, qui est un nombre fini selon la partie (a), on a que $\operatorname{osc}_f(I_k) \le 2M$ (rappelez-vous que $\operatorname{osc}_f(I_k) = \sup_{x,y \in I_k} |f(x) - f(y)|$). Donc,

$$0 \le D(f, Q_{j-1}) - D(f, Q_j) \le 2M \cdot |I_k| \le 2M\|Q_{j-1}\| < 2M\delta,$$

car Q_{j-1} est une partition plus fine que P et on a supposé que $\|P\| < \delta$. En choisissant $\delta = \varepsilon/(4mM)$, on déduit (1.4). □

Exercices

Exercice 1.1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Montrez que

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f\left(a + \frac{n}{N}(b-a)\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 1.2. Montrez que la fonction $f(x) = x^2$, $0 \le x \le 1$, est integrable et calculez son intégrale. [*Indice* : montrez que $1^2 + 2^2 + \cdots + N^2 = N(N+1)(2N+1)/6$.]

Exercice 1.3.

(a) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Montrez que $D(f, P) \le |f(b) - f(a)| \cdot \|P\|$. Quand est-ce que cette inégalité une égalité ?

(b) Soit

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 7 & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ 2 - 6x^2 & \text{si } 1 < x \le 2, \\ x^2 e^{x-2} - 26 & \text{si } 2 < x \le 3. \end{cases}$$

Montrez que f est intégrable sur $[0, 3]$. Trouvez une partition explicite P de $[0, 3]$ telle que $D(f, P) = 1/100$.

Exercice 1.4. Soit A un ensemble non-vide de nombres réels. Montrez que

$$\operatorname{diam}(A) = \sup A - \inf A.$$

(Attention : il est possible que $\sup A = +\infty$ et que $\inf A = -\infty$; il faut examiner ces cas aussi.)

Exercice 1.5. Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $c_1, \ldots, c_n \in [a, b]$. Supposons que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in [a, b] \setminus \{c_1, \ldots, c_n\}$. Montrez que si f est intégrable, alors g l'est aussi et que

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 1.6. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que

$$M := \sup\{|f'(x)| : a \leq x \leq b\} < \infty.$$

Soient $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ une partition de $[a, b]$ et $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pour $1 \leq i \leq n$. Montrez que

$$R^+(f, \mathcal{P}) - R^-(f, \mathcal{P}) \leq M \cdot \|\mathcal{P}\| \cdot (b - a)$$

et que

$$\left| R(f, \mathcal{P}, \boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| \leq M \cdot \|\mathcal{P}\| \cdot (b - a).$$

Exercice 1.7.

(a) Montrez que la fonction $f : [0, 1] \to [0, 1]$, définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1/q & \text{si } x = p/q, \text{ où } p, q \in \mathbb{N} \text{ avec } \mathrm{pgcd}(p, q) = 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est intégrable sur $[0, 1]$.
[*Indice* : considérez les partitions $P = \{a/b : 0 \leq a \leq b \leq B,\ \mathrm{pgcd}(a, b) = 1\}$.]

(b) Montrez que la fonction $g \circ f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, où f est la fonction de la partie (a) et

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

n'est pas intégrable sur $[0, 1]$.

Chapitre 2

La classe de fonctions intégrables

Dans ce chapitre, on étudie la classe des fonctions intégrables, c'est-à-dire l'ensemble

$$\mathcal{R}([a,b]) := \{f : X \to \mathbb{R} \,\big|\, X \supseteq [a,b],\ f \text{ est intégrable sur } [a,b]\}.$$

On commence par le résultat suivant qui établit une propriété fondamentale des membres de $\mathcal{R}([a,b])$. On a déjà vu sa démonstration au lemme 1.13(a), mais on répète son énoncé ici pour le souligner.

Théorème 2.1. *Si $f \in \mathcal{R}([a,b])$, alors elle f est bornée.*

Ce théorème implique tout de suite que les fonctions $f(x) = 1/x^\alpha$, $0 \leq x \leq 1$, où $\alpha > 0$, ne sont pas intégrables. Comme on le verra au chapitre 4, on peut étendre la définition de l'intégrale de Riemann pour que $\int_0^1 x^{-\alpha}\mathrm{d}x$ soit bien définie pour chaque $\alpha > -1$, même si l'intégrant n'est pas toujours dans la classe $\mathcal{R}([0,1])$.

On continue avec un résultat qui établit plusieurs propriétés habituelles de l'intégration.

Théorème 2.2. *Soient $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$.*

(a) (linéarité de l'intégrale) Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors la fonction $\lambda f + \mu g \in \mathcal{R}([a,b])$. De plus,

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

(b) (preservation d'ordre) Si $f \leq g$, alors

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

(c) (inégalité triangulaire) La fonction $|f|$ est intégrable sur $[a,b]$. De plus,

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

(d) La fonction fg est intégrable sur $[a,b]$.

Démonstration. (a) On observe que

$$R(\lambda f + \mu g, P\boldsymbol{\xi}) = \lambda R(f, P, \boldsymbol{\xi}) + \mu R(g, P\boldsymbol{\xi}).$$

Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_1, \delta_2 > 0$ tels que $|R(f, P, \boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f| < \varepsilon$ quand $\|P\| < \delta_1$ et $|R(g, P, \boldsymbol{\xi}) - \int_a^b g| < \varepsilon$ quand $\|P\| < \delta_2$. En mettant $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ et en supposant que $\|P\| < \delta$, on a que

$$\begin{aligned} \left| R(\lambda f + \mu g, P\boldsymbol{\xi}) - \lambda \int_a^b f - \mu \int_a^b g \right| &= \left| \lambda \cdot \left(R(f, P\boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f \right) + \mu \cdot \left(R(g, P, \boldsymbol{\xi}) - \int_a^b g \right) \right| \\ &\leq |\lambda| \cdot \left| R(f, P, \boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f \right| + |\mu| \cdot \left| R(g, P, \boldsymbol{\xi}) - \int_a^b g \right| \\ &\leq \varepsilon \cdot (|\lambda| + |\mu|). \end{aligned}$$

Puisque ε est aussi petit qu'on veut, ceci montre que $\lambda f + \mu g$ est intégrable et que son intégrale est égale à $\lambda \int_a^f + \mu \int_a^b g$.

(b) Exercice.

(c) L'inégalité triangulaire implique que $\big| |x| - |y| \big| \leq |x - y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Donc, $D(|f|, P) \leq D(f, P)$, ce qui implique tout de suite que $|f|$ est intégrale si f l'est. De plus, en combinant la partie (b) avec l'inégalité $-|f| \leq f \leq |f|$, on conclut que

$$\int_a^b (-|f|) \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|.$$

La partie (a) implique que $\int_a^b (-|f|) = -\int_a^b |f|$, donc $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$ comme on l'a affirmé.

(d) On observe que

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &= |f(x)(g(x) - g(y)) + g(y)(f(x) - f(y))|. \end{aligned}$$

Si $M = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ et $N = \sup_{a \leq x \leq b} |g(x)|$ (elles sont finies car f et g sont intégrables), l'inégalité triangulaire implique que

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq M \cdot |g(x) - g(y)| + N \cdot |f(x) - f(y)|$$

pour tous $x, y \in [a, b]$. On en déduit que

$$D(fg, P) \leq M \cdot D(g, P) + N \cdot D(f, P).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une partition P_1 telle que $D(f, P_1) < \varepsilon$ et une autre partition P_2 telle que $D(g, P_2) < \varepsilon$. Si $P = P_1 \cup P_2$, alors

$$D(f, P) \leq D(f, P_1) < \varepsilon \quad \text{et} \quad D(g, P) \leq D(g, P_2) < \varepsilon,$$

d'après le lemme 1.14(a). Donc

$$D(fg, P) < \varepsilon \cdot (M + N).$$

Puisque ε est aussi petit qu'on veut, ceci montre l'intégrabilité de fg. □

Théorème 2.3. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction.*

(a) Si $c \in [a, b]$ et $f \in \mathcal{R}([a, c]) \cap \mathcal{R}([c, b])$, alors $f \in \mathcal{R}([a, b])$. De plus,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \tag{2.1}$$

(b) Si $f \in \mathcal{R}([a, b])$, alors $f \in \mathcal{R}([c, d])$ pour chaque $[c, d] \subseteq [a, b]$.

Remarque 2.4. Par convention, si $a > b$, alors on pose

$$\int_a^b f := -\int_b^a .$$

Avec cette définition, la relation (2.1) est vraie pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$ si f est intégrable sur les intervalles respectifs.

Démonstration du théorème 2.3. (a) Fixons $\varepsilon > 0$. Le critère de Daroux nous dit qu'il existe une partition $P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ de $[a, c]$ et une partition $P_2 = \{x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n\}$ de $[c, b]$ telles que $D(f, P_j) < \varepsilon/2$ pour $j \in \{1, 2\}$. Clairement, $P = P_1 \cup P_2$ est une partition de $[a, b]$ et on a que

$$D(f, P) = D(f, P_1) + D(f, P_2) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Le critère de Darboux implique alors que f est intégrable.

Finalement, afin de montrer l'égalité entre les intégrales de f, on utilise les sommes de Riemann. Soit $\varepsilon > 0$. Avec la notation précédente, si P_1 et P_2 sont est assez fines (pas nécessairement les partitions mentionnées au-dessus), alors

$$\left| R(f, P_1, \boldsymbol{\xi}^{(1)}) - \int_a^c f \right| < \varepsilon, \quad \left| R(f, P_2, \boldsymbol{\xi}^{(2)}) - \int_c^b f \right| < \varepsilon, \quad \left| R(f, P_1 \cup P_2, \boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f \right| < \varepsilon,$$

pour n'importe quel choix des points $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = (\xi_1, \dots, \xi_m)$, $\boldsymbol{\xi}^{(2)} = (\xi_{m+1}, \dots, \xi_n)$ avec $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$, $1 \le j \le n$, où $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Puisque

$$R(f, P_1 \cup P_2, \boldsymbol{\xi}) = R(f, P_1, \boldsymbol{\xi}^{(1)}) + R(f, P_2, \boldsymbol{\xi}^{(2)}),$$

on déduit que

$$\left| \int_a^b f - \int_a^c f - \int_c^b f \right| < 3\varepsilon.$$

En laissant $\varepsilon \to 0^+$, on trouve que $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$, comme affirmé.

(b) On fixe $\varepsilon > 0$. Il existe une partition P de $[a, b]$ telle que $D(f, P) < \varepsilon$. Si $P' = P \cup \{c, d\}$, alors $P' \supseteq P$ et le lemme 1.14(a) implique que $D(f, P') \le D(f, P) < \varepsilon$. De plus, on observe que $P' \cap [c, d]$ est une partition de $[c, d]$ et que $D(f, P' \cap [c, d]) \le D(f, P') < \varepsilon$. Donc, f est intégrable sur $[c, d]$, comme affirmé. $\square$

On procède maintenant de prouver que plusieurs fonctions sont toujours intégrables.

Théorème 2.5. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction monotone et bornée [1], alors $f \in \mathcal{R}([a, b])$.*

Démonstration. Supposons que f est croissante ; le cas d'une fonction décroissante est très similaire.

Si $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ est une partition de $[a, b]$, on a que

$$\mathrm{osc}_f([x_{j-1}x_j]) = \sup(f([x_{j-1}, x_j])) - \inf(f([x_{j-1}, x_j])) = f(x_j) - f(x_{j-1})$$

pour chaque j, car f est croissante. Par la suite,

$$\begin{aligned} D(f, P) &= \sum_{j=1}^{n} (f(x_j) - f(x_{j-1}))(x_j - x_{j-1}) \\ &\leq \|P\| \sum_{j=1}^{n} (f(x_j) - f(x_{j-1}) \\ &= \|P\|(f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une parition P telle que $D(f, P) < \varepsilon$, en choisissant une partition assez fine. $\square$

Théorème 2.6. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est bornée et elle a seulement un nombre fini de discontinuités, alors $f \in \mathcal{R}([a, b])$.*

Démonstration. On généralise la démonstration du théorème 2.6. Tout d'abord, on peut trouver une partition $Q = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$ de $[a, b]$ telle que les seules discontinuités de f sur $[y_{j-1}, y_j]$ se trouvent aux limites y_{j-1}, y_j (ceci ne veut pas dire nécessairement que f est discontinue en y_{j-1} et en y_j ; elle peut être discontinue en un seul point.)

Par exemple, si $[a, b] = [0, 1]$ et les seules discontinuités de f sont aux points $1/3$ et $2/3$, on prend $Q = \{0, 1/3, 2/3, 1\}$.

Il suffit de montrer que f est intégrable sur $[y_{j-1}, y_j]$, pour chaque j. Puis, on applique le théorème 2.3(a).

Soit $j \in \{1, \ldots, m\}$. Pour alléger la notation, posons $\alpha = y_{j-1}$ et $\beta = y_j$. Fixons $\varepsilon > 0$. On sait que f est continue sur $[\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon]$. Donc, le théorème 1.12 implique qu'elle y est intégrable. Il existe, alors, une partition P' de $[\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon]$ telle que $D(f, P') < \varepsilon$. Posons $P = \{\alpha\} \cup P' \cup \{\beta\}$, qui est une partition de $[\alpha, \beta]$.

Si on écrit $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ avec $\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \beta$, alors $x_1 = \alpha + \varepsilon$, $x_{n-1} = \beta - \varepsilon$ et, en général, $P' = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$. Posons $M := \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| < \infty$. On a que

$$\begin{aligned} D(f, P) &= \sup_{\alpha \leq x, y \leq \alpha + \varepsilon} |f(x) - f(y)| \cdot \varepsilon + D(f, P') + \sup_{\beta - \varepsilon \leq x, y \leq \beta} |f(x) - f(y)| \cdot \varepsilon \\ &\leq 2M\varepsilon + \varepsilon + 2M\varepsilon = (4M + 1)\varepsilon. \end{aligned}$$

1. Notons que pour une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ les valeurs $f(b), f(a)$ sont dans $\mathbb{R}$. Puisque toutes les valeurs de f se trouvent entre $f(a)$ et $f(b)$, alors f est une fonction bornée. Ceci veut dire qu'on peut enlever l'hypothèse que f est bornée de l'énoncé du théorème 2.5. On la laisse pour mettre emphase que le théorème ne s'applique pas à fonctions non-bornées comme $1/\sqrt{x}$, $0 < x \leq 1$. En effet, observons que cette fonction n'est pas définie en $x = 0$. De plus, on ne peut pas la prolonger sur $[0, 1]$ d'une sorte qu'elle reste monotone.

Puisque ε peut devenir aussi petit qu'on veut, le critère de Darboux implique que f est intégrable. $\square$

Théorème 2.7. *Soit $f : [a,b] \to [c,d]$ une fonction intégrable sur $[a,b]$ et $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, leur composition $g \circ f$ est intégrable sur $[a,b]$.*

Démonstration. Soit $M = \sup |g| < \infty$. On fixe $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $|g(w) - g(z)|$ si $|w - z| < \delta$ avec $w, z \in [c,d]$.

Si P est une partition de $[a,b]$ avec $\mathcal{I}(P) = \{I_1, \ldots, I_n\}$, alors

$$D(g \circ f, P) = \sum_{j=1}^{n} \sup_{x,y \in I_j} |g(f(x)) - g(f(y))| \cdot |I_j|.$$

Quand $f(x)$ et $f(y)$ sont proches, on peut utiliser la continuité de g pour montrer que $|g(f(x)) - g(f(y))$ est petite. Pour cette raison, posons

$$D_j = \operatorname{osc}_f(I_j) = \sup_{x,y \in I_j} |f(x) - f(y)| \quad (1 \le j \le n).$$

On divise les j en deux ensembles :

$$\mathcal{J}_{\text{bons}} = \{1 \le j \le n : D_j < \delta\} \quad \text{et} \quad \mathcal{J}_{\text{mauvais}} = \{1 \le j \le n : D_j \ge \delta\}.$$

Pour les 'bons' j, on a que $D_j < \delta$, donc

$$\sup_{x,y \in I_j} |g(f(x)) - g(f(y))| \le \varepsilon$$

par la définition de δ. Pour les 'mauvais' j, on observe tout simplement que

$$\sup_{x,y \in I_j} |g(f(x)) - g(f(y))| \le 2M.$$

Donc,

$$\begin{aligned} D(g \circ f, P) &\le \varepsilon \sum_{j \in \mathcal{J}_{\text{bons}}} |I_j| + 2M \sum_{j \in \mathcal{J}_{\text{mauvais}}} |I_j| \\ &\le \varepsilon(b-a) + 2M \sum_{j \in \mathcal{J}_{\text{mauvais}}} |I_j| \end{aligned}$$

car la longueur totale est $\sum_{j=1}^{n} |I_j| = b - a$. On montre que la dernière somme est petite car f est intégrable : par l'inégalité de Markov, on a que

$$\sum_{j \in \mathcal{J}_{\text{mauvais}}} |I_j| = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{D_j \ge \delta} \cdot |I_j| \le \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{D_j \ge \delta} \cdot \frac{D_j}{\delta} \cdot |I_j| \le \sum_{j=1}^{n} \frac{D_j}{\delta} \cdot |I_j| = \frac{D(f,P)}{\delta}.$$

Puisque f est intégrable, il existe P telle que $D(f,P) < \varepsilon\delta/(M+1)$. Alors, pour cette partition, on a que $D(g \circ f, P) \le \varepsilon \cdot (b - a + 2)$, ce qui implique l'intégrabilité de $g \circ f$. $\square$

Remarque 2.8. L'hypothèse que g est continue ne peut pas être enlevée totalement du théorème 2.7. En effet, l'exercice 1.7 donne un exemple d'un pair de fonctions $f : [a, b] \to [c, d]$ et $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ telles que f est intégrable, g a seulement un point de discontinuité et la fonction $g \circ f$ n'est pas intégrable. $\square$

Exemple 2.9. Si $f \in \mathcal{R}([a, b])$, alors le théorème 2.7 implique tout-de-suite que les fonctions $e^f, |f|, \sin(f)$ et $\cos(f)$ sont aussi intégrables sur $[a, b]$. De plus, $f^n \in \mathcal{R}([a, b])$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et, si $f \geq 0$, alors $f^p \in \mathcal{R}([a, b])$ pour tout $p \geq 0$. Finalement, si $f \geq \varepsilon$, où ε est un nombre positif fixé, alors $\log(f) \in \mathcal{R}([a, b])$ aussi. $\square$

Exercices

Exercice 2.1. Calculez les limites suivantes :

$$(a) \quad \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{n^{1/3}}{N^{4/3}} \; ; \qquad (b) \lim_{N\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{1}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{N}\right) \right]^{\frac{1}{N}} .$$

Exercice 2.2. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue avec $f \geq 0$. Si $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$, alors montrez que $f = 0$.

Exercice 2.3. Trouvez une fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ intégrable ayant une infinité de points de discontinuité.

Exercice 2.4. Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$.

(a) L'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\mathbb{R}^n$ dit que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right),$$

pour tous $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Utilisez ce fait pour montrer l'inégalité de Cauchy-Scwarz pour l'intégrale de Riemann : si $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$, alors

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2 \mathrm{d}x \right) \left(\int_a^b g(x)^2 \mathrm{d}x \right).$$

(b) Donnez une démonstration directe de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'intégrale de Riemann en utilisant le fait que

$$\int_a^b (f(x) + \lambda g(x))^2 \mathrm{d}x \geq 0,$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) Montrez l'inégalité de Minkowksi :

$$\left(\int_a^b (f(x) + g(x))^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b f(x)^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2} + \left(\int_a^b g(x)^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2}.$$

Annexe : le théorème de Lebesgue

On conclut le chapitre sur la classe de fonctions intégrables avec le théorème fameux de Lebesgue qui caractérise les fonctions intégrables. On commence avec une définition :

Définition 2.10. Soit $E \subseteq \mathbb{R}$. On dit que E a **mesure 0** si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe des intervalles ouverts (a_j, b_j), $j \geq 1$, tels que

$$E \subseteq \bigcup_{j\geq 1}(a_j, b_j) \quad \text{et} \quad \sum_{j\geq 1}(b_j - a_j) < \varepsilon. \qquad \square$$

Théorème 2.11. *Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si f est bornée et l'ensemble de discontinuités de f*

$$\mathrm{disc}(f) := \{x \in [a, b] \,:\, f \text{ est discontinue en } x\}$$

a mesure 0.

On montre d'abord la direction converse du théorème 2.11. L'argument est une généralisation de la démonstration du théorème 2.6 (plus un argument de compacité).

Démonstration du théorème 2.11 : "$\Leftarrow$". Soit

$$M = \sup_{a\leq x\leq b} |f(x)|.$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe un recouvrement ouvert de $\mathrm{disc}(f)$, soit $\bigcup_{j\geq 1}(a_j, b_j) \supseteq \mathrm{disc}(f)$, tel que

$$\sum_{j=1}^{\infty}(b_j - a_j) < \varepsilon. \tag{2.2}$$

Posons

$$A := \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j) \quad \text{et} \quad K := [a, b] \setminus A.$$

Puisque A est ouvert, alors K est fermé. ll est aussi borné, donc il est compact.

Or, pour chaque $x \in K$, il existe $\delta(x) = \delta(x, \varepsilon) \in (0, \varepsilon)$ tel que

$$y \in [a, b],\ |y - x| \leq \delta(x) \quad \Longrightarrow \quad |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon. \tag{2.3}$$

Les ensembles ouverts $(x - \delta(x), x + \delta(x))$, $x \in K$, couvre K. Puisque K est compact, il existe un choix d'un nombre fini d'éléments de K, soient $k_1, \ldots, k_r \in K$, tel que

$$K \subseteq \bigcup_{s=1}^{r}(k_s - \delta_s, k_s + \delta_s), \quad \text{où} \quad \delta_s := \delta(k_s).$$

Soit L l'ensemble de toutes les limites $k_s \pm \delta_s$, et considérons la partition

$$P := \{a, b\} \cup \{x \in L : a \leq x \leq b\}.$$

Supposons que $\mathcal{I}(P) = \{I_1, \ldots, I_n\}$. Fixons $m \in \{0, \ldots, n\}$ et considérons ce qui se-passe dans l'intervalle I_m. On sépare deux cas :

Cas 1 : il existe $s \leq r$ tel que $I_j \subseteq [k_s - \delta_s, k_s + \delta_s]$. On appelle $\mathcal{J}_{\text{bons}}$ l'ensemble de tels j.

Pour un 'bon' j, la relation (2.3) implique que

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(k_s)| + |f(k_s) - f(y)| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

pour tous $x, y \in I_j$. Donc,

$$\operatorname{osc}_f(I_j) \leq 2\varepsilon. \tag{2.4}$$

Cas 2 : il n'existe pas de $s \leq r$ tel que $I_j \subseteq [k_s - \delta_s, k_s + \delta_s]$. On appelle $\mathcal{J}_{\text{mauvais}}$ l'ensemble de tels j. Pour les 'mauvais' j, on utilise la borne triviale

$$\operatorname{osc}_f(I_j) \leq 2M. \tag{2.5}$$

On affirme, encore, que

$$\sum_{j \in \mathcal{J}_{\text{mauvais}}} |I_j| \leq 3\varepsilon. \tag{2.6}$$

Soit $I_j = [x_{j-1}, x_j]$. Si $x_{j-1} = a$ ou $x_j = b$, alors on utilise la borne triviale $|I_j| \leq \varepsilon$. Il existe exactement deux tels j. Donc, il reste à montrer que

$$\sum_{\substack{j \in \mathcal{J}_{\text{mauvais}} \\ a, b \notin I_j}} |I_j| \leq \varepsilon. \tag{2.7}$$

On sait que $x_{j-1}, x_j \in L$, c'est-à-dire x_{j-1} et x_j sont de la forme $k_s \pm \delta_s$. Alors, la seule façon dont on peut avoir que $I_j \nsubseteq [k_s - \delta_s, k_s + \delta_s]$ pour un certain s et d'avoir que

$$I_j \subseteq [a, b] \setminus \bigcup_{s=1}^{r} (k_s - \delta_s, k_s + \delta_s).$$

Puisque $K \subset \bigcup_{s=1}^{r} (k_s - \delta_s, k_s + \delta_s)$, on trouve que

$$I_j \subseteq ([a, b] \setminus K) \subseteq A = \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j).$$

Par la suite,

$$\bigcup_{j \in \mathcal{J}_{\text{mauvais}}} I_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j).$$

Puisque I_j° sont disjoints entre eux, notre affirmation (2.7) découle de [2] (2.2).

2. En fait, cette étape a besoin de justification : il faut montrer d'abord qu'on peut supposer que les intervalles (a_j, b_j) sont aussi disjoints. Voir la proposition A.2.

Or, c'est facile de finir la démonstration : on a que

$$\begin{aligned} D(f,P) &= \sum_{j\in\mathcal{J}_{\text{bons}}} \operatorname{osc}_f(I_j)|I_j| + \sum_{j\in\mathcal{J}_{\text{mauvais}}} \operatorname{osc}_f(I_j)|I_j| \\ &\le \sum_{j\in\mathcal{J}_{\text{bons}}} 2\varepsilon|I_j| + \sum_{j\in\mathcal{J}_{\text{mauvais}}} 2M|I_j| \\ &\le 2\varepsilon\cdot(b-a) + 2M\cdot 3\varepsilon = (b-a+6M)\varepsilon. \end{aligned}$$

Alors, le critère de Darboux implique l'intégrabilité de f. □

Finalement, on montre que l'ensemble de discontinuités d'une fonction intégrable a mesure 0. Cette démonstration est plus astucieuse.

On introduit d'abord la notion de l'oscillation de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ au point x par

$$\operatorname{osc}_f(x) := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \operatorname{osc}_f([x-\varepsilon, x+\varepsilon]).$$

Cette limite existe car

$$\operatorname{osc}_f([x-\varepsilon, x+\varepsilon]) = \sup_{x-\varepsilon\le t,s\le x+\varepsilon} |f(t)-f(s)|$$

est évidemment une fonction croissante en ε.

Lemme 2.12. *La fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue en x si, et seulement si,* $\operatorname{osc}_f(x) = 0$.

Démonstration. Exercice. □

D'après le lemme 2.12, on a que

$$\operatorname{disc}(f) = \{x \in [a,b] : \operatorname{disc}(f) > 0\}.$$

Afin de montrer que $\operatorname{disc}(f)$ a mesure 0, on l'écrit comme la réunion dénombrable

$$\operatorname{disc}(f) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x\in[a,b] : \operatorname{disc}(f) \ge 1/k\}.$$

On a le lemme suivant :

Lemme 2.13. *Soit $E_1, E_2, \ldots$ quelques ensembles de nombres réels. Si E_j a mesure 0 pour chaque j, alors leur réunion $\bigcup_{j=1}^\infty E_j$ a aussi mesure 0.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Pour chaque j, on sait qu'il existe un ouvert $A_j \supseteq E_j$ tel que $A_j = \bigcup_{k\ge1}(a_{j,k}, b_{j,k})$ pour quelques intervalles avec $\sum_{k\ge1}(b_{j,k}-a_{j,k}) < \varepsilon/2^j$. Prenons

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j,k\ge1} (a_{j,k}, b_{j,k}).$$

On a que

$$\sum_{j,k\ge1} (b_{j,k}-a_{j,k}) < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon.$$

Puisque ε peut être aussi petit qu'on veut, on a montré que E a mesure 0. □

Corollaire 2.14. *Si $E \subseteq \mathbb{R}$ est dénombrable, alors il a mesure 0.*

Démonstration. On a que $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x_j\}$ pour quelques $x_j \in \mathbb{R}$. Evidemment, $\{x_j\}$ a mesure 0 (on peut le couvrir par $(x_j - \varepsilon, x_j + \varepsilon)$, pour n'importe quel $\varepsilon > 0$). Donc, E a aussi mesure 0. $\square$

Démonstration du théorème 2.11 : "⇒". Soit $\alpha > 0$. La discussion ci-dessus implique qu'il suffit de montrer que l'ensemble

$$E_\alpha := \{x \in [a, b] : \operatorname{osc}_f(x) \geq \alpha\}$$

a mesure 0. Fixons $\varepsilon > 0$. L'intégrabilité de f implique qu'il existe une partition $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ avec

$$D(f, P) \leq \varepsilon\alpha. \tag{2.8}$$

Soit $\mathcal{I}(P) = \{I_1, \ldots, I_n\}$, et soit

$$\mathcal{J} = \{1 \leq j \leq n : I_j^\circ \cap E \neq \emptyset\}.$$

On a que

$$E \subseteq \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \cup \left(\bigcup_{j \in \mathcal{J}} I_j^\circ \right) \subseteq \left(\bigcup_{j=1}^{n} (x_j - \varepsilon/n, x_j + \varepsilon/n) \right) \cup \left(\bigcup_{j \in \mathcal{J}} I_j^\circ \right),$$

où I° dénote l'intérieur de I (voir l'annexe A). On affirme que

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} |I_j| \leq \varepsilon. \tag{2.9}$$

Pour montrer (2.9), notons que si $x \in I_j^\circ$, alors $\operatorname{osc}_f(I_j) \geq \operatorname{osc}_f(x)$. Donc, si $I_j \cap E \neq \emptyset$, on a que $\operatorname{osc}_f(I_j) \geq \alpha$. On en déduit que

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} |I_j| \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ \operatorname{osc}_f(I_j) \geq \alpha}} |I_j| \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ \operatorname{osc}_f(I_j) \geq \alpha}} |I_j| \frac{\operatorname{osc}_f(I_j)}{\alpha} \leq \sum_{j=1}^{n} |I_j| \frac{\operatorname{osc}_f(I_j)}{\alpha} = \frac{D(f, P)}{\alpha} \leq \varepsilon$$

par (2.8). Ceci montre (2.9).

Or, la relation (2.9) et le fait que $\sum_{j=1}^{n} [(x_j + \varepsilon/n) - (x_j - \varepsilon/n)] = 2\varepsilon$ montrent qu'on a couvert E_α par un ensemble d'intervalles ouverts de longueur totale $\leq 3\varepsilon$. Puisque ε peut être aussi qu'on veut, on trouve que E_α a mesure 0. Ceci conclut la démonstration. $\square$

Chapitre 3

Primitives

On a vu des théorèmes généraux qui nous permettent de montrer que plusieurs fonctions importantes sont intégrables. Pour toutes ces fonctions, si on peut trouver une primitive, le théorème fondamental du calcul intégral (théorème 1.6) nous permettent de calculer facilement leur intégrale. Une question importante alors est :

Quelles fonctions possèdent une primitive ?

On va répondre partiellement à cette question. On commence avec le résultat suivant qui nous guident dans notre cherche de primitives :

Théorème 3.1. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et possède une primitive F, alors il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que*

$$F(x) = c + \int_a^x f \quad \textit{pour tout } x \in [a, b].$$

Démonstration. Soit $x \in [a, b]$. Le théorème 2.3(b) implique que $f \in \mathcal{R}([a, x])$. Puisque F est une antidérivée de f sur $[a, b]$, elle en est une sur $[a, x]$. Donc, le théorème fondamental du calcul implique que

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f,$$

ce qui montre le théorème en prenant $c = F(a)$. □

Remarque 3.2. Le théorème 3.1 montre que si une fonction intégrable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ possède une primitive, alors la fonction $F(x) = \int_a^x f$ est une antidérivée de f. Cependant, ce n'est pas vrai que chaque fonction possède une antiderivée. Par exemple, si

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } 1 < x \leq 2, \end{cases},$$

alors

$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ x - 1 & \text{si } 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

et on voie directement que F n'est pas différentiable en 1, donc elle ne peut pas être une primitive de f. Donc f n'a pas une primitive (sinon, F en serait une).

Remarque 3.3. On peut montrer une généralisation du théorème pour des fonctions qui ne sont pas intégrables. En effet, soit $F, G : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont deux primitives de la même fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On affirme qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $G = F + c$.

En effet, soit $h = F - G$. On a que h est continue sur $[a,b]$ et que, pour tout $x \in (a,b)$, $h'(x) = 0$. Donc, si $x, y \in [a,b]$, en appliquant le théorème des accroissements finis sur l'intervalle dont les limites sont x et y, on trouve que $h(x) - h(y) = h'(c)(x-y) = 0$ pour un certain c entre x et y. En particulier, $h(x) = h(y)$ pour tous $x, y \in [a,b]$, ce qui implique que h est une fonction constante.

On montre maintenant un converse partiel au théorème 3.1 :

Théorème 3.4. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Pour tout $x \in [a,b]$, posons*

$$F(x) = \int_a^x f,$$

qui est bien-définie grâce au théorème 2.3(b).

(a) La fonction F est continue. En fait, elle est Lipschitzienne :

$$|F(x) - F(y)| \leq (\sup |f|) \cdot |x - y| \quad \text{pour tout } x, y \in [a,b].$$

(b) Si f est continue en $x_0 \in [a,b]$, alors F est différentiable en x_0 et

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

En particulier, si f est continue sur (a,b), alors F est une primitive de f.

Démonstration. (a) Soit $a \leq x \leq y \leq b$. Le théorème 2.3(a) implique que $F(y) - F(x) = \int_x^y f$. Si $M = \sup |f|$, alors

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_x^y f \right| \leq \int_x^y |f| \leq \int_x^y M = M \cdot (y - x),$$

d'après le théorème 2.2.

(b-i) Avec la convention que $\int_c^d f := -\int_d^c f$ si $c \geq d$, on a que $F(x) - F(x_0) = \int_x^{x_0} f$ pour tout $x \in [a,b]$. Si $x \neq x_0$, on trouve que

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) &= \frac{1}{x - x_0} \left(\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t - f(x_0)(x - x_0) \right) \\ &= \frac{1}{x - x_0} \left(\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t - \int_x^{x_0} f(x_0)\mathrm{d}t \right) \\ &= \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Puisque f est supposée être continue en x_0, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ si $t \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a,b]$. Si $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a,b]$, on a que $|t - x_0| < \delta$ pour tout t entre x et x_0. Par conséquent,

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{x - x_0} \int_x^{x_0} |f(t) - f(x_0)|\mathrm{d}t \leq \frac{1}{x - x_0} \int_x^{x_0} \varepsilon \, \mathrm{d}t = \varepsilon,$$

d'après le théorème 2.2. Ceci implique que F est différentiable en x_0 et que sa dérivée est égale à $f(x_0)$.

(b-ii) Puisque G est une primitive de f sur l'intervalle $[a, b]$, elle l'est aussi sur l'intervalle $[a, x]$, pour tout $x \in [a, b]$. Donc $F(x) = G(x) - G(a)$, d'après le théorème 1.6. En particulier, puisque G est une primitive de f, cette relation implique que F l'est aussi. $\square$

Remarque 3.5. La condition que f est continue n'est pas nécessaire pour l'existence d'une primitive. On donne ici un exemple d'une fonction discontinue possédant une primitive. Elle est définie comme

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ (-1)^n L_n(x) & \text{si } \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n},\ n \geq 1, \end{cases}$$

où L_n est la fonction linéaire avec $L_n(\frac{1}{n+1}) = -1$ et $L_n(\frac{1}{n}) = 1$. C'est facile de vérifier que f est continue sur $[-1, 0) \cup (0, 1]$, mais qu'elle est discontinue en 0. En effet, $\limsup_{x\to 0^+} f(x) = 1$ et $\liminf_{x\to 0^+} f(x) = -1$. De plus, f est bornée : on a que $|f(x)| \leq 1$ pour tout $x \in [-1, 1]$. Donc, f est intégrable d'après le théorème 2.6. On considère la fonction $F(x) = \int_{-1}^{x} f$. Puisque f est continue sur $[-1, 1]\setminus\{0\}$, alors F est dérivable sur cet ensemble et $F'(x) = f(x)$ pour $x \neq 0$. Il reste à montrer que $F'(0) = f(0) = 0$.

En effet, pour $x \leq 0$, on a que $F(x) = (x^2 - 1)/2$, donc

$$\frac{F(x) - F(0)}{x} = \frac{x}{2} \to 0 \quad \text{lorsque } x \to 0^-.$$

Pour $x > 0$, on utilise la formule

$$\frac{F(x) - F(0)}{x} = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

On observe que

$$\int_{1/(n+1)}^{1/n} f(t)\mathrm{d}t = (-1)^n \int_{1/(n+1)}^{1/n} L_n(t)\mathrm{d}t = 0 \quad (n \geq 1)$$

par symétrie (si c_n est le centre de l'intervalle $[1/(n+1), 1/n]$, alors la fonction $x \to L_n(x+c_n)$ est impaire). Par la suite, si $N \in \mathbb{N}$ est tel que $1/(N+1) \leq x < 1/N$, alors on trouve que

$$\left|\frac{F(x) - F(0)}{x}\right| = \left|\frac{1}{x} \int_{1/(N+1)}^{x} f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{x} \int_{1/(N+1)}^{1/N} \mathrm{d}t = \frac{1}{N(N+1)x} \leq \frac{1}{N} \leq 2x$$

par la définition de N, ce qui implique que F est différentiable en 0 et que $F'(0) = 0 = f(0)$. $\square$

Méthodes d'intégration

Finalement, on utilise la théorie d'intégration de Riemann pour donner de preuves rigoureuses de deux méthodes d'intégration principales qu'on connait du calcul intégral.

Théorème 3.6 (intégration par parties)**.** *Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que :*

— *f et g sont continues sur $[a, b]$;*
— *f et g sont différentiables sur (a, b) ;*
— *f' et g' sont intégrables[1] sur $[a, b]$.*

Alors, on a que

$$\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{b} - \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

Démonstration. La fonction $h = f'g + fg'$ est intégrable sur $[a, b]$ selon le théorème 2.2 (on utilise les parties (d) et (a)). De plus, la fonction fg est continue sur $[a, b]$ et différentiable sur (a, b), et $(fg)'(x) = h(x)$ pour tout $x \in (a, b)$, d'après la règle du produit. Donc le théorème 1.6 implique que

$$\int_a^b (f'g + fg') = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{b},$$

d'où le résultat découle. □

Théorème 3.7 (changement de variables)**.** *Soit $\phi : [a, b] \to [c, d]$ une fonction différentiable dont la dérivée est integrable sur $[a, b]$. Soit aussi une fonction continue $f : [c, d] \to \mathbb{R}$. Si $\{\phi(a), \phi(b)\} = \{c, d\}$, alors*

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\mathrm{d}x.$$

Démonstration. Soit $F(x) = \int_c^x f$, pour que $F' = f$ par l'hypothèse que f est continue. Par la suite,

$$(F \circ \phi)'(t) = F'(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t),$$

c'est-à-dire $F \circ \phi$ est une primitive de $(f \circ \phi) \cdot \phi'$. Par conséquent,

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t = F(\phi(t))\Big|_{t=a}^{b} = F(\phi(b)) - F(\phi(a)) = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\mathrm{d}x,$$

ce qui termine la preuve. □

Exercices

Exercice 3.1. Vrai ou faut ?

(a) Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ admettant une primitive sur $[a, b]$ est intégrable.
(b) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction dont la valeur absolue est continue, alors f est intégrable.

1. Si $f'(a)$ et $f'(b)$ n'existe pas, on pose simplement $f'(a) = f'(b) = 0$; ceci n'affecte pas l'intégrabilité de f' ni la valeur de l'intégrale $\int_a^b f'g$, comme on l'a vu à l'exercice 1.5. On fait la même chose pour g aussi.

Exercice 3.2. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Calculez

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x} \int_a^x f(t) \mathrm{d}t.$$

Exercice 3.3. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \begin{cases} x \log x & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

(a) Montrez que f est intégrable, ainsi que

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

(b) Calculez $\int_0^1 f(x) \mathrm{d}x$.

Exercice 3.4. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Simplifiez l'expression suivante :

$$\frac{d}{\mathrm{d}x} \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) \mathrm{d}t.$$

Exercice 3.5. (a) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $g : [a, b] \to [0, +\infty)$ une fonction intégrable. Montrez qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x) g(x) \mathrm{d}x = f(c) \int_a^b g(x) \mathrm{d}x.$$

[*Indice :* Observez que $m \int_a^b g(x) \mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x) g(x) \mathrm{d}x \leq M \int_a^b g(x) \mathrm{d}x$, où $m = \min f(x)$ et $M = \max f(x)$.

(b) (difficile) Soit $f \in C^1([a, b])$ une fonction décroissante et $g \in C([a, b])$. Montrez qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x) g(x) \mathrm{d}x = f(a) \int_a^c g(x) \mathrm{d}x + f(b) \int_c^b g(x) \mathrm{d}x.$$

[*Indice :* considérez la fonction $G(x) = \int_a^x g(t)$ et intégrez par parties.]

(c) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable dont la dérivée f' est monotone et satisfait l'inégalité $f'(x) \geq m > 0$ pour tout $x \in [a, b]$. Montrez que

$$\left| \int_a^b \cos(f(x)) \mathrm{d}x \right| \leq \frac{2}{m}.$$

[*Indice* : multipliez et divisez l'integrand par $f'(x)$.]

Exercice 3.6. (a) Si $x > 1$, alors montrez que

$$\int_0^1 \frac{2^t}{\log(x^2+2^t-1)}\mathrm{d}t = \frac{1}{\log 2}\int_{x^2}^{x^2+1}\frac{\mathrm{d}t}{\log t} = \frac{1}{\log 2}\int_{\log(x^2)}^{\log(x^2+1)}\frac{e^t}{t}\mathrm{d}t.$$

(b) Calculez

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\int_0^1 \frac{2^t}{\log(x^2+2^t-1)}\mathrm{d}t.$$

Exercice 3.7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur chaque intervalle fermé $[a, b]$ et 1-périodique (c'est-à-dire, $f(x+1) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

(a) Pour chaque $a \in \mathbb{R}$, montrez que $\int_a^{a+1} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

(b) Si f est différentiable k-fois sur $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, et sa k-ième dérivée est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, alors montrez que, pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on a que [2]

$$\int_0^1 f(x)\sin(2\pi nx)\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{\lfloor k/2\rfloor}}{(2\pi n)^k}\int_0^1 f^{(k)}(x)T_k(nx)\mathrm{d}x,$$

où

$$T_k(x) = \begin{cases} \sin(2\pi x) & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \cos(2\pi x) & \text{si } k \text{ est impair.}\end{cases}$$

Déduisez que

$$\left|\int_0^1 f(x)\sin(2\pi nx)\mathrm{d}x\right| \leq \frac{1}{(2\pi|n|)^k}\sup_{0\leq x\leq 1}|f^{(k)}(x)|.$$

Exercice 3.8. Pour chaque $x \geq 2$, on définit $\mathrm{li}(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t}$.

(a) Montrez que, pour chaque $N \in \mathbb{N}$, il existe une constante c_N telle que

$$\mathrm{li}(x) = x\sum_{n=1}^{N}\frac{(n-1)!}{(\log x)^n} + c_N + N!\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\log t)^{N+1}} \quad (x \geq 2).$$

(b) Montrez que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{li}(x)}{x/\log x} = 1.$$

[*Indice* : Règle de l'Hôpital.]

Exercice 3.9. Soit f une fonction continue, strictement croissante sur $[0, a]$ et nulle à l'origine. Montrez que

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t = xf(x) \qquad (x \in [0, a]).$$

[*Indice* : Attention, la fonction f n'est pas supposée être différentiable. Vous pouvez essayer trouver une approximation de f qui est différentiable. De façon alternative, on peut interpreter l'égalité à montrer de façon géométrique.]

2. On dénote par $\lfloor x\rfloor$ la partie entier de x, c'est-à-dire $\lfloor x\rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$.

Chapitre 4

Intégrales impropres

Dans cette section, on étendre la classe des fonctions intégrables pour inclure quelques fonctions non-bornées aussi, ainsi que pour définir l'intégrale sur des intervalles non-bornés. On travaille toujours sur un intervalle I qui est **fermé**, c'est-à-dire, il est de la forme $[a, b]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$ ou $(-\infty, +\infty)$. On va écrire soit

$$\int_I f$$

pour l'**intégrale impropre** d'une fonction f sur I, soit

$$\int_a^b f, \quad \int_a^{+\infty} f, \quad \int_{-\infty}^b f, \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f,$$

selon le cas. On commence par la définition de $\int_I f$ quand $I = [a, b]$.

D'abord, on décrit la situation où la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ a seulement un point *problématique*, autour lequel elle est potentiellement non-intégrable. On commence en étudiant le cas où ce point est $x = a$:

Définition 4.1. On dénote par $\mathcal{R}^{\text{gauche}}([a, b])$ la classe des fonctions $f : X \to \mathbb{R}$ telles que :

(a) $X \supseteq [a, b]$;

(b) $f \in \mathcal{R}([a + \varepsilon, b])$ pour chaque $\varepsilon > 0$;

(c) la limite $\lim_{\varepsilon \to^+} \int_{a+\varepsilon}^b f$ existe.

Dans ce cas, on définit l'**intégrale impropre de f sur** $[a, b]$ par

$$\int_a^b f := \lim_{\varepsilon \to^+} \int_{a+\varepsilon}^b f,$$

et on dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f$ **converge**. □

Remarque 4.2. Si $f \in \mathcal{R}([a, b])$, alors d'après le théorème 2.3 on sait que $f \in \mathcal{R}([a + \varepsilon, b])$ pour chaque $\varepsilon > 0$. De plus,

$$\int_{a+\varepsilon}^b f - \int_a^b f = \int_a^{a+\varepsilon} f \to \int_a^a f = 0$$

quand $\varepsilon \to 0^+$ par la continuité de l'intégrale (voir le théorème 3.4(a)). Donc on voit que $f \in \mathcal{R}^{\text{gauche}}([a,b])$ et que son intégral impropre de f sur $[a,b]$ est égale à son intégrale propre sur le même intervalle. En particulier, on peut utiliser le symbole $\int_a^b f$ sans ambiguïté.

Exemple 4.3. Soit la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, définie par $f(0) = 0$ et par $f(x) = 1/\sqrt{x}$ si $0 < x \leq 1$. Evidemment, f est continue sur $(0,1]$, donc intégrable sur $[\varepsilon, 1]$, pour chaque $\varepsilon > 0$. De plus, puisque $2\sqrt{x}$ est une antidérivée de f sur $[\varepsilon, 1]$, on a que

$$\int_\varepsilon^1 f = 2\sqrt{x}\,\Big|_{x=\varepsilon}^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \to 2 \quad \text{quand } \varepsilon \to 0^+.$$

Donc, $f \in \mathcal{R}^{\text{gauche}}([0,1])$ et $\int_0^2 f = 2$. □

De façon analogue, on définit la classe de fonctions $\mathcal{R}^{\text{droite}}([a,b])$:

Définition 4.4. On dénote par $\mathcal{R}^{\text{droite}}([a,b])$ la classe des fonctions $f : X \to \mathbb{R}$ telles que :
(a) $X \supseteq [a,b]$;
(b) $f \in \mathcal{R}([a, b-\varepsilon])$ pour chaque $\varepsilon > 0$;
(c) la limite $\lim_{\varepsilon \to +} \int_a^{b-\varepsilon} f$ existe.
Dans ce cas, on définit l'**intégrale impropre de f sur** $[a,b]$ par

$$\int_a^b := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f,$$

et on dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f$ **converge**. □

Comme avant, si $f \in \mathcal{R}([a,b])$, alors $f \in \mathcal{R}^{\text{droite}}([a,b])$ et ses intégrales propres et impropres sur $[a,b]$ ont la même valeur.

Lemme 4.5. *Si $[c,d] \subset [a,b]$, alors on a que $\mathcal{R}^{gauche}([a,b]) \subseteq \mathcal{R}^{gauche}([c,d])$, ainsi que $\mathcal{R}^{droite}([a,b]) \subseteq \mathcal{R}^{droite}([c,d])$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{R}^{\text{gauche}}([a,b])$. Alors, $f : X \to \mathbb{R}$, où $X \supseteq [a,b]$. En particulier, $X \supseteq [c,d]$. Si $[c,d] \subseteq (a,b]$, alors la partie (b) de la définition 4.1 et le théorème 2.3 impliquent que $f \in \mathcal{R}([c,d]) \subseteq \mathcal{R}^{\text{gauche}}$.

Finalement, supposons que $c = a$. Comme avant, on a que $f \in \mathcal{R}([a+\varepsilon, d])$ pour chaque $\varepsilon > 0$. Donc, il suffit de montrer que la limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^d f$$

existe. On sait qu'une limite $\lim_{x \to x_0} h(x)$ existe si et seulement si pour chaque $\eta > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $x, y \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, alors $|h(x) - h(y)| < \eta$. (C'est la convergence de Cauchy pour les limites de fonctions.) Puisque

$$\int_{a+\varepsilon}^d f - \int_{a+\varepsilon'}^d f = \int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} f = \int_{a+\varepsilon}^b f - \int_{a+\varepsilon'}^b f,$$

et la limite $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f$ existe, alors la limite $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^d f$ existe aussi. Ceci montre que $f\in\mathcal{R}^{\text{gauche}}([c,d])$.

La démonstration de l'affirmation que $\mathcal{R}^{\text{droite}}([a,b])\subset\mathcal{R}^{\text{droite}}([c,d])$ est similaire. $\square$

Finalement, on donne la définition de la classe générale de fonctions intégrables de façon impropre sur $[a,b]$, où on permet plusieurs points "problématiques" :

Définition 4.6. On dénote par $\mathcal{R}^*([a,b])$ la classe des fonctions $f : X\to\mathbb{R}$ telles que :

(a) $X\supseteq[a,b]$;

(b) il existe une partition $\{p_0,p_1,\dots,p_n\}$ de $[a,b]$ telle que, pour chaque $j\in\{1,\dots,n\}$, on a que $f\in\mathcal{R}^{\text{gauche}}([p_{j-1},p_j])\cup\mathcal{R}^{\text{droite}}([p_{j-1},p_j])$.

Dans ce cas, on définit l'**intégrale impropre** de f sur $[a,b]$ par

$$\int_a^b f := \sum_{j=1}^n \int_{p_{j-1}}^{p_j} f,$$

et on dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f$ **converge**. $\square$

Remarque 4.7. La définition de la classe $\mathcal{R}^*([a,b])$ et de la valuer de l'intégrale impropre ne dépende pas du choix de la partition $P=\{p_0,p_1,\dots,p_n\}$. C'est-à-dire, si $Q=\{q_0,q_1,\dots,q_m\}$ est une autre partition de $[a,b]$, alors

$$\sum_{j=1}^n\int_{p_{j-1}}^{p_j} f = \sum_{i=1}^m\int_{q_{i-1}}^{q_i} f. \tag{4.1}$$

Considérons la réunion $P\cup Q$ qui partagent $[a,b]$ dans quelques intervalles, soit $\mathcal{I}(P\cup Q)=\{I_1,\dots,I_k\}$. Puisque $P\subseteq P\cup Q$, on sait que $[p_{j-1},p_j]=I_{k_{j-1}+1}\cup\cdots I_{k_j}$ pour quelques intervalles. Supposons que $f\in\mathcal{R}^{\text{gauche}}([p_{j-1},p_j])$ (le cas où $f\in\mathcal{R}^{\text{droite}}([p_{j-1},p_j])$ est similaire). Le lemme 4.5 implique alors que $f\in\mathcal{R}^{\text{gauche}}(I_\ell)$ pour chaque $\ell\in\{k_{j-1}+1,\dots,k_j\}$. En fait, il faut que $f\in\mathcal{R}(I_\ell)$ quand $k_{j-1}+2\le\ell\le j_k$, car le seul point (potentiellement) problématique est en $x=p_{j-1}$. Donc, c'est facile de voir que

$$\int_{p_{j-1}}^{p_j} f = \sum_{k_{j-1}<\ell\le k_j}\int_{I_\ell} f.$$

En sommant sur j, on trouve que

$$\sum_{j=1}^n\int_{p_{j-1}}^{p_j} f = \sum_{\ell=1}^k\int_{I_\ell} f.$$

D'autre côté, on a que $Q\subseteq P\cup Q$. Donc, en répétant l'argument ci-dessus, on trouve que

$$\sum_{i=1}^m\int_{q_{i-1}}^{q_i} f = \sum_{\ell=1}^k\int_{I_\ell} f.$$

Donc, on voit que (4.1) est vraie. $\square$

Exemple 4.8. Soit
$$f(x) = \frac{\log x}{x-2}, \quad 0 < x < 2.$$
On veut étudier la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^2 f$. On choisi $P = \{0, 1, 2\}$. On va montrer que $f \in \mathcal{R}^{\text{gauche}}([0, 1])$, mais que $f \notin \mathcal{R}^*([1, 2])$.

Pour la première affirmation, notons que
$$f(x) = -\frac{\log x}{2} + \frac{x \log x}{2x-4}.$$
Puisque $\lim_{x\to 0^+} x \log x = 0$, alors la fonction $(x \log x)/(2x - 4)$ est bornée sur $(0, 1]$, donc intégrable : elle a qu'un point de discontinuité, dépendant de sa définition en $x = 0$ (en fait, si on pose $(x \log x)(2x-4) = 0$ quand $x = 0$, on enlève même cette discontinuité potentielle).

Alors, l'intégrabilité de f sur $[0, 1]$ est équivalente à l'intégrabilité de $\log x$ sur $[0, 1]$. Clairement, $\log x \in \mathcal{R}([\varepsilon, 1])$ pour chaque $\varepsilon > 0$. De plus, en intégrant par parties (justifiez cette étape), on a que
$$\int_\varepsilon^1 \log x \mathrm{d}x = x \log x\Big|_{x=\varepsilon}^1 - \int_\varepsilon^1 x \cdot \frac{1}{x} \mathrm{d}x = -\varepsilon \log \varepsilon - 1 + \varepsilon \to -1 \quad \text{lorsque } \varepsilon \to 0^+.$$
Donc, $\log x \in \mathcal{R}^{\text{gauche}}([0, 1])$, comme on l'affirmé.

Or, considérons la convergence de $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$. Puisque $f \in \mathcal{R}([1, 3/2])$, la convergence de $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ est équivalente à celle de $\int_{3/2}^2 f(x)\mathrm{d}x$. Si $\varepsilon > 0$, alors f est continue sur $[3/2, 2-\varepsilon]$, donc $f \notin \mathcal{R}([3/2, 2 - \varepsilon])$. Mais $f(x) \geq \log(3/2)/(2 - x)$ pour $x \in [3/2, 2)$, donc
$$\begin{aligned}\int_{3/2}^{2-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x \geq \int_{3/2}^{2-\varepsilon} \frac{\log(3/2)}{2-x}\mathrm{d}x &= -\log(3/2)\log(2-x)\Big|_{x=3/2}^{2-\varepsilon} \\ &= -\log(3/2)\log\varepsilon + \log(3/2)\log(1/2) \\ &\to +\infty \quad \text{lorsque } \varepsilon \to 0^+.\end{aligned}$$
Ceci montre que $f \notin \mathcal{R}^*([1, 2])$. □

Puis, on définit les intégrales impropres sur des intervalles non-bornés.

Définition 4.9.

(a) Pour chaque $a \in \mathbb{R}$, on dénote par $\mathcal{R}^*([a, +\infty))$ la classe des fonctions $f \in \cap_{b>a}\mathcal{R}^*([a, b])$ telles que la limite $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f$ existe. Dans ce cas, on définit l'**intégrale impropre** de f sur $[a, +\infty)$ par
$$\int_a^\infty f := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f,$$
et on dit que l'intégrale impropre $\int_a^\infty f$ **converge**.

(b) Pour chaque $b \in \mathbb{R}$, on dénote par $\mathcal{R}^*((-\infty, b])$ la classe des fonctions $f \in \cap_{a<b}\mathcal{R}^*([a, b])$ telles que la limite $\lim_{a\to-\infty} \int_a^b f$ existe. Dans ce cas, on définit l'**intégrale impropre** de f sur $(-\infty, b]$ par
$$\int_{-\infty}^b f := \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f,$$

et on dit que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{b} f$ **converge**.

(c) On dénote par $\mathcal{R}^*((-\infty,+\infty))$ la classe des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f \in \mathcal{R}^*((-\infty,c]) \cap \mathcal{R}^*([c,+\infty))$. Dans ce cas, on définit l'**intégrale impropre** de f sur $\mathbb{R} = (-\infty,+\infty)$ par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f := \int_{-\infty}^{c} f + \int_{c}^{+\infty} f,$$

et on dit que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{\infty} f$ **converge**. □

Remarque 4.10. La définition de la classe $\mathcal{R}^*((-\infty,+\infty))$ ne dépend pas du choix du point c. En effet, considérons $f \in \mathcal{R}^*((-\infty,c]) \cap \mathcal{R}^*([c,\infty))$ et un autre point $c' \in \mathbb{R}$. Notre hypothèse que $f \in \mathcal{R}^*((-\infty,c]) \cap \mathcal{R}^*([c,\infty))$ implique que $f \in \mathcal{R}^*([a,b])$ pour tous $a,b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ (montrez cette affirmation). Donc,

$$\int_{a}^{c'} f = \int_{a}^{c} f + \int_{c}^{c'} f \quad \text{et} \quad \int_{c'}^{b} f = \int_{c'}^{b} f - \int_{c}^{c'} f,$$

ce qui implique que les limites $\lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{c'} f$ et $\lim_{b\to+\infty} \int_{c'}^{b} f$ existent, c'est-à-dire $f \in \mathcal{R}^*((-\infty,c']) \cap \mathcal{R}^*([c',\infty))$. Finalement, on a que

$$\int_{-\infty}^{c'} f + \int_{c'}^{+\infty} f = \int_{-\infty}^{c} f + \int_{c}^{+\infty} f.$$

Exemple 4.11. Soit $f(x) = x^{-p}$ pour $x > 0$, et $f(0) = 0$, où $p \in \mathbb{R}$.

(a) On a que $f \in \mathcal{R}^*([1,+\infty))$ si et seulement si $p > 1$. En effet, on a que $f \in \mathcal{R}([1,M]) \subseteq \mathcal{R}^*([1,M])$ pour tout $M > 1$, par continuité. De plus, si $p \neq 1$, alors on a que

$$\int_{1}^{M} x^{-p}\mathrm{d}x = \frac{x^{1-p}}{1-p}\bigg|_{x=1}^{M} = \frac{1-M^{1-p}}{p-1}.$$

La limite de cette expression existe s-si $p > 1$, auquel cas elle est égale à $1/(p-1)$. Donc, si $p < 1$, alors $f \notin \mathcal{R}^*([1,+\infty))$, et si $p > 1$, alors $f \in \mathcal{R}^*([1,+\infty))$ et $\int_{1}^{\infty} f = 1/(p-1)$. Finalement, si $p = 1$, alors

$$\int_{1}^{M} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log x\bigg|_{x=1}^{M} = \log M \to \infty \quad \text{quand } M \to \infty.$$

Donc, on trouve que $f \notin \mathcal{R}^*([1,+\infty))$ si $p = 1$.

(b) On a que $f \in \mathcal{R}^*([0,1])$ si et seulement si $p < 1$. En effet, on a que $f \in \mathcal{R}([\varepsilon,1]) \subseteq \mathcal{R}^*([\varepsilon,1]$ pour tout $\varepsilon > 0$, par continuité. De plus, si $p \neq 1$, alors on a que

$$\int_{\varepsilon}^{1} x^{-p}\mathrm{d}x = \frac{x^{1-p}}{1-p}\bigg|_{x=\varepsilon}^{1} = \frac{1-\varepsilon^{1-p}}{1-p}.$$

La limite de cette expression existe s-si $p < 1$, auquel cas elle est égale à $1/(1-p)$. Donc, si $p < 1$, alors $f \notin \mathcal{R}^*([1,+\infty))$, et si $p > 1$, alors $f \in \mathcal{R}^*([1,+\infty))$ et $\int_1^\infty f = 1/(1-p)$. Finalement, si $p = 1$, alors

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log x\Big|_{x=\varepsilon}^1 = -\log\varepsilon \to +\infty \quad \text{quand } \varepsilon \to 0^+.$$

Donc, on trouve que $f(x) \notin \mathcal{R}^*([0,1])$ si $p = 1$.

(c) $f \notin \mathcal{R}^*([0,+\infty))$, pour tout $p \in \mathbb{R}$: si $p > 1$, alors $f \notin \mathcal{R}^*([0,1])$, et si $p \leq 1$, alors $f \notin \mathcal{R}^*([1,+\infty)$. □

Plusieurs propriétés habituelles qu'on déjà montré pour les intégrales de Riemann sont aussi vraies pour les intégrales impropres. Le théorème suivant ramasse toutes ces propriétés :

Théorème 4.12. *Soit I un intervalle fermé.*

(a) Si $J \subseteq I$ est aussi un intervalle fermé et $f \in \mathcal{R}^*(I)$, alors $f \in \mathcal{R}^*(J)$, c'est-à-dire, $\mathcal{R}^*(I) \subseteq \mathcal{R}^*(J)$.

(b) Soit $c \in I$ et posons $I^- = I \cap (-\infty, c]$ et $I^+ = I \cap [c,+\infty)$. Alors, $\mathcal{R}^*(I) = \mathcal{R}^*(I^+) \cap \mathcal{R}^*(I^-)$. De plus, si $f \in \mathcal{R}^*(I)$, alors

$$\int_I f = \int_{I^+} f + \int_{I^-} f.$$

(c) Si $f \in \mathcal{R}^*(I)$ et $c \in I$, alors la fonction $F(x) = \int_c^x f$, $x \in I$, est continue sur I. De plus, si f est continue en x_0, alors F est différentiable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

(d) Si $f, g \in \mathcal{R}^*(I)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{R}^*(I)$. De plus,

$$\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g.$$

(e) Si $f, g \in \mathcal{R}^*(I)$ et $f \leq g$, alors $\int_I f \leq \int_I g$.

Démonstration. Exercice. □

Remarque 4.13. Ce n'est pas vrai que si $f, g \in \mathcal{R}^*(I)$, alors $fg \in \mathcal{R}^*(I)$ aussi, comme pour les fonctions intégrables de façon propre. Par exemple, si $f(x) = g(x) = 1/\sqrt{x}$, alors $f, g \in \mathcal{R}^*([0,1])$ mais $fg \notin \mathcal{R}^*([0,1])$ (voir exemple 4.11). De même, ce n'est pas vrai que si $f \in \mathcal{R}^*(I)$, alors $|f| \in \mathcal{R}^*(I)$ aussi. Un exemple est donné par la fonction $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ qui appartient à $\mathcal{R}^*([1,+\infty)$, mais dont la valeur absolue n'appartient pas à $\mathcal{R}^*([1,+\infty))$ (voir l'exemple 4.17). □

Le théorème le plus important dans l'étude des intégrales impropres est le résultat suivant.

Théorème 4.14. *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions, où I est un intervalle fermé, telles que :*

— *$g \geq 0$ et $|f| \leq g$;*

— *$g \in \mathcal{R}^*(I)$;*
— *il existe un ensemble $\mathcal{C} \subseteq I$ n'ayant pas de points d'accumulation dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire, $\#(\mathcal{C} \cap [-M, M]) < \infty$ pour tout $M > 0$) tel que $f \in \mathcal{R}([\alpha, \beta])$ quand $[\alpha, \beta] \subseteq I \setminus \mathcal{C}$.*

Alors, $f \in \mathcal{R}^*(I)$ et $|\int_I f| \leq \int_I g$.

Démonstration. On montre le théorème dans le cas spécial où $I = [a, b]$; les autres cas sont traités de façon similaire. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\mathcal{C} = \{c_0, c_1, \cdots, c_n\}$ est une partition de $[a, b]$; sinon, on ajoute à $\mathcal{C}$ les points a et b. Si d_j et le centre de l'intervalle $[c_{j-1}, c_j]$, alors on considère la partition

$$P = \{c_0, d_1, c_1, d_2, c_2, \ldots, c_{n-1}, d_n, c_n\}.$$

On montrera que $f \in \mathcal{R}^{\text{gauche}}([c_{j-1}, d_j])$ et que $f \in \mathcal{R}^{\text{droite}}([d_j, c_j])$. Puisque on sait que $f \in \mathcal{R}([\alpha, \beta])$ quand $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b] \setminus \mathcal{C}$, alors il suffit de montrer que les limites

$$\lim_{x \to c_{j-1}^+} \int_x^{d_j} f \quad \text{et} \quad \lim_{x \to c_j^-} \int_{d_j}^x f$$

existent. On montre l'existence de la première limite ; la deuxième est traitée de la même façon.

Comme au lemme 4.5, on sait qu'une limite $\lim_{x \to x_0} h(x)$ existe si et seulement si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $x, y \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, alors $|h(x) - h(y)| < \varepsilon$. Donc, il suffit de montrer que, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $|x - y| < \delta$, alors

$$\left| \int_x^{d_j} f - \int_y^{d_j} f \right| < \varepsilon.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $y \geq x$. On a que

$$\left| \int_x^{d_j} f - \int_y^{d_j} f \right| = \left| \int_x^y f \right| \leq \int_x^y |f| \leq \int_x^y g = \left| \int_a^y g - \int_a^x g \right|.$$

Si $\delta > 0$ est assez petit, alors l'hypothèse que $g \in \mathcal{R}^*([a, b])$ et le théorème 4.12(c) impliquent que $|\int_a^y g - \int_a^x g| < \varepsilon$. Ceci conclut la démonstration. $\square$

Exemple 4.15. Considérons l'intégrale impropre

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x} e^x}.$$

On montrera qu'elle converge.

Tout d'abord, l'intégrant est continue (donc intégrable) sur $[\varepsilon, M]$. Pour $x \in (0, 1]$, on observe que

$$\frac{1}{\sqrt{x} e^x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathcal{R}^*([0, 1])$$

par l'exemple 4.11. Donc, $1/(\sqrt{x} e^x) \in \mathcal{R}^*([0, 1])$.

Finalement, pour $x \geq 1$, on a que

$$\frac{1}{\sqrt{x}e^x} \leq \frac{1}{x^{3/2}} \in \mathcal{R}^*([1,+\infty]).$$

car $e^x \geq x+1 \geq x$. Donc, $1/(\sqrt{x}e^x) \in \mathcal{R}^*([1,+\infty])$. On conclut que $1/(\sqrt{x}e^x) \in \mathcal{R}^*([0,+\infty])$.

On observe qu'on peut aussi utiliser l'inégalité

$$\frac{1}{\sqrt{x}e^x} \leq e^{-x}.$$

En effet, e^{-x} est continue, donc intégrable sur chaque intervalle compact. De plus,

$$\int_1^M e^{-x} \mathrm{d}x = e^{-1} - e^{-M} \to e^{-1}$$

quand $M \to \infty$. Alors, on a que $e^{-x} \in \mathcal{R}^*([1,+\infty))$, ce qui donne une autre démonstration du fait que $1/(\sqrt{x}e^x) \in \mathcal{R}^*([1,+\infty])$.

Exemple 4.16. On peut aussi utiliser une comparaison pour montrer que une intégrale impropre diverge. Par exemple, on a que

$$\frac{1}{\sin x} \geq \frac{1}{x} > 0 \quad (0 < x \leq \pi/2).$$

Puisque $1/x \notin \mathcal{R}^*([0,1])$, alors $1/\sin x \notin \mathcal{R}^*([0,1])$ non plus.

Exemple 4.17. Soit

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x \geq 0.$$

On montrera que $f \in \mathcal{R}^*([1,+\infty))$, mais que $|f| \notin \mathcal{R}^*([1,+\infty))$. Ici, f est continue, donc on a toujours que $f, |f| \in \mathcal{R}([1,M]) \subseteq \mathcal{R}^*([1,M])$, pour tout $M > 1$.

Pour la première affirmation, on ne peut pas comparer f avec $1/x$, car $1/x \notin \mathcal{R}^*([1,+\infty)$. Plutôt, on intègre par parties afin d'exploiter l'oscillation de f : on a que

$$\begin{aligned}\int_1^M \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \int_1^M (-\cos x)' \frac{1}{x} \mathrm{d}x &= - \frac{\cos x}{x}\Big|_{x=1}^M - \int_1^M \frac{\cos x}{x^2} \mathrm{d}x \\ &= \cos 1 - \frac{\cos M}{M} - \int_1^M \frac{\cos x}{x^2} \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On a que

$$\left| \frac{\cos M}{M} \right| \leq \frac{1}{M} \to 0 \quad \text{quand } M \to \infty.$$

Alors, la limite $\lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$ existe s-si la limite $\lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{\cos x}{x^2} \mathrm{d}x$ existe, s-si $\frac{\cos x}{x^2} \in \mathcal{R}^*([1,+\infty))$. Mais, on a que $\frac{\cos x}{x^2}$ est continue, donc intégrable sur $[1,M]$, pour tout $M > 1$. De plus,

$$\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \quad (x \geq 1),$$

et $x^{-2} \in \mathcal{R}^*([1,+\infty))$, selon l'exemple 4.11. Par conséquent, $\frac{\cos x}{x^2} \in \mathcal{R}^*([1,+\infty))$, ce qui implique que $\frac{\sin x}{x} \in \mathcal{R}^*([1,+\infty))$.

Pour la deuxième affirmation, on a que $|f(x)| = |\sin x|/x$ pour $x \geq 1$. Puisque $|\sin x| \geq 1/2$ pour une proportion positive de $x \geq 1$, alors on a que $|f|$ a le même comportement asymptotique que $1/x$. La façon la plus simple de voir ça est d'utiliser la positivité de $|f|$ et la périodicité de $\sin x$: on a que

$$\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |f| \geq \int_{2k\pi+\pi/4}^{2k\pi+\pi/2} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x \geq \int_{2k\pi+\pi/4}^{2k\pi+\pi/2} \frac{\sqrt{2}/2}{2(k+1)\pi} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \cdot \frac{1}{k+1} \quad (k \geq 1).$$

Donc, si $K \in \mathbb{N}$, on trouve que

$$\int_{2\pi}^{2K\pi} |f| = \sum_{k=1}^{K-1} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |f| \geq \frac{\sqrt{2}}{16} \sum_{k=1}^{K-1} \frac{1}{k+1} \to +\infty \quad \text{quand } K \to \infty.$$

Ceci implique que $|f| \notin \mathcal{R}^*([1,+\infty))$. □

Pour être capable de comparer de fonctions compliquées, on développe la notation asymptotique au prochain chapitre.

Exercices

Exercice 4.1. Montrez que

$$\mathcal{R}([a,b]) = \{f \in \mathcal{R}^*([a,b]) : f \text{ est bornée}\}.$$

[*Indice* : si $\varepsilon > 0$ et $P = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ est la partition de la définition 4.6, alors $f \in \mathcal{R}([p_{j-1}+\varepsilon, p_j - \varepsilon])$, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. Utilisez ce fait pour construire une partition P_ε de $[a,b]$ telle que $D(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$.]

Exercice 4.2. Montrez la proposition 4.12.

Exercice 4.3. Étudiez la convergence des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha \log^\beta t}$,

(b) $\displaystyle\int_0^{\mathrm{e}^{-1}} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (-\log t)^\beta}$,

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+t)}{t\sqrt{t}} \mathrm{d}t$.

Exercice 4.4. Décidez si les intégrales suivantes convergent ou pas :

$$\text{(a)} \int_1^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x \qquad \text{(b)} \int_1^\infty \left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right| \mathrm{d}x$$

Exercice 4.5. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que :

— f' et g' existent et sont continues sur $\mathbb{R}$;
— $|g| \leq 1$;
— f est décroissante ;
— $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

(a) Montrez que l'intégrale impropre $\int_0^\infty f(x)g'(x)\mathrm{d}x$ converge.
(b) Est-ce qu'on peut toujours déduire que l'intégrale impropre $\int_0^\infty f(x)g'(x)\mathrm{d}x$ converge si on enlève l'hypothèse que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$?

Exercice 4.6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire (c'est-à-dire $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). De plus, on suppose que f est continue et bornée. Est-ce que l'intégrale $\int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x$ converge ?

Exercice 4.7. Construisez une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

(a) $f \geq 0$;
(b) f est continue ;
(c) $\limsup_{x\to\infty} f(x) = +\infty$;
(d) $f \in \mathcal{R}^*(\mathbb{R})$;

Chapitre 5

Comparaison asymptotique de fonctions

Souvent en analyse, on s'intéresse à ce qu'on appelle *ordre de grandeur* d'une quantité. *Grosso modo*, l'ordre de grandeur d'une quantité ≥ 1 est le nombre de décimals qu'il possède. Si on a deux quantités, on veut souvent comparer leurs ordres de grandeur. À l'analyse, ces quantités sont souvent fonctions de quelques paramètres. Par exemple, on pourrait vouloir comparer la probabilité que deux différentes variable aléatoires sont $> x$ et comprendre quel événement est plus probable quand x devient grand.

Quand on s'intéresse à des ordres de grandeur, on utilise souvent la notation asymptotique qui simplifie beaucoup les arguments. Plus précisément, si $f, g : X \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions et $Y \subseteq X$, on écrit

$$f(x) \ll g(x) \quad (x \in Y) \tag{5.1}$$

s'il existe une constante $c > 0$, dépendant seulement de f, de g et de Y, telle que

$$|f(x)| \leq c \cdot g(x) \quad \text{pour tout } x \in Y.$$

Le symbole $\ll$ est lu "plus petit que plus petit que" et la constante c est suivant appelée la **constante implicite**. La relation (5.1) doit être considerée comme une comparaison entre les ordres de grandeur des fonctions f et g sur l'ensemble Y. De plus, on écrit

$$f(x) \asymp g(x) \quad (x \in Y)$$

s'il existe deux constante $c_1, c_2 > 0$, dépendant seulement de f, de g et de Y, telles que

$$c_1 \cdot g(x) \leq f(x) \leq c_2 \cdot g(x) \quad \text{pour tout } x \in Y,$$

ce qui veut dire que f et g ont la même ordre de grandeur sur Y.

Exemple 5.1. On a que $\log x \ll x$ pour $x \geq 1$. En effet, la fonction $\frac{\log x}{x}$ est positive et bornée par $1/e$ pour $x \geq 1$, et on peut prendre $c = 1/e$ comme la constante implicite. En général, si $\varepsilon > 0$, alors on peut montrer que

$$\log x \ll_\varepsilon x^\varepsilon \quad (x \geq 1), \tag{5.2}$$

où le ε en indice veut dire que la constante implicite dépend de ε. La relation (5.2) exprime le fait que $\log x$ croit plus lentement que n'importe quelle puissance de x. □

Exemple 5.2. L'ensemble Y est important. Par exemple, on a que

$$x \ll x^2 \quad (x \geq 1),$$

mais

$$x^2 \ll x \quad (0 \leq x \leq 1),$$

où on peut prendre $c = 1$ comme la constant implicite chaque fois. □

Exemple 5.3. Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est bornée si et seulement si

$$f(x) \ll 1 \quad (x \in X).$$ □

On introduit aussi la notation équivalente "grand O", qui a la même signification que $\ll$, c'est-à-dire

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \in Y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) \ll g(x) \quad (x \in Y).$$

La notation O est plus utile quand on fait des calculs : on peut, par exemple, écrire

$$f(x) = g(x) + O(h(x)) \quad (x \in Y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) - g(x) = O(h(x)) \quad (x \in Y),$$

où $h : X \to \mathbb{R}$ est une troisième fonction qu'on considère comme l'erreur à l'approximation de $f(x)$ par $g(x)$.

Exemple 5.4. La fonction log change très lentement, alors on devrait être capable de faire une estimation de $\log(x + 1)$ en termes de $\log x$. En effet, on a que

$$\log(x+1) = \log x + O\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \geq 1). \tag{5.3}$$

Afin de voir cette relation, on observe que le théorème des accroissements finis implique que $\log(x + 1) - \log x = (x + 1 - x) \cdot 1/y$ pour un nombre $y \in (x, x + 1)$. Donc

$$|\log(x+1) - \log x| \leq \frac{1}{x},$$

ce qui implique (5.3) avec la constante implicite $c = 1$. □

Exemple 5.5. De façon plus générale, si $f \in C^k([a, b])$ et $x_0 \in [a, b]$, alors

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + O\left(\frac{M|x - x_0|^k}{k!}\right) \quad (a \leq x \leq b), \tag{5.4}$$

où $M = \sup_{a \leq x \leq b} |f^{(k)}(x)|$. En effet, le théorème de Taylor implique que

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x - x_0)^k$$

pour un certain c entre x et x_0. Notre affirmation (5.4) en découle directement. □

Une façon simple de comparer deux fonctions f et g est d'utiliser le lemme suivant :

Lemme 5.6. *Soit I un intervalle fermé (pas nécessairement borné) et soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que :*

- *f et g sont continues sur I° (l'intérieure de I - voir la définition A.1) ;*
- *$g(x) > 0$ pour chaque $x \in I^\circ$;*
- *Si $a < b$ sont les limites de I (alors, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$), supposons que $\lim_{x\to a^+} f(x)/g(x)$ et $\lim_{x\to b^-} f(x)/g(x)$ existent dans $\mathbb{R}$.*

Alors, $f \ll g$ sur I.

Démonstration. Considérons le cas où $I = \mathbb{R}$; les autres cas sont similaires. Soit $\ell^\pm = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)/g(x) \in \mathbb{R}$. Il existe $M^\pm > 0$ tels que :

$$|f(x)/g(x) - \ell^+| \leq 1 \quad \text{quand } x \geq M^+$$

et

$$|f(x)/g(x) - \ell^-| \leq 1 \quad \text{quand } x \leq -M^-$$

Donc, $|f(x)| \leq c \cdot g(x)$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$. où

$$c = \max\{|\ell^+| + 1, |\ell^-| + 1, c'\} \quad \text{avec} \quad c' = \sup_{-M^- \leq x \leq M^+} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|.$$

Notons que $c' < \infty$ car f/g est continue sur le compact $[-M^-, M^+]$ par nos hypothèses que f, g sont continues et que $g > 0$. Ceci conclut la démonstration du lemme. □

Exemple 5.7. On veut donner une approximation au nombre d'entiers contenus dans l'intervalle $(a, b]$. Ici, on suppose implicitement que $b - a \geq 1$; sinon, l'intervalle $(a, b]$ contient seulement un ou aucun entier. Soit $m = \lfloor a \rfloor$ et $M = \lfloor b \rfloor$, pour que

$$m \leq a < m + 1 \leq \cdots \leq M \leq b < M + 1.$$

Donc,

$$\#\{n \in \mathbb{Z} : a < n \leq b\} = M - m.$$

D'autre part, on a que $[m + 1, M] \subseteq [a, b] \subseteq [m, M + 1]$. En comparant les longueurs de ces intervalles, on trouve que $M - m - 1 \leq b - a \leq M - m + 1$. Par la suite,

$$\#\{n \in \mathbb{Z} : a < n \leq b\} = b - a + O(1),$$

où on peut prendre $c = 1$ comme la constante implicite. Cette relation exprime le fait que l'intervalle $(a, b]$ contient à peu près aussi beaucoup entiers que sa longueur. □

Remarque 5.8. La relation

$$f(x) + O(h(x)) = g(x) + O(h(x)) \quad (x \in Y)$$

n'implique pas que $f(x) = g(x)$. Plutôt, elle implique que $f(x) = g(x) + O(h(x))$, pour $x \in Y$. En effet, on a que $f(x) + r(x) = g(x) + s(x)$, où $|r(x)| \leq c_1 h(x)$ et $|s(x)| \leq c_2 h(x)$ quand $x \in Y$, où c_1 et c_2 sont deux constantes positives. Donc

$$|f(x) - g(x)| = |s(x) - r(x)| \leq |s(x)| + |r(x)| \leq c_1 h(x) + c_2 h(x) = (c_1 + c_2) h(x) \quad (x \in Y),$$

ce qui implique que $f(x) = g(x) + O(h(x))$ pour $x \in Y$. □

Le théorème de comparaison d'intégrales impropres : encore

Comme notre première application de la notation asymptotique, on étudie la convergence de quelques intégrales impropres compliquées. On commence en ré-énonçant le théorème 4.14 en utilisant la notation asymptotique :

Théorème 5.9. *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions, où I est un intervalle fermé, telles que :*

— *$g \geq 0$ et $|f| \ll g$ sur I ;*
— *$g \in \mathcal{R}^*(I)$;*
— *il existe un ensemble $\mathcal{C} \subseteq I$ n'ayant pas de points d'accumulation dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire, $\#(\mathcal{C} \cap [-M, M]) < \infty$ pour tout $M > 0$) tel que $f \in \mathcal{R}([a, b])$ quand $[a, b] \subseteq I \setminus \mathcal{C}$.*

Alors, $f \in \mathcal{R}^*(I)$ et $|\int_I f| \leq \int_I g$.

Démonstration. Il existe $c > 0$ telle que $|f| \leq cg$ sur I. Puisque $g \in \mathcal{R}^*(I)$, alors $cg \in \mathcal{R}^*(I)$. On peut alors appliquer le théorème 4.14 avec cg au lieu de g. □

Exemple 5.10. On montre que la fonction $f(x) = e^{-x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$, appartient à $\mathcal{R}^*((-\infty, +\infty))$. Tout d'abord, on a que f est continue sur $\mathbb{R}$, alors intégrable sur chaque intervalle de la forme $[a, b]$. Afin de montrer que $f \in \mathcal{R}^*((-\infty, +\infty))$, on compare f avec $g(x) := 1/(1+x^2)$, $x \in \mathbb{R}$. La règle de l'Hôpital implique que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Donc, le lemme 5.6 implique que $f \ll g$.

Il reste à montrer que g est intégrable sur $\mathbb{R}$. On observe que g est continue, donc intégrable sur chaque compact $[-M, M]$. Puis, on évalue $\int_0^M g$ et $\int_{-M}^0 g$.

On a choisi la fonction g car elle a une antidérivée simple : on sait que $(\arctan x)' = 1/(1 + x^2)$. Donc,

$$\int_0^M \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \arctan x \Big|_{x=0}^{M} = \arctan M \to \frac{\pi}{2} \quad \text{quand } M \to \infty.$$

De même, on peut montrer que $\lim_{M\to\infty} \int_{-M}^0 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \pi/2$. On déduit que $g \in \mathcal{R}^*((-\infty, +\infty))$. Par la suite, on a que $f \in \mathcal{R}^*((-\infty, +\infty))$, comme on l'a affirmé. □

Exemple 5.11. Soit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1 - x)}{\sqrt{1 - x}} & \text{si } 0 \leq x < 1, \\[2ex] \dfrac{1}{x \log^2(x + 1)} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

On montrera que $f \in \mathcal{R}^*([0, +\infty))$. On a deux problèmes : f n'est pas bornée autour de 1, et l'intervalle est non-borné. On note qu'autour de 1^-, la fonction f se comporte comme

$(1-x)^{-1/2-\varepsilon}$, en valeur absolue. De plus, autour de $+\infty$, elle se comporte comme $1/(x\log^2 x)$. En fait, c'est plus convenable de la comparer avec $1/((x+1)\log^2(x+1))$ autour de $+\infty$. Donc, on définit

$$g(x) = \begin{cases} (1-x)^{-3/4} & \text{si } 0 \le x < 1, \\ \dfrac{1}{(x+1)\log^2(x+1)} & \text{si } x \ge 1. \end{cases}$$

On choisit cette fonction car c'est facile de l'intégrer : on a que $g \in \mathcal{R}^*([0,1])$, en suivant l'argument de l'exemple 4.11. De plus, on a que $g \in \mathcal{R}^*([1,+\infty))$: par continuité, on sait que $g \in \mathcal{R}([1,M]) \subseteq \mathcal{R}^*([1,M])$, pour tout $M > 1$. De plus,

$$\int_1^M \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\log^2(x+1)} \overset{u=\log(x+1)}{=} \int_{\log 2}^{\log(M+1)} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log(M+1)} \to \frac{1}{\log 2}$$

lorsque $M \to \infty$. Ceci montre que $g \in \mathcal{R}^*([1,+\infty))$, donc $g \in \mathcal{R}^*([0,+\infty))$.

Finalement, on a que $f \ll g$. Pour le voir, on applique le lemme 5.6 deux fois : pour l'intervalle, on a que

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\log(1-x)}{(1-x)^{-1/4}} = 0$$

selon la règle de l'Hôpital. La limite quand $x \to 0^+$ existe aussi pour de raisons triviales. Donc, $f \ll g$ sur $[0,1]$.

Pour l'intervalle $[1,+\infty)$, on observe que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = 1.$$

En appliquant le lemme 5.6 encore une fois, on voit que $f \ll g$ sur $[1,+\infty)$ aussi. Puisque $g \in \mathcal{R}^*([0,+\infty))$, et f est continue sur chaque $[a,b] \subset [0,1) \cup (1,+\infty]$, on trouve aussi que $f \in \mathcal{R}^*([0,+\infty))$. $\square$

La méthode du point col

Finalement, on présente une application de l'analyse asymptotique pour estimer la fonction factorielle. Notons que

$$n! = \int_0^\infty t^n e^{-t}\mathrm{d}t,$$

comme on peut facilement montrer par induction sur n. Définissons, plus généralement, la fonction Γ d'Euler par

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t \quad (s > 0),$$

pour que $n! = \Gamma(n+1)$. La fonction Γ est bien définie, car on peut montrer facilement que l'intégrale impropre de sa définition converge pour tout $s > 0$. En intégrant par parties, on a que

$$\int_a^b t^s e^{-t}\mathrm{d}t = \int_a^b t^s(-e^{-t})'\mathrm{d}t = a^s e^{-a} - b^s e^{-b} + s\int_a^b t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t \quad (0 < a < b < +\infty).$$

En laissant $a \to 0^+$ et $b \to +\infty$, on arrive à l'équation fonctionnelle de Γ

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad (s > 0).$$

On montrera la généralisation suivante de la formule de Stirling :

Théorème 5.12 (la formule de Stirling)**.** *Pour $s \geq 1$, on a que*

$$\Gamma(s) = \left(\frac{s}{e}\right)^s \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)\right).$$

Démonstration. Puisque $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, il suffit de montrer que

$$\Gamma(s+1) = \left(\frac{s}{e}\right)^s \sqrt{2\pi s} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)\right).$$

On a que

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty e^{f(t)} \mathrm{d}t,$$

où $f(t) = s\log t - t$. On analyse f : on a que $f'(t) = s/t - 1$ et que $f''(t) = -s/t^2$. En particulier, f est une fonction concave qui est croissante pour $t \leq s$ et décroissante pour $t \geq s$. Son maximum est en $t = s$ et il est égal à $f(s) = s\log(s/e)$. De plus, on a que $f'(s) = 0$ (en effet, s est un maximum), ce qui veut dire que $t = s$ est un point critique pour f. On va donner une approximation de f autour de ce point en utilisant le théorème de Taylor : on a que $f^{(3)}(t) = 2s/t^3$ et $f^{(4)}(t) = -6s/t^4$, pour que

$$f(t) = s\log(s/e) - \frac{(t-s)^2}{2s} + \frac{(t-s)^3}{3s^2} - \frac{s(t-s)^4}{4\tau^4}, \tag{5.5}$$

où τ est un point entre t et s. On va utiliser cette formula quand $t \in I := [s - s^{2/3}, s + s^{2/3}]$ car dans cet intervalle le troisième terme du côté droit de (5.5) est $\ll 1$ et le quatrième est $\ll 1/s$. En utilisant le fait que $e^x = 1 + x + O(x^2)$ pour $x \ll 1$ (une autre conséquence du théorème de Taylor), on trouve que

$$\begin{aligned}
e^{f(t)} &= \left(\frac{s}{e}\right)^s e^{-(t-s)^2/(2s)} e^{(t-s)^3/(3s^2)} e^{O(1/s)} \\
&= \left(\frac{s}{e}\right)^s e^{-\frac{(t-s)^2}{2s}} \left(1 + \frac{(t-s)^3}{3s^2} + O\left(\frac{(t-s)^6}{s^4}\right)\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right) \\
&= \left(\frac{s}{e}\right)^s e^{-(t-s)^2/(2s)} \left(1 + \frac{(t-s)^3}{3s^2} + O\left(\frac{(t-s)^6}{s^4} + \frac{1}{s}\right)\right).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\int_I e^{f(t)} \mathrm{d}t &= \left(\frac{s}{e}\right)^s \int_I e^{-(t-s)^2/(2s)} \left(1 + \frac{(t-s)^3}{3s^2} + O\left(\frac{(t-s)^6}{s^4} + \frac{1}{s}\right)\right) \mathrm{d}t \\
&\overset{t-s=u\sqrt{s}}{=} \left(\frac{s}{e}\right)^s \sqrt{s} \int_{-s^{1/6}}^{s^{1/6}} e^{-u^2/2} \left(1 + \frac{u^3}{s^{1/2}} + O\left(\frac{u^6+1}{s}\right)\right) \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

On a que
$$\int_{-s^{1/6}}^{s^{1/6}} u^3 e^{-u^2/2} = 0$$
par symétrie et que
$$\int_{-s^{1/6}}^{s^{1/6}} (u^6+1)e^{-u^2/2}\mathrm{d}u \le \int_{-\infty}^{+\infty} (u^6+1)e^{-u^2/2}\mathrm{d}u < \infty,$$
pour que
$$\int_I e^{f(t)}\mathrm{d}t = \left(\frac{s}{e}\right)^s \sqrt{s}\int_{-s^{1/6}}^{s^{1/6}} e^{-u^2/2}\mathrm{d}u + O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\left(\frac{s}{e}\right)^s\right).$$
Finalement, on a que
$$\begin{aligned}\int_{-s^{1/6}}^{s^{1/6}} e^{-u^2/2}\mathrm{d}u &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\mathrm{d}u - \int_{|u|>s^{1/6}} e^{-u^2/2}\mathrm{d}u \\ &= \sqrt{2\pi} - \int_{|u|>s^{1/6}} O\left(\frac{1}{u^8}\right)\mathrm{d}u = \sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{s^{7/6}}\right).\end{aligned}$$

En combinant les estimés ci-dessus, on conclut que
$$\int_I e^{f(t)}\mathrm{d}t = \left(\frac{s}{e}\right)^s \sqrt{2\pi s} + O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\left(\frac{s}{e}\right)^s\right).$$

Il reste à montrer que
$$\int_{|t-s|>s^{2/3}} e^{f(t)}\mathrm{d}t \ll \frac{1}{\sqrt{s}}\left(\frac{s}{e}\right)^s. \tag{5.6}$$

Quand $t \ge s + s^{2/3}$, alors on observe que $f'(t) \le s/(s+s^{2/3}) - 1 \le -1/(s^{1/3}+1)$. Donc, l'exercice 5.5 implique que
$$\int_{s+s^{2/3}}^{+\infty} e^{f(t)}\mathrm{d}t \le (s^{1/3}+1)e^{-f(s+s^{2/3})}.$$

On utilise la formule (5.5) pour voir que
$$\int_{s+s^{2/3}}^{+\infty} e^{f(t)}\mathrm{d}t \ll s^{1/3}\left(\frac{s}{e}\right)^s e^{-s^{1/3}/3} \ll \frac{1}{\sqrt{s}}\left(\frac{s}{e}\right)^s.$$

Finalement, quand $t \le s + s^{2/3}$, alors on observe que $f'(t) \ge s/(s-s^{2/3}) - 1 \ge 1/(s^{1/3}-1)$, et un argument analogue implique que
$$\int_0^{s-s^{2/3}} e^{f(t)}\mathrm{d}t \le (s^{1/3}-1)e^{f(s-s^{2/3})} \ll \frac{1}{\sqrt{s}}\left(\frac{s}{e}\right)^s.$$

Ceci conclut la démonstration. □

Exemple 5.13. Soit X_λ une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X_\lambda = n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

pour $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. L'espérance de X_λ est égale à

$$\mathbb{E}[X_\lambda] = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} = \lambda$$

et sa variation est égale à

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[X_\lambda] = \mathbb{E}[(X_\lambda - \mathbb{E}[X_\lambda])^2] &= \sum_{n=0}^{\infty} (n-\lambda)^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [n(n-1) - (2\lambda - 1)n + \lambda^2] \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{(n-2)!} - (2\lambda - 1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{(n-1)!} + \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \\
&= \lambda^2 - (2\lambda - 1)\lambda + \lambda^2 = \lambda.
\end{aligned}$$

Le but de cet example est d'estimer les "queues" de X_λ. C'est-à-dire, on veut estimer les fréquences

$$\mathbb{P}\left(X_\lambda/\lambda > \rho\right) = \sum_{n > \rho\lambda} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(X_\lambda/\lambda < 1/\rho\right) = \sum_{n < \lambda/\rho} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

avec $\rho \in [1+\varepsilon, M]$ pour un petit $\varepsilon > 0$ et un grand $M > 0$, qu'on considère fixés. On se concentre à la première quantité ; l'étude de la deuxième est similaire.

La quantité $\mathbb{P}(X_\lambda/\lambda > \rho)$ estpetite, car on est loin de la valeur moyenne λ. On utilise l'exercice 5.6(a) : on a que

$$\frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}/(n+1)!}{e^{-\lambda}\lambda^n/n!} = \frac{\lambda}{n+1} < \frac{1}{\rho} \leq \frac{1}{1+\varepsilon}$$

si $n > \rho\lambda$. Donc, l'exercice 5.6(a) implique que

$$\sum_{n > \rho\lambda} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \asymp_\varepsilon \frac{e^{-\lambda}\lambda^N}{N!},$$

où $N = \lfloor \rho\lambda \rfloor + 1$, qui est le plus petit nombre naturel $> \rho\lambda$. Maintenant, on utilise la formule de Stirling : on a que

$$\frac{e^{-\lambda}\lambda^N}{N!} \asymp \frac{e^{-\lambda + N\log\lambda - N\log(N/e)}}{\sqrt{N}} \asymp_M \frac{e^{-\lambda + N\log\lambda - N\log(N/e)}}{\sqrt{\lambda}}.$$

De plus, $N = \rho\lambda + O(1)$. Alors, si $f(x) = -\lambda + x\log\lambda - x\log(x/e)$, on trouve que $f'(x) = \log(\lambda/x)$ et, par la suite, $f'(x) = O_{\varepsilon,M}(1)$ pour x entre N et $\rho\lambda$. Donc, le théorème des accroissements finis implique que

$$f(N) = f(\lambda\rho) + O_M(1) = \lambda \cdot Q(\rho),$$

où

$$Q(\rho) = \rho\log\rho - \rho + 1 = \int_1^\rho (\log t)\mathrm{d}t > 0,$$

et on conclut que

$$\mathbf{Prob}\,(X_\lambda/\lambda > \rho) = \sum_{n>\rho\lambda} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \asymp_{\varepsilon,M} \frac{e^{-\lambda\cdot Q(\rho)}}{\sqrt{\lambda}} \quad (1+\varepsilon \le \rho \le M).$$

Exercices

Exercice 5.1. Considérez les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^{1/\log\log x}, \quad f_2(x) = e^{\sqrt{\log x}}, \quad f_3(x) = (\log x)^A, \quad f_4(x) = \sqrt{x},$$
$$f_5(x) = e^x, \quad f_6(x) = \frac{x}{(\log x)^A}, \quad f_7(x) = \frac{x}{e^{\sqrt{\log x}}}, \quad f_8(x) = \log\log x,$$

où $A > 0$ est une constante fixée. Ordonnez les fonctions en termes de leur ordre de magnitude lorsque $x \to \infty$, c'est-à-dire trouvez une permutation $\sigma \in S_8$ telle que $f_{\sigma(1)}(x) \ll f_{\sigma(2)}(x) \ll \cdots \ll f_{\sigma(8)}(x)$ lorsque $x \to \infty$.s

Exercice 5.2. Décidez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

(a) $\frac{1}{1+x} = 1 + O(x)$ pour $x \in (-1/2, 1/2)$;
(b) $\frac{1}{1+x} = 1 + O(x)$ pour $x \in (-1, 1)$;
(c) $x^{100} \ll e^{\sqrt{x}}$ pour $x \ge 1$. [*Indice :* comparez les logarithmes de chaque côté] ;
(d) $\log x \ll e^{\sqrt{\log\log x}}$ pour $x \ge 10$. [*Indice :* comparez les logarithmes de chaque côté] ;
(e) $\sqrt{x^2+1} = x + O(1/x)$ pour $x \ge 1$. [*Indice :* théorème des accroissements finis] ;
(f) $\log(x+1) = \log x + 1/x + O(1/x^2)$ pour $x \ge 1$. [*Indice :* théorème de Taylor] ;

Exercice 5.3. Soit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ \dfrac{\sin x}{x^{3/2}} & \text{si } 0 < x \le 1, \\ \dfrac{x^{10}\arctan x}{e^x(\log x)^{3/4}} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Est-ce que $f \in \mathcal{R}^*([0, +\infty))$?

Exercice 5.4. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues avec $g \geq 0$.

(a) Montrez que si
$$\sup_{M \geq 0} \int_{-M}^{M} g(x)\mathrm{d}x < \infty,$$
alors l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{d}x$ converge.

(b) Montrez que l'intégrale impropre
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sin x)(x^{10} - x^5 + x^2 + 1)\log(|x| + 1)}{(x + \sin x)e^{\sqrt{|x|}}}\mathrm{d}x$$
converge. [*Indice :* comparer l'intégrante avec une fonction g satisfaisant (a).]

Exercice 5.5.

(a) Soit $f : [M, \infty) \to \mathbb{R}$ une fonction positive et différentiable telle que $f' \geq \delta$, où δ est un paramètre positif. Montrez que $f(x) \geq f(M) + \delta \cdot (x - M)$ et déduisez que l'intégrale impropre $\int_M^{\infty} e^{-f(x)}\mathrm{d}x$ converge et est bornée par $e^{-f(M)}/\delta$.

(b) (La queue de la distribution normale) Montrez que
$$\int_x^{\infty} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t \ll \frac{e^{-x^2/2}}{x} \quad (x \geq 1).$$
[*Indice* : Faites le changement de variable $u = t^2/2$.]

Exercice 5.6.

(a) Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels positifs. S'il existe un nombre réel $\rho > 1$ tel que
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{\rho}$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors montrez que
$$a_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \frac{a_1}{1 - 1/\rho}$$

(b) Montrez que
$$\sum_{n>x} \frac{n^2 + 1}{2^n} \asymp \frac{x^2}{2^x} \quad (x \geq 1).$$
[*Indice :* On peut supposer sans perte de généralité que x est grand.]

(c) Montrez que
$$\sum_{n>x} \frac{1}{n^2 + \log n} \asymp \frac{1}{x} \quad (x \geq 2).$$
[*Indice :* Montrez que $\sum_{2^k < n \leq 2^{k+1}} 1/(n^2 + \log n) \asymp 1/2^k$ pour tout $k \geq 1$.]

(d) Montrez que
$$\sum_{n>x} \frac{1}{(n+1)\log^2 n} \asymp \frac{1}{\log x} \quad (x \geq 2).$$
[*Indice :* Montrez que $\sum_{2^k < n \leq 2^{k+1}} 1/((n+1)\log^2 n) \asymp 1/k^2$.]

Chapitre 6

La formule d'Euler-Maclaurin

On conclut la partie sur l'intégrale de Riemann en utilisant le calcul intégral pour estimer plusieurs sommes. Par exemple, on sait que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

mais quel est le taux de divergence de cette série, c'est-à-dire quelle est l'ordre de grandeur de ses sommes partielles

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \ ?$$

On interpret cette somme comme une somme de Riemann de la fonction $f(x) = 1/x$ sur $[1, N+1]$. En effet, elle correspond à $R(f, P, \boldsymbol{\xi})$ avec $P = \{n : 1 \leq n \leq N+1\}$ et $\xi_n = n-1$ pour chaque $n \leq N+1$. Donc, on devine que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \approx \int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log(N+1).$$

Puisque f est décroissante, on peut facilement obtenir cette relation :

$$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq \frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq \int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log(N+1)$$

et

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leq 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \leq 1 + \int_1^{N} \frac{\mathrm{d}x}{x} = 1 + \log N.$$

On en déduit que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \log N + O(1) \quad (N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}).$$

De façon plus générale, supposons que $f : \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable. Quand peut-on dire que

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) \approx \int_1^N f(x)\mathrm{d}x \ ?$$

On a encore que $\sum_{n=1}^{N} f(n)$ est une somme de Riemann de f, mais elle correspond à une partition d'épaisseur 1. On ne peut pas alors déduire toujours que $\int_1^N f(n)$ est proche de $\int_1^N f$. En fait, ce qu'on veut est que

$$f(n) \approx \int_{n-1}^{n} f(x)\mathrm{d}x.$$

Ceci est vrai si $f(x)$ ne varie pas beaucoup dans l'intervalle $[n-1, n]$:

Exemple 6.1. (a) Si $f(x) = x^2$, alors on a que

$$\int_{n-1}^{n} x^2\mathrm{d}x = \frac{n^3 - (n-1)^3}{3} = \frac{n^3 - (n^3 - 3n^2 + 3n - 1)}{3} = n^2 - n - 1/3 = n^2 + O(n).$$

On voit alors que l'intégrable $\int_{n-1}^{n} x^2\mathrm{d}x$ est bien proche de n^2.

(b) Si $f(x) = e^x$, alors on a que

$$\int_{n-1}^{n} e^x\mathrm{d}x = e^n - e^{n-1} = (1 - 1/e)e^n,$$

alors l'intégrable $\int_{n-1}^{n} e^x\mathrm{d}x$ n'est pas proche de e^n quand n est grand.

(c) Si $f(x) = \sin(\pi x)$, alors on a que

$$\int_{n-1}^{n} \sin(\pi x)\mathrm{d}x = -\cos(\pi n) + \cos(\pi(n-1)) = (-1)^{n-1} + (-1)^n = 2 \cdot (-1)^{n-1},$$

alors l'intégrable $\int_{n-1}^{n} \sin(\pi x)\mathrm{d}x$ n'est pas proche de $\sin(\pi n) = 0$.

La clé pour controller la variation entre $f(n)$ et $\int_{n-1}^{n} f(x)\mathrm{d}x$ est la dérivée de f. À l'exemple (a), on a que $(x^2)' = 2x$ est petite par rapport à x^2 ; par contre, à l'exemple (b) on a que $(e^x)'$ et e^x sont égales ; finalement, à l'exemple (c), on a que $(\sin(\pi x))' = \pi \cos(\pi x)$ est (pour la plupart de x) du même ordre de grandeur de $\sin(\pi x)$.

La **formule d'Euler-Maclaurin** confirme notre intuition :

Théorème 6.2. *Si $f \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 1})$, alors,*

$$\sum_{y<n\leq z} f(n) = \int_y^z f(t)\mathrm{d}t - \{t\}f(t)\Big|_{t=y}^{z} + \int_y^z \{t\}f'(t)\mathrm{d}t$$

pour tout $z \geq y \geq 1$. En particulier, pour $x \geq 1$, on a que

$$\sum_{1\leq n\leq x} f(n) = f(1) + \int_1^x f(t)\mathrm{d}t - \{x\}f(x) + \int_1^x \{t\}f'(t)\mathrm{d}t.$$

Remarque 6.3. La notation $\{x\}$ veut dire la **partie fractionnelle** de x. Quand $x \geq 0$, sa partie fractionnelle est la partie décimale de x. Par exemple, $\{1234.5678\} = 0.5678$. Cependant, quand $x < 0$, alors $\{x\}$ est la partie décimale $+1$. Par exemple, $\{-1234.5678\} = 1 - 0.5678$. La définition générale suit :

Si $x \in \mathbb{R}$, alors définissons sa **partie entière** par

$$\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$$

et sa partie fractionnelle par

$$\{x\} := x - \lfloor x \rfloor .$$

Observons que $0 \leq \{x\} \leq 1$, ainsi que $\{x+1\} = \{x\}$ (c'est-à-dire, la partie-fractionnelle est une fonction 1-périodique).

Démonstration du théorème 6.2. Étudions

$$f(n) - \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t = \int_{n-1}^{n} (f(n) - f(t))\mathrm{d}t.$$

On écrit $\mathrm{d}t = \mathrm{d}(t-c)$ pour une constante $c \in \mathbb{R}$ à être déterminée et on intègre par parties :

$$f(n) - \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t = (f(n) - f(t))(t-c)\Big|_{t=n-1}^{n} + \int_{n-1}^{n} (t-c)f'(t)\mathrm{d}t.$$

(Ici, $f(n)$ est une constante, donc la dérivée de $(f(n) - f(t))$ par rapport à t vaut $-f'(t)$.) On observe que

$$(f(n) - f(t))(t-c)\Big|_{t=n-1}^{n} = 0 - (f(n) - f(n-1))(n-1-c).$$

Pour annuler ce terme, on choisit $c = n-1$. En conclusion, on a que

$$f(n) - \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t = \int_{n-1}^{n} (t-(n-1))f'(t)\mathrm{d}t.$$

Cependant, si $n-1 \leq t < n$, on a que $\lfloor t \rfloor = n-1$, donc $t - (n-1) = \{t\}$. Puisque la valeur de l'intégrante en un seul point n'affecte pas la valeur de l'intégrale (voir exercice 1.5), on a que

$$f(n) - \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t = \int_{n-1}^{n} \{t\}f'(t)\mathrm{d}t.$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=M+1}^{N} f(n) = \int_{M}^{N} f(t)\mathrm{d}t + \int_{M}^{N} \{t\}f'(t)\mathrm{d}t, \tag{6.1}$$

pour tous entiers $N \geq M \geq 1$. Quand $y, z \in \mathbb{Z}$, ceci conclut la démonstration.

Pour le cas général, posons $M = \lfloor y \rfloor$ et $N = \lfloor z \rfloor$, pour que

$$\sum_{y<n\leq z} f(n) = \sum_{n=M+1}^{N} f(n) = \sum_{n=M+1}^{N} f(n) = \int_{M}^{N} f(t)\mathrm{d}t + \int_{M}^{N} \{t\}f'(t)\mathrm{d}t.$$

De plus, on a que

$$\int_M^y f(t)\mathrm{d}t = f(t)(t-M)\Big|_{t=M}^{y} - \int_M^y (t-M)f'(t)\mathrm{d}t = f(y)\{y\} - \int_M^y \{t\}f'(t)\mathrm{d}t,$$

ainsi que

$$\int_N^z f(t)\mathrm{d}t = f(t)(t-N)\Big|_{t=N}^{z} - \int_N^z (t-N)f'(t)\mathrm{d}t = f(z)\{z\} - \int_N^z \{t\}f'(t)\mathrm{d}t.$$

Le cas général du théorème en découle. □

On donne maintenant deux applications classiques de la formule d'Euler-Maclaurin.

Théorème 6.4. *Il existe une constant $\gamma \in \mathbb{R}$, appelée la constante d'Euler-Mascheroni, telle que*

$$\sum_{n\le x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \ge 1).$$

Démonstration. D'après la formule d'Euler-Maclaurin, on a que

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x} \frac{1}{n} &= 1 + \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} - \frac{\{x\}}{x} - \int_1^x \frac{\{t\}}{t^2}\mathrm{d}t \\ &= 1 + \log x - \frac{\{x\}}{x} - \int_1^x \frac{\{t\}}{t^2}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

L'intégrale impropre $\int_1^\infty(\{t\}/t^2)\mathrm{d}t$ converge car $\{t\}/t^2 \in \mathcal{R}([1,M])$ pour chaque $M \ge 1$ (la fonction $\{t\}/t^2$ est bornée sur $[1,M]$ et a un nombre fini de discontinuités sur cet intervalle) et car $0 \le \{t\}/t^2 \le 1/t^2$. Si

$$\gamma := 1 - \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2}\mathrm{d}t,$$

alors

$$\sum_{n\le x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma - \frac{\{x\}}{x} + \int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^2}\mathrm{d}t.$$

Clairement,

$$\left|-\frac{\{x\}}{x}\right| \le \frac{1}{x}$$

et

$$\left|\int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^2}\mathrm{d}t\right| \le \int_x^\infty \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}.$$

Ceci conclut la démonstration. □

On donne maintenant une nouvelle démonstration de la formule de Stirling pour la fonction factorielle.

Théorème 6.5 (la formule de Stirling, II)**.** *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a que*

$$N! = \left(\frac{N}{e}\right)^N \sqrt{2\pi N}\left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right).$$

Démonstration. En prenant les logarithmes de chaque côté, on trouve que le résultat est equivalent à l'estimation

$$\log(N!) = N\log N - N + \frac{\log N}{2} + c + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

où $e^c = \sqrt{2\pi}$ (ici, on a utilisé le fait que $\log(1+\varepsilon) = \varepsilon + O(\varepsilon^2)$ pour $\varepsilon \in [-1/2, 1/2]$, ce qui découle du développement de Taylor de la fonction $\log(1+x)$ autour de 0). Puisque $\log N! = \log(1) + \log(2) + \cdots + \log(N)$, alors il suffit de montrer que

$$\sum_{n=1}^{N} \log n = N\log N - N + \frac{\log N}{2} + c + O\left(\frac{1}{N}\right) \quad (N \in \mathbb{N}).$$

D'après la formule d'Euler-Maclaurin (voir (6.1)), on a que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \log n &= \int_1^N \log t \,\mathrm{d}t + \int_1^N \frac{\{t\}}{t}\mathrm{d}t \\ &= N\log N - N + 1 + \int_1^N \frac{\{t\}}{t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

car $t\log t - t$ est une antidérivée de la fonction $\log t$. Cependant, contrairement qu'à la démonstration du théorème 6.4, il faut être beaucoup plus prudents avec l'estimation de l'intégrale $\int_1^N \frac{\{t\}}{t}\mathrm{d}t$. On pose

$$F(x) = \int_0^x (\{t\} - 1/2)\mathrm{d}t.$$

On observe que $\int_0^1 (\{t\} - 1/2)\mathrm{d}t = 0$ et que $t \to \{t\}$ est une fonction 1-periodique. Donc, l'exercice 3.7 impliquent que $F(x+1) = F(x)$ pour chaque x, c'est-à-dire F est une fonction 1-périodique. En particulier, $F(m) = 0$ pour chaque $m \in \mathbb{Z}$ et $F(x) = O(1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, car $|F(x)| \le \sup_{0 \le t \le 1} |F(t)| < \infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction F est une antidérivée de la fonction $\{t\} - 1/2$ sur l'intervalle $[n, n+1]$, d'après le théorème 3.4. Donc,

$$\begin{aligned}\int_n^{n+1} \frac{\{t\}}{t}\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_n^{n+1} \frac{\{t\} - 1/2}{t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \frac{F(t)}{t}\bigg|_{t=n}^{n+1} + \int_n^{n+1} \frac{F(t)}{t^2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_n^{n+1} \frac{F(t)}{t^2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

d'après le théorème 3.6. En ajoutant cette formule pour $n \in \{1, \dots, N-1\}$, on trouve que

$$\int_1^N \frac{\{t\}}{t} \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^N \frac{F(t)}{t^2} \mathrm{d}t = \frac{\log N}{2} + \int_1^N \frac{F(t)}{t^2} \mathrm{d}t.$$

L'intégrale $\int_1^\infty (F(t)/t^2)\mathrm{d}t$ converge absolûment car F est bornée sur $\mathbb{R}$. De plus, ses queues satisfassent l'estimation

$$\int_N^\infty \frac{F(t)}{t^2} \mathrm{d}t \ll \int_N^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{N}.$$

Alors, si on pose

$$c = 1 + \int_1^\infty \frac{F(t)}{t^2} \mathrm{d}t,$$

on a que

$$\log(N!) = \sum_{n=1}^N \log n = N \log N - N + \frac{\log N}{2} + c + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Ceci montre le théorème si on peut prouver que $e^c = \sqrt{2\pi}$. La démonstration de cette identité est l'objet de l'exercice 6.5 en dessous. $\square$

Exemple 6.6. Soit $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots$ la suite des nombres premiers, c'est-à-dire $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$, etc. On sait que chaque nombre naturel peut s'écrire d'une façon unique comme le produit de quelques nombres premiers. De plus, tous les facteurs premiers de n sont $\le n$. En particulier, on a que

$$\mathbb{Z} \cap [1, x] \subseteq \mathcal{S}(x) := \{n \in \mathbb{Z}_{\ge 1} : \text{tous les facteurs premiers de } n \text{ sont } \le x\}.$$

On en déduit que

$$\sum_{n \le x} \frac{1}{n} \le \sum_{n \in \mathcal{S}(x)} \frac{1}{n}.$$

D'autre côté, si $p_1, \dots, p_k$ sont les nombres premiers $\le x$, alors les nombres n dont tous les facteurs sont $\le x$ sont en correspondence avec les produits $p_1^{v_1} \cdots p_k^{v_k}$, où $v_1, \dots, v_k \ge 0$ sont n'importe quels entiers. Par la suite,

$$\sum_{n \in \mathcal{S}(x)} \frac{1}{n} = \sum_{v_1, \dots, v_k \ge 0} \frac{1}{p_1^{v_1} \cdots p_k^{v_k}}.$$

La somme à droite se factorise. Par exemple, si $k = 2$, on a que $p_1 = 2$ et $p_2 = 3$, et on peut l'écrire comme

$$\sum_{v_1, v_2 \ge 0} \frac{1}{2^{v_1} 3^{v_2}} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\right).$$

Plus généralement, on a que

$$\sum_{v_1, \dots, v_k \ge 0} \frac{1}{p_1^{v_1} \cdots p_k^{v_k}} = \prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j} + \frac{1}{p_j^2} + \frac{1}{p_j^3} + \cdots\right) = \prod_{j=1}^k \frac{1}{1 - 1/p_j}.$$

On observe que

$$1+\frac{1}{p}\leq\frac{1}{1-1/p}\leq 1+\frac{2}{p}\leq e^{2/p}$$

pour tous les premiers $p\geq 2$. On a alors montré que

$$e^{\sum_{j=1}^{k}2/p_j}\geq\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{1-1/p_j}\geq\sum_{n\leq x}\frac{1}{n}=\log x+\gamma+O(1/x).$$

En prennant des logarithmes, on trouve que

$$\sum_{j=1}^{k}\log\frac{1}{p_j}\geq\frac{1}{2}\log(\log x+\gamma+O(1/x)).$$

On voit alors que la série infinie $\sum_{j=1}^{\infty}1/p_j$ diverge. En particulier, il existe un nombre infini de premiers. [1]

Exemple 6.7. Soit X_λ une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ, comme à l'exemple 5.13. On montre ici que la répartition de la variable aléatoire ré-normalisée $(X_\lambda-\lambda)/\sqrt{\lambda}$ converge en loi vers la distribution normale $N(0,1)$ quand $\lambda\to\infty$.

On fixe $a<b$ et on étudie

$$\mathbb{P}\left(a<\frac{X_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\leq b\right)=\sum_{\lambda+a\sqrt{\lambda}<n\leq\lambda+b\sqrt{\lambda}}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}.$$

D'abord, on utilise la formule de Stirling pour simplifier les sommés ; puis, on va utiliser la formule d'Euler-Maclaurin pour estimer la somme.

On fixe $M\geq|a|,|b|$; toutes les contantes implicites dans la notation grand-O peuvent dépendre de M. Si $|n-\lambda|\leq M\sqrt{\lambda}$, alors la formule de Stirling implique que

$$\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}=\frac{e^{-\lambda+n\log\lambda-n\log(n/e)}}{\sqrt{2\pi n}}.$$

De plus,

$$\sqrt{n}=\sqrt{\lambda+O(\sqrt{\lambda})}=\sqrt{\lambda}+O(1)=\sqrt{\lambda}(1+O(1/\sqrt{\lambda}))$$

d'après le théorème des accroissements finis. Par la suite,

$$\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}=\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)\frac{e^{-\lambda+n\log\lambda-n\log(n/e)}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Comme avant, on pose $f(x)=-\lambda+n\log\lambda-n\log(n/e)$ et on observe que $f'(x)=\log(\lambda/x)$, $f''(x)=-1/x$ et que $f'''(x)=1/x^2$. En particulier, $f(\lambda)=f'(\lambda)=0$ et, en appliquant le théorème de Taylor au tour du point λ, on voit que

$$f(n)=-\frac{(n-\lambda)^2}{2\lambda}+\frac{(n-\lambda)^3}{c^2}=-\frac{(n-\lambda)^2}{2\lambda}+O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\quad(|n-\lambda|\leq M\sqrt{\lambda}),$$

1. En fait, ce qu'on a montré implique que les premiers sont assez dense entre les entiers : par exemple, la somme $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^2$ converge car les entiers carrés sont trop rares. De façon plus quantitative, il existe $\approx\sqrt{x}$ carrés dans l'intervalle $[1,x]$). Par contre, il existe $\approx x/\log x$ nombres premiers dans l'intervalle $[1,x]$. Ce dernier résultat est appelé le *théorème des nombres premiers*.

où c dénote un nombre particulier entre n et λ. Puisque $e^x = 1 + O(x)$ pour $x \in [-1, 1]$, d'après le théorème des accroissements finis, on déduit que

$$\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right) \frac{e^{-(n-\lambda)^2/(2\lambda)}}{\sqrt{2\pi}}$$

quand $|n - \lambda| \leq M\sqrt{\lambda}$, pour que

$$\sum_{\lambda+a\sqrt{\lambda}<n\leq\lambda+b\sqrt{\lambda}} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right) \sum_{\lambda+a\sqrt{\lambda}<n\leq\lambda+b\sqrt{\lambda}} \frac{e^{-(n-\lambda)^2/(2\lambda)}}{\sqrt{2\pi\lambda}},$$

où $|a|, |b| \leq M$. On applique la formule d'Euler-Maclaurin à la somme au côté droit pour trouver que

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda+a\sqrt{\lambda}<n\leq\lambda+b\sqrt{\lambda}} \frac{e^{-(n-\lambda)^2/(2\lambda)}}{\sqrt{2\pi\lambda}} &= \int_{\lambda+a\sqrt{\lambda}}^{\lambda+b\sqrt{\lambda}} \frac{e^{-(x-\lambda)^2/(2\lambda)}}{\sqrt{2\pi\lambda}}\mathrm{d}x - \{x\}\frac{e^{-(x-\lambda)^2/(2\lambda)}}{\sqrt{2\pi\lambda}}\Big|_{x=\lambda+a\sqrt{\lambda}}^{\lambda+b\sqrt{\lambda}} \\
&\quad + \int_{\lambda+a\sqrt{\lambda}}^{\lambda+b\sqrt{\lambda}} \{x\} \cdot \frac{x-\lambda}{\lambda} \cdot \frac{e^{-(x-\lambda)^2/(2\lambda)}}{\sqrt{2\pi\lambda}}\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}u + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right).
\end{aligned}$$

En conclusion, on voit que

$$\mathbb{P}\left(a < \frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leq b\right) = \sum_{\lambda+a\sqrt{\lambda}<n\leq\lambda+b\sqrt{\lambda}} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = \int_a^b \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}u + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Le terme d'erreur tend vers 0 quand $\lambda \to \infty$. Autrement dit, la suite de variables aléatoires $((X_\lambda - \lambda)/\sqrt{\lambda})_{\lambda\geq 1}$ converge vers la distribution normale $N(0, 1)$ en loi quand $\lambda \to \infty$. $\square$

Remarque 6.8. On peut observer plusieurs similarités entre la démonstration du théorème 5.12 et l'argument ci-dessus. On peut aussi trouver une idée similaire dans la démonstration du théorème central limite en théorie de probabilités.

Exercices

Exercice 6.1.

(a) Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [N_0, +\infty) \to [0, +\infty)$ une fonction décroissante. Montrez que

$$\int_{N_0}^N f(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{n=N_0}^N f(n) \leq f(N_0) + \int_{N_0}^N f(t)\mathrm{d}t \quad (N \geq N_0).$$

Déduisez que la série $\sum_{n\geq N_0} f(n)$ converge si et seulement si $\sup_{N\geq N_0} \int_{N_0}^N f(t)\mathrm{d}t < \infty$.

(b) Utilisez le critère au-dessus pour étudier la convergence de la série

$$\sum_{n\geq 10} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)^p},$$

où p est un paramètre positif.

Exercice 6.2. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(a) Si $\alpha \geq 0$, alors montrez que

$$\sum_{n\leq x} n^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + O_\alpha(x^\alpha) \quad (x \geq 1).$$

(b) Si $-1 < \alpha < 0$, alors montrez qu'il existe une constante c_α telle que

$$\sum_{n\leq x} n^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c_\alpha + O_\alpha(x^\alpha) \quad (x \geq 1).$$

(c) Si $\alpha < -1$, alors montrez que

$$\sum_{n\leq x} n^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha + O_\alpha(x^{\alpha+1}) \quad (x \geq 1).$$

Exercice 6.3.

(a) Montrez qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$\sum_{n\leq x} \frac{\log n}{n} = \frac{\log^2 x}{2} + c + O\left(\frac{\log x}{x}\right) \quad (x \geq 2).$$

(b) Montrez qu'on ne peut pas améliorer le terme d'erreur, c'est-à-dire de remplacer la fonction $(\log x)/x$ dans le grand-Oh par une fonction $f(x)$ telle que $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{(\log x)/x} = 0$. [*Indice :* La fonction $x \to \sum_{n\leq x} \log n/n$ saute chaque fois que x passe par un entier.]

Exercice 6.4. Montrez qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$\sum_{n\leq x} \frac{\sin(\log n)}{n} = -\cos(\log x) + c + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

pour tout $x \geq 1$. Est-ce que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\log n)}{n}$$

converge ?

Exercice 6.5. Complétez la démonstration du théorème 6.5 comme suivant :

(a) Montrez par induction que, pour chaque $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$$I_n := \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2k)} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} & \text{si } n = 2k, \\ \frac{2 \cdot 4 \cdots (2k)}{1 \cdot 3 \cdots (2k+1)} = \frac{4^k}{(2k+1)\binom{2k}{k}} & \text{si } n = 2k+1, \end{cases}$$

(b) Pour chaque $\delta \in (0, \pi/2]$, posons

$$I_n(\delta) := \int_0^{\delta} (\cos x)^n \mathrm{d}x.$$

Montrez que

$$I_n - \frac{\pi}{2}(\cos \delta)^n \leq I_n(\delta) \leq I_n.$$

(c) Pour chaque $\delta \in (0, \pi/2]$, montrez que

$$(\cos \delta) \cdot \frac{I_n - \frac{\pi}{2}(\cos \delta)^n}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1.$$

Déduisez que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$$

et complétez la démonstration du théorème 6.5.

Deuxième partie

Espaces de fonctions

Chapitre 7

Suites et séries de fonctions

L'ensemble de réels $\mathbb{R}$ est muni d'une topologie qui nous permet de parler de nombres qui sont 'proches' d'autres nombres, et de suites de nombres réels convergeant. Dans cette partie du livre, on assume ce point de vue pour les fonctions : on va alors, traiter les fonctions comme de points dans un grand *espace de fonctions*. Par exemple, on va étudier de *limites de fonctions* dans les espaces

$$\mathcal{R}([0,1]), \quad C([0,1]), \quad \mathcal{D}([0,1]),$$

où $\mathcal{D}([0,1])$ dénote l'ensemble de fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ qui sont dérivables. Ce sont de sous-ensembles de fonctions $\mathcal{S} = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\}$. Si on donne une certain *topologie* à $\mathcal{S}$, est-ce que les ensembles $\mathcal{R}([0,1])$, $C([0,1])$ et $\mathcal{D}([0,1])$ sont ouverts ? Fermés ? Compacts ? (On ne va pas assumer un point de vue si abstrait, mais on souligne ici les analogies avec $\mathbb{R}$.)

Pour étudier les espaces de fonctions, on introduit le concept d'une **suite de fonctions**. Sa définition est assez intuitive : une suite de fonctions est tout simplement une suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ dont les membres sont de fonctions. On suppose aussi que toutes ces fonctions ont le même domaine de définition, soit X, et elles prennent de valeurs réelles. Comme on l'a fait pour les suites et les séries de nombres réels, on peut parler de la convergence d'une suite et d'une série de fonctions. Cependant, il y a plusieurs types de convergences d'une suite et d'une série de fonctions. Le type le plus simple est la convergence ponctuelle :

Définition 7.1. On dit que la suite de fonctions $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, **converge (ponctuellement)** vers une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ si, pour tout $x \in X$, la limite $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existe et est égale à $f(x)$. Dans ce cas, on écrit $f_n \to f$ ou, même, que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. La fonction f est appelée la **fonction limite** de la suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.

De façon analogue, si pour chaque $x \in X$ la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge, alors on dit que la **série de fonctions** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **converge ponctuellement**. Dans ce cas-ci, la fonction-limite $S : X \to \mathbb{R}$, définie par $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, est appelée la fonction-somme de la suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$. □

Exemple 7.2. La limite de la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$, $0 \leq x \leq 1$, est la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

D'autre côté, la fonction-somme n'est pas définie sur $X = [0,1]$, car la série $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ diverge quand $x = 1$. Cependant, si on restreint le domaine à $X = [0,1)$, alors on voit facilement que la fonction-somme de la suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ est la fonction

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \quad (0 \leq x < 1). \qquad \square$$

Supposons que $f_n \to f$ sur un ensemble X. Supposons, de plus, que les fonctions f_n ont quelques propriétés ; par exemple, elle pourraient être continues, intégrables, ou différentiables. Est-ce que la fonction limite hérite de ces propriétés ? La réponse n'est pas toujours oui :

Exemple 7.3. Soit $f_n(x) = nx/(1+nx)$ pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. On a que $f_n \to f$, où

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Donc, bien que les fonctions f_n soient continues et différentiables, la fonction-limite f ne l'est pas. $\square$

Exemple 7.4. Soit $f_n(x) = x^2/(1+x^2)^n$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. On a que

$$S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ \frac{x^2}{1-1/(1+x^2)} = 1 + x^2 & \text{si } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Donc, bien que les fonctions f_n soient continues et différentiables, la fonction-somme limite S ne l'est pas. $\square$

Exemple 7.5. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$, on définit

$$f_m(x) := \lim_{n\to\infty} (\cos(2\pi m!x))^{2n} = \mathbf{1}_{2\,m!\mathbb{Z}}(x)$$

où $\mathbf{1}_A$ dénote la fonction indicatrice de l'ensemble A. On peut facilement voir que $f_m \in \mathcal{R}([a,b])$, pour chaque intervalle $[a,b]$. Cependant, on a que

$$f(x) := \lim_{m\to\infty} f_m(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x).$$

En effet, si $x \notin \mathbb{Q}$, alors $f_m(x) = 0$ pour chaque $m \geq 1$, tandis que si $x = a/b$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$ et $m \geq |b|$, alors $f_m(x) = 1$.

Donc, on voit que dans cet exemple, la fonction limite f n'est pas intégrable sur aucun intervalle $[a,b]$, même si chaque membre de la suite $(f_m)_{m\geq 1}$ l'est. $\square$

Exemple 7.6. Soit

$$f_n(x) = \begin{cases} ne^{-nx} & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On a que $f_n \to 0$ sur $[0,1]$. Cependant,

$$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 ne^{-nx}\mathrm{d}x \overset{y=nx}{=} \int_0^n e^{-y}dy = 1 - e^{-n} \to 1$$

quand $n \to \infty$.

Alors, ici on voit un exemple d'une suite de fonctions intégrables convergeant vers une fonction qui est aussi intégrable, mais la limite de l'intégrale n'est pas égale à l'intégrale de la fonction-limite. □

Exemple 7.7. Soit

$$f_n(x) = x - \frac{\log(1+nx)}{n} \quad (x \geq 0,\ n \in \mathbb{N}).$$

On a que

$$f_n'(x) = 1 - \frac{1}{1+nx} = \frac{nx}{1+nx} \to \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

quand $n \to \infty$. Cependant, on a que $f'(x) = 1$ pour chaque $x \geq 0$.

Alors, ici on voit un exemple d'une suite de fonctions différentiables convergeant vers une fonction qui est aussi différentiable, mais la suite des dérivées ne converge pas vers la dérivée de la fonction-limite. □

Convergence uniforme

Les exemples au-dessus indiquent qu'on a besoin d'une nouvelle notion de convergence, plus forte que la convergence ponctuelle, sous laquelle si $f_n \to f$, alors la fonction-limite f héritera des propriétés importantes des fonctions f_n. Ceci nous amène au concept de la convergence uniforme.

Supposons que $f_n \to f$. La raison pour laquelle les propriétés des f_n ne se transfèrent pas toujours à la limite f est que le taux de convergence de la suite $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ peut être assez différent pour les différents valeurs de x. Par exemple, si $f_n(x) = nx/(1+nx)$ et $x > 0$, alors on voit que $f_n(x) \to 1$. Cependant,

$$1 - \frac{nx}{1+nx} = \frac{1}{1+nx},$$

et on voit que pour faire cette difference plus petite que $< \varepsilon$, il faut choisir $n > (\varepsilon^{-1} - 1)/x$. Donc, quand $x \to 0^+$, la suite $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ converge vers 1 de plus en plus lentement. Ceci nous amène naturellement au concept de la convergence uniforme :

Définition 7.8. Soit $(f_n)_{n=1}^\infty$ une suite de fonctions $f_n : X \to \mathbb{R}$. On dit que $(f_n)_{n=1}^\infty$ **converge uniformément** (sur X) s'il existe une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ telle que pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $N \geq 1$, dependant seulement de ε, tel que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{pour tous } n \geq N,\ x \in X.$$

Dans ce cas, on écrit $f_n \overset{\text{unif}}{\to} f$.

De même, on dit que la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformément sur X si la suite de sommes partielles $(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformement sur X. □

Définition 7.9. Étant donné une fonction $f : X \to \mathbb{R}$, on défini

$$\|f\|_{\infty,X} := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Si le domaine X est clair, on va écrire souvent $\|f\|_\infty$ au lieu de $\|f\|_{\infty,X}$.

Avec cette définition, on trouve facilement que $f_n \overset{\text{unif}}{\to} f$ sur X si, et seulement si,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\infty,X} = 0.$$ □

Exemple 7.10. Soit $f_n(x) = nx/(1 + nx)$ et $X = (0, 1]$. Alors, on a que $f_n(x) \to f(x) := 1$ pour chaque $x \in X$. Cependant,

$$\|f_n - f\|_{\infty,X} = \sup_{0<x\le 1} \frac{1}{1 + nx} = \frac{1}{1 + n \cdot 0} = 1.$$

Donc, on voit que $f_n \overset{\text{unif}}{\not\to} f$ sur X.

Il faut souligner ici que l'ensemble X, où on étudie si la convergence est uniforme, est très important. Si $Y = [\delta, 1]$, où $\delta \in (0, 1)$ est fixé, alors on a que

$$\|f_n - f\|_{\infty,Y} = \sup_{\delta\le x\le 1} \frac{1}{1 + nx} = \frac{1}{1 + n\delta} \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Par conséquent, $f_n \overset{\text{unif}}{\to} f$ sur Y. □

Exemple 7.11. Soit

$$f_n(x) = \begin{cases} ne^{-nx} & \text{si } 0 < x \le 1, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

pour que $f_n \to 0$ sur $[0, 1]$. On a que

$$\|f_n - 0\|_{\infty,[0,1]} = \sup_{0<x\le 1} ne^{-nx} = n,$$

donc $f_n \overset{\text{unif}}{\not\to} 0$ sur $[0, 1]$. □

On a l'analogue du critère de Cauchy pour la convergence uniforme :

Théorème 7.12. *Soit $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, une suite de fonctions. Alors, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément sur X si et seulement si, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que*

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \textit{pour tous } m, n \ge N,\ x \in X. \tag{7.1}$$

De façon équivalente, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément sur X si et seulement si, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_n - f_m\|_{\infty,X} < \varepsilon$ pour $n, m \ge N$.

Démonstration. "$\Rightarrow$" : Supposons que $f_n \overset{\text{unif}}{\to} f$ sur X. Donc, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $N \geq 1$ tel que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2 \quad (n \geq N,\ x \in X).$$

Donc, on a que

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad (m, n \geq N,\ x \in X).$$

"$\Leftarrow$" : Vice versa, supposons que (7.1) est vraie. Alors, pour chaque $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy. En particulier, elle est convergente, soit au nombre $f(x)$. De cette façon, on construit une fonction $f : X \to \mathbb{R}$. Finalement, en laissant $n \to \infty$ à la relation (7.1), on trouve que

$$|f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{pour tous } m \geq N,\ x \in X,$$

si N est assez grand en termes de ε. Ceci implique clairement que $f_n \overset{\text{unif}}{\to} f$ sur X, ce qui est ce qu'il fallait démontrer.

On laisse comme un exercice la dernière affirmation de l'énoncé du théorème. □

La plus importante application du théorème précédent est le critère de Weierstrass :

Théorème 7.13 (critère de Weierstrass)**.** *Soit $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, une suite de fonctions. Supposons que $\|f_n\|_{\infty,X} \leq M_n$ et que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$. Alors, la série des fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformément sur X.*

Démonstration. Soit $S_n = f_1 + \cdots + f_n$, la suite des sommes partielles de la suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, alors pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $N \geq 1$ tel que

$$\sum_{j=n+1}^{m} M_j < \varepsilon \quad (m > n \geq N).$$

Donc,

$$\|S_m - S_n\|_{\infty,X} = \sup_{x \in X} \left| \sum_{j=n+1}^{m} f_j(x) \right| \leq \sup_{x \in X} \sum_{j=n+1}^{m} |f_j(x)| \leq \sup_{x \in X} \sum_{j=n+1}^{m} M_j = \sum_{j=n+1}^{m} M_j < \varepsilon,$$

et le résultat découle du théorème 7.12. □

Exemple 7.14. La série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^2$ converge uniformément pour $x \in [-1, 1]$. En effet, on peut appliquer le critère de Weierstrass avec $M_n = 1/n^2$. □

Exemple 7.15. On veut étudier si la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ converge uniformément pour $x \in (-1, 1)$. On ne peut pas appliquer le critère de Weierstrass car

$$\sup_{-1<x<1} \left| \frac{x^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

et $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n = +\infty$. Plutôt, on utilise le théorème 7.12 : on a que

$$\sup_{-1<x<1} \left| \sum_{j=n+1}^{m} \frac{x^j}{j} \right| \geq \sum_{j=n+1}^{m} \frac{1^j}{j}$$

pour $m > n \geq 1$. Donc

$$\sup_{m>n} \sup_{-1<x<1} \left| \sum_{j=n+1}^{m} \frac{x^j}{j} \right| = +\infty,$$

par la divergence de la série harmonique $\sum_{j=1}^{\infty} 1/j$. En particulier, on voit que (7.1) n'est pas vraie pour la suite des sommes partielles des fonctions x^n/n. Par la suite, la série $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ ne converge pas uniformément pour $x \in (-1, 1)$.

Cependant, c'est facile à voir que, pour chaque $\delta > 0$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ converge uniformément pour $x \in [-1+\delta, 1-\delta]$. En effet, on a que

$$\sup_{-1+\delta \leq x \leq 1-\delta} \left| \frac{x^n}{n} \right| = \frac{(1-\delta)^n}{n} \leq (1-\delta)^n,$$

et la série $\sum_{n=1}^{\infty} (1-\delta)^n$ converge. Donc, le critère de Weierstrass implique la convergence uniforme de notre série des fonctions sur $[-1+\delta, 1-\delta]$. □

Exercices

Exercice 7.1. La suite de fonctions $(e^{-nx})_{n\geq 1}$ est-elle uniformément convergente sur $[0, +\infty)$? Sur $(0, +\infty)$? Sur $[1, +\infty)$?

Exercice 7.2. Étudiez si les suites et les séries suivantes convergent uniformément sur les ensembles indiqués :

(a) $f_n(x) = xe^{-nx}$; $X = [0, +\infty)$.
(b) $\sum_{n\geq 0} \log(1 + x/n^2)$; $X = [0, +\infty)$ et $X = [0, 1]$.
(c) $\sum_{n\geq 0} x/(1+x)^n$; $X = [0, 1]$.

Exercice 7.3. Soient $u_n(x) := (\sin nx)e^{-nx}$ et

$$v_n(y) := \int_{\pi}^{y} u_n(x) \mathrm{d}x.$$

Montrez que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(y)$$

converge uniformément pour $y \geq \pi$.

Chapitre 8

Propriétés de fonctions-limites

On montre ici que si $f_n \overset{\text{unif}}{\to} f$, alors la fonction-limite f preserve plusieurs propriétés importantes des fonctions f_n.

Théorème 8.1. *Soit $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, une suite de fonctions convergeant uniformément vers une fonction $f : X \to \mathbb{R}$. Si les fonctions f_n, $n \geq 1$, sont toutes continues sur X, alors f l'est aussi.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_n - f\|_{\infty,X} < \varepsilon$. Donc

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &\leq 2\varepsilon + |f_n(x) - f_n(y)| \quad (x, y \in X). \end{aligned}$$

En particulier, si f_n est continue en $x_0 \in X$, alors il existe $\delta > 0$, dépendant seulement de ε et de x_0 car $n = n(\varepsilon)$, tel que

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon \quad \text{si } x, x_0 \in X \text{ avec } |x - x_0| < \delta.$$

Alors, on trouve que

$$|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon \quad \text{si } x, x_0 \in X \text{ avec } |x - x_0| < \delta.$$

ce qui implique que f est continue en x_0. □

Exemple 8.2. On revient à la série $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ de l'example 7.15. On va utiliser le théorème précédent pour montrer qu'elle converge vers une fonction continue sur $(-1, 1)$. Cependant, la convergence n'est pas uniforme sur $(-1, 1)$, alors le théorème 8.1 n'est pas directement applicable. On utilise une astuce : pour chaque $\delta > 0$, on a montré à la fin de l'exemple 7.15 que la série $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ converge uniformément sur $[-1 + \delta, 1 - \delta]$, alors elle définit une fonction continue sur cet intervalle. Par conséquent, la série $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ définit une fonction continue sur l'ensemble $\bigcup_{\delta>0}[-1 + \delta, 1 - \delta] = (-1, 1)$. □

On généralise maintenant le théorème 8.1 :

Théorème 8.3. *Soit $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, une suite de fonctions convergeant uniformément vers une fonction $f : X \to \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in X$ et supposons que les limites $\ell_n = \lim_{x\to x_0} f_n(x)$ existent pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, les limites $\lim_{n\to\infty} \ell_n$ et $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existent et elles sont égales, c'est-à-dire*

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Démonstration. On a que

$$|\ell_m - \ell_n| = \left|\lim_{x\to x_0} f_m(x) - \lim_{x\to x_0} f_n(x)\right| = \lim_{x\to x_0} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|_{\infty,X}.$$

Alors, le théorème 7.12 implique que la suite $(\ell_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy, donc convergente. Soit ℓ sa limite. On veut montrer que $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe aussi et qu'elle est égale à ℓ.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n = n(\varepsilon)$ tel que $|\ell_n - \ell| < \varepsilon$ et $\|f_n - f\|_{\infty,X} < \varepsilon$. Alors,

$$|f(x) - \ell| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - \ell_n| + |\ell_n - \ell| \leq 2\varepsilon + |f_n(x) - \ell_n|.$$

Puisque $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \ell_n$, alors il existe $\delta > 0$, dépendant au plus sur ε car $n = n(\varepsilon)$, tel que

$$|f_n(x) - \ell_n| < \varepsilon \quad \text{si } x, x_0 \in X \text{ avec } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Alors, on trouve que

$$|f(x) - \ell| < 3\varepsilon \quad \text{si } x, x_0 \in X \text{ avec } 0 < |x - x_0| < \delta,$$

ce qui implique que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, qui est ce qu'il fallait démontrer. □

Théorème 8.4. *Soit $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, une suite de fonctions convergeant uniformément vers une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si les fonctions f_n, $n \geq 1$, sont toutes intégrables sur $[a,b]$, alors f l'est aussi. De plus, on a que*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

Démonstration. Tout d'abord, on montre que $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $m = m(\varepsilon)$ tel que $\|f_m - f\|_\infty < \varepsilon$. Donc,

$$\big||f_m(t) - f_m(s)| - |f(t) - f(s)|\big| < 2\varepsilon \quad (a \leq t, s \leq b),$$

par l'inégalité triangulaire. En particulier, si $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ est une partition de $[a,b]$, alors

$$|D(f_m, P) - D(f, P)| \leq \sum_{j=1}^{n} 2\varepsilon(x_j - x_{j-1}) = 2\varepsilon(b - a).$$

D'autre côté, on sait qu'il existe une partition $P = P(m,\varepsilon) = P(\varepsilon)$ telle que $D(f_m, P) < \varepsilon$. Par la suite, $D(f, P) < \varepsilon(b - a + 1)$, et on déduit que $f \in \mathcal{R}([a,b])$.

Il reste à montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n - \int_a^b f$. On a que

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| = \left|\int_a^b (f_n - f)\right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \|f_n - f\|_{\infty,X} \cdot (b-a) \to 0$$

quand $n \to \infty$. Ceci conclut la démonstration. □

Théorème 8.5. *Soit $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, une suite de fonctions différentiables. Supposons que :*

— *il existe un point $x_0 \in [a,b]$ pour lequel la suite $(f_n(x_0))_{n=1}^{\infty}$ converge ;*
— *la suite des dérivées $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément vers une fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$.*

Alors, la suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément vers une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ qui est différentiable et dont la dérivée satisfait l'identité $f' = g$.

Démonstration. Si $m, n \in \mathbb{N}$ et $x \in [a,b]$, alors on a que

$$\begin{aligned}|f_m(x) - f_n(x)| &\leq |(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(x_0) - f_n(x_0))| + |f_m(x_0) - f_n(x_0)| \\ &= |(f_m'(c) - f_n'(c))(x - x_0)| + |f_m(x_0) - f_n(x_0)|\end{aligned}$$

pour un c entre x et x_0. Puisque $|x - x_0| \leq b - a$ pour tous $x, x_0 \in [a,b]$, on trouve que

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m' - f_n'\|_\infty \cdot (b-a) + |f_n(x) - f_n(x_0)|.$$

Puisque $(f_n(x_0))_{n=1}^{\infty}$ converge, alors elle est une suite de Cauchy. De plus, puisque $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément, alors elle satisfait (7.1). Donc, on voit facilement que la suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ satisfait aussi la même condition. En appliquant le théorème 7.12, on trouve que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément sur $[a,b]$, soit vers la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Il reste à montrer que f est différentiable et que $f' = g$. On fixe $x_1 \in [a,b]$. On va appliquer le théorème 8.3 pour montrer que

$$\lim_{\substack{x\to x_1 \\ a\leq x\leq b}} \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(x_1)}{x - x_1} = \lim_{n\to\infty} \lim_{\substack{x\to x_1 \\ a\leq x\leq b}} \frac{f_n(x) - f_n(x_1)}{x - x_1}.$$

Afin de montrer cette égalité, on définit une suite auxiliaire de fonctions par

$$g_n(x) := \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(x_1)}{x - x_1} & \text{si } x \neq x_1, \\ f_n'(x_1) & \text{si } x = x_1, \end{cases}$$

pour $x \in [a,b]$. On affirme que $(g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[a,b]$. En effet, si $x \neq x_1$, alors il existe c entre x et x_1 tel que

$$\begin{aligned}|g_m(x) - g_n(x)| &= \left|\frac{(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(x_1)}{x - x_1}\right| \\ &= |(f_m - f_n)'(c)| \\ &\leq \|f_m' - f_n'\|_\infty,\end{aligned}$$

d'après le théorème des accroissements finis. Puisque on a aussi que $g_m(x_1) - g_n(x_1) = f'_m(x_1) - f'_n(x_1)$ pour tous $m, n \geq 1$, on déduit que

$$\|g_m - g_n\|_\infty \leq \|f'_m - f'_n\|_\infty \quad (m, n \geq 1).$$

Vu que la suite $(f'_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément, elle satisfait le critère de Cauchy (cf. théorème 7.12). Par la suite, $(g_n)_{n\geq 1}$ satisfait aussi le critère de Cauchy, et on déduit qu'elle converge uniformément sur $[a, b]$. Finalement, on a que $\lim_{n\to\infty} g_n(x_1) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x_1) = g(x_1)$, et le théorème 8.3 implique que

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to x_1\\ a\leq x\leq b}} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \lim_{\substack{x\to x_1\\ a\leq x\leq b}} \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(x_1)}{x - x_1} &= \lim_{n\to\infty} \lim_{\substack{x\to x_1\\ a\leq x\leq b}} \frac{f_n(x) - f_n(x_1)}{x - x_1} \\
&= \lim_{n\to\infty} f'_n(x_1) \\
&= g(x_1),
\end{aligned}$$

ce qui est ce qu'il fallait démontrer. □

Exercices

Exercice 8.1. Soit $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, une suite de fonctions convergeant uniformément vers une fonction $f : X \to \mathbb{R}$. Si les fonctions f_n, $n \geq 1$, sont toutes uniformément continues sur X, alors montrez que f l'est aussi.

Exercice 8.2. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite des fonctions qui converge vers une fonction f sur un ensemble non-vide $X \subseteq \mathbb{R}$. Supposons que les fonctions f_n sont toutes bornées.

(a) Est-ce que c'est vrai que la fonction-limite f est bornée ?

(b) Si on suppose la condition plus forte que f_n converge uniformément vers f, est-ce que c'est vrai maintenant que f est bornée ?

Exercice 8.3. Montrez que l'intégrale de Riemann

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^\infty \frac{\{nx\}}{n^2} dx$$

est bien définie et égale à $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2n^2}$.

Exercice 8.4. Soit $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, une suite de fonctions convergeant uniformément vers une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si $f_n \in \mathcal{R}^*([a, b])$ pour tout n, alors montrez que $f \in \mathcal{R}^*([a, b])$ et que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

Exercice 8.5. Soit $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, une suite de fonctions continues et soit $f : X \to \mathbb{R}$ une autre fonction, où X est un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}$.

(a) Si $f_n \stackrel{\text{unif}}{\to} f$ sur X et $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq X$ est une suite convergente vers un point $x \in X$, alors montrez que $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

(b) Montrez que la réciproque de la partie (a) est aussi vraie si $X = [a, b]$. C'est-à-dire, montrez que si $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$ pour n'importe quelle suite $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq [a, b]$ convergente vers un point $x \in [a, b]$, alors $f_n \stackrel{\text{unif}}{\to} f$ sur $[a, b]$.

(c) Trouvez un contre-exemple à la réciproque de (a) quand X est un intervalle borné mais pas fermé.

Exercice 8.6. On considère la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) := \frac{2^n x}{1 + 2^n x^2}.$$

(a) Montrez que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge ponctuellement sur $[0, 1]$.

(b) Est-ce que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[0, 1]$?

(c) Calculez $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 8.7. Montrez que :

(a) la série $\sum_{n\geq 1} \sin(x/n^2)$ converge pour chaque $x \in \mathbb{R}$.

(b) la série $\sum_{n\geq 1} \sin(x/n^2)$ converge uniformément sur $[-M, M]$, pour chaque $M > 0$ fixé.

(c) la série $\sum_{n\geq 1} \sin(x/n^2)$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

(d) la fonction $x \to \sum_{n\geq 1} \sin(x/n^2)$ est différentiable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8.8. Pour $s > 1$, on pose $\zeta(s) := \sum_{n\geq 1} 1/n^s$. Montrez que :

(a) la série $\sum_{n\geq 1} 1/n^s$ converge uniformément sur $[1 + \varepsilon, +\infty)$, pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé.

(b) la série $\sum_{n\geq 1} 1/n^s$ ne converge pas uniformément sur $(1, +\infty)$.

(c) la fonction ζ est continue sur $(1, +\infty)$.

(d) la fonction ζ est différentiable sur $(1, +\infty)$ et que

$$\zeta'(s) = -\sum_{n\geq 1} \frac{\log n}{n^s}.$$

(e) on a l'identité

$$\int_2^\infty (\zeta(s) - 1)ds = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2 \log n}.$$

Exercice 8.9. (a) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions continues appartenant à $\mathcal{R}^*(-\infty, \infty)$. Supposons que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. Supposons aussi qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{R}^*(-\infty, \infty)$ telle que $|f_n(x)| \leq g(x)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors, montrez que $f \in \mathcal{R}^*(-\infty, \infty)$ et que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^\infty f_n(x)\mathrm{d}x = \int_\infty^\infty f(x)\mathrm{d}x.$$

[*Indication* : Observez que $|\int_{M\leq|x|\leq M'} f_n(x)\mathrm{d}x| \leq \int_{M\leq|x|\leq M'} g(x)\mathrm{d}x$.]

(b) Calculez la limite

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\sin x}{n}}}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

Exercice 8.10.

(a) Soit $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ une série des fonctions convergeant uniformément sur un ensemble X. Alors, montrez que $f_n \overset{\text{unif}}{\to} 0$ sur X.

(b) Étudiez si la série des fonctions $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/(1+nx)$ converge uniformément sur $(0,1]$.

(c) Est-ce que la série des fonctions de la partie (b) converge uniformément sur $[1/2,1]$?

Chapitre 9

Séries de puissances

Une **série de puissances** est une série de fonctions de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n,$$

où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite réelle. Le nombre x_0 est appelé le **centre** de la série de puissances. On observe que si cette série converge pour un certain x, alors $|a_n(x-x_0)^n|$ est une suite bornée, soit par M. En particulier, is $|y-x_0| < |x-x_0|$, alors

$$|a_n(y-x_0)^n| = |a_n(x-x_0)^n| \cdot \left|\frac{y-x_0}{x-x_0}\right|^n \leq M \cdot \left|\frac{y-x_0}{x-x_0}\right|^n,$$

donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(y-x_0)^n$ converge absolument pour chaque $y \in \mathbb{R}$ avec $|y-x_0| < |x-x_0|$. Pour cette raison, on définit [1]

$$R := \sup\left\{|x-x_0| : x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ converge}\right\} \in [0,+\infty].$$

La discussion ci-dessus implique que :

— la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge absolument si $|x-x_0| < R$;

— la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ diverge quand $|x-x_0| > R$.

Le théorème suivant donne une formule pour R et étudie le type de convergence qu'on a :

Théorème 9.1. *Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ une série de puissances de rayon de convergence $R \geq 0$. Alors,*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}}.$$

De plus, si $0 \leq r < R$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge uniformément pour $x \in [x_0-r, x_0+r]$.

Démonstration. Soit

$$R' := \frac{1}{\limsup_{n\infty} |a_n|^{1/n}}.$$

1. Le nombre R est bien défini car $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge trivialement quand $x = x_0$.

On observe que
$$|a_n(x-x_0)^n|^{1/n} = |a_n|^{1/n} \cdot |x-x_0|,$$
d'où
$$\limsup_{n\to\infty} |a_n(x-x_0)^n|^{1/n} = \frac{|x-x_0|}{R'}.$$
La règle de Cauchy montre alors que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge absolument quand $|x-x_0| < R'$, et qu'elle diverge quand $|x-x_0| > R'$, d'où on déduit tout de suite que $R' = R$.

Finalement, fixons $r' \in (r, R)$, pour que $1/R < 1/r'$, et on observe qu'il existe N tel que $|a_n|^{1/n} \leq 1/r'$ pour $n \geq N$. Donc
$$\sup_{x_0-r\leq x\leq x_0+r} |a_n(x-x_0)^n| \leq (r/r')^n \quad (n \geq N),$$
et le critère de Weierstrass conclut la démonstration. □

Exemple 9.2. La série de puissances $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^2$ a centre $x_0 = 0$ et rayon de convergence
$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} n^{-2/n}} = 1.$$
De plus, elle converge sur $[-1, 1]$. La convergence est uniforme sur cet intervalle d'après le critère de Weierstrass : $|x^n/n^2| \leq 1/n^2 =: M_n$ pour $x \in [-1, 1]$, et la série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ converge. □

Exemple 9.3. La série de puissances $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ a centre $x_0 = 0$ et rayon de convergence
$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} n^{-1/n}} = 1.$$
De plus, elle converge sur $[-1, 1)$, mais elle diverge quand $x = 1$.

Le théorème 9.1 implique qu'on convergence uniforme sur $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, pour chaque ε **fixé**. Cependant, ceci n'implique pas qu'on convergence uniforme sur $(-1, 1)$. En fait, la convergence n'est pas uniforme sur cette intervalle : on a que
$$\left\| \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{x^n}{n} \right\|_{(-1,1),\infty} = \sup_{-1<x<1} \left| \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{x^n}{n} \right| = \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n} \geq N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2},$$
et donc le théorème 7.12 montre notre affirmation. □

En pratique, c'est souvent plus simple d'utiliser une version plus faible du théorème 9.1 :

Théorème 9.4. *Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ une série de puissances. Si la limite*
$$\ell := \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$
existe, alors rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ est
$$R = \frac{1}{\ell}.$$

Démonstration. On a que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|(x-x_0)\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x-x_0|\cdot\ell.$$

La règle de d'Alembert dit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge absolument si $|x-x_0|\ell < 1$, et qu'elle diverge si $|x-x_0|\ell > 1$. On voit alors que on a convergence quand $|x-x_0| < 1/\ell$ et divergence quand $|x-x_0| > 1/\ell$, ce qui montre l'affirmation que $R = 1/\ell$.

De façon alternative, on peut aussi utiliser les inégalités classiques

$$\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le \liminf_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} \le \limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} \le \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Donc, si $\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|$ existe et est égale à ℓ, on voit que $\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} = \ell$. On peut alors utiliser le théorème 9.1. □

Exemple 9.5. La série de puissances $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n!$ a centre $x_0 = 0$ et rayon de convergence $R = +\infty$, car $a_n = 1/n!$ et $a_{n+1}/a_n = 1/(n+1) \to 0$ quand $n \to \infty$. □

Théorème 9.6. *Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ une série de puissances de rayon de convergence $R > 0$. La fonction-somme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ est différentiable une infinité de fois sur l'intervalle (x_0-R, x_0+R) et sa k-ieme dérivée est donnée par la série des puissances*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}, \tag{9.1}$$

dont le rayon de convergence est aussi R. En particulier, on trouve que

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}).$$

Démonstration. Il suffit de montrer que f' existe et est donnée par la formule (9.1) quand $k = 1$; le cas général découle de ce cas et d'induction sur k.

On considère la série de puissances de dérivées

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x-x_0)^n.$$

On a que

$$\limsup_{n\to\infty}((n+1)|a_{n+1}|)^{1/n} = \limsup_{n\to\infty}|a_{n+1}|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty}\left(|a_{n+1}|^{1/(n+1)}\right)^{1+1/n} = 1/R,$$

car $\lim_{n\to\infty}(n+1)^{1/n} = 1 = \lim_{n\to\infty}(1+1/n)$. Donc, on trouve que le rayon de convergence de la série de dérivées $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ est aussi R. On fixe $r \in (0,R)$. Le théorème 9.6 implique que les séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ convergent uniformément sur (x_0-r, x_0+r). Donc, le théorème 8.5 nous donne que $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} = f'(x)$, et le résultat affirmé découle. □

Séries de Taylor

Le théorème 9.6 implique que si une fonction **lisse** $f \in C^\infty([a,b])$ est exprimable comme une séries de puissances autour d'un point x_0, alors cette série de puissances doit être la série de Taylor de f autour du point x_0. Deux questions naturelles se posent :

— Question 1 : Comment peut-on montrer que f est égale à sa série de Taylor autour d'un point ;

— Question 2 : Est-ce que chaque fonction lisse $f \in C^\infty([a,b])$ est exprimable en séries de puissances autour de chaque point $x_0 \in [a,b]$?

On a partiellement répondu à la première question au cours de l'analyse 1 : on a vu que si f est k fois derivable sur $[a,b]$, et $x, x_0 \in [a,b]$, alors

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + R_k(x,x_0,f),$$

où

$$R_k(x,x_0,f) = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-x_0)^k \tag{9.2}$$

pour un c entre x_0 et x. On peut utiliser cette forme explicite du reste (appelé la **forme de Lagrange**) pour montrer que $R_k(x,x_0,f) \to 0$ quand $k \to \infty$ dans plusieurs cas importants. Quelques tels exemples classiques sont les fonctions e^x, $\cos x$ et $\sin x$.

Cependant, la forme de Lagrange du reste n'est pas toujours suffisante pour montrer la convergence de la série de Taylor, même dans des exemples très simples :

Exemple 9.7. Considérons $f(x) = 1/(1-x)$. On sait que

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} x^n \quad \text{pour } |x| < 1. \tag{9.3}$$

La démonstration standard de ce fait et en observant que $1+x+\cdots+x^{k-1} = (1-x^k)/(1-x)$. Supposons qu'on ne connait pas ce fait et on veut utiliser le théorème de Taylor pour montrer (9.3).

On peut facilement montrer que

$$f^{(j)}(x) = \frac{j!}{(1-x)^{j+1}}.$$

Donc, (9.2) implique que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{j=0}^{k-1} x^j + \frac{x^j}{(1-c)^{j+1}}$$

pour un certain c entre 0 et c. Pour être sûr, alors, que le reste tend vers zéro, il faut que $|x/(1-c)| < 1$.

Quand $x \leq 0$, on a que $x \leq c \leq 0$, donc $|x/(1-c)| \leq |x| < 1$, comme on le voulait.

Par contrer, quand $x > 0$, on a que $0 < x < c$, donc la seule chose qu'on sait est que $|x/(1-c)| \le x/(1-x)$. Ce nombre est < 1 juste quand $x < 1/2$.

On est arrivé à un problème : on sait que la série de puissances $\sum_{n\ge 0} x^n$ converge pour $|x| < 1$, mais en utilisant (9.2) on peut montrer que $R_k(x, 0, f) \to 0$ juste quand $-1 < x < 1/2$.

Pour fixer le problème ci-dessus, on montre le théorème suivant, qui donne $R_k(f, x, x_0)$ dans la **forme intégrale** :

Théorème 9.8. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction k-fois derivable, dont la k-ième dérivée $f^{(k)}$ est intégrable sur $[a, b]$. Si $x, x_0 \in [a, b]$, alors*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t)\mathrm{d}t.$$

Démonstration. On observe que

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}t.$$

Ceci montre le théorème quand $k = 1$. Pour montrer le cas général, on intègre par parties plusieurs fois : comme dans la démonstration de la formule d'Euler-Maclaurin, on a que

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}t &= \int_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}(t-x)\\ &= (x-x_0)f'(x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t)f'(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

En général, on a que

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{j-1}}{(j-1)!} f^{(j)}(t)\mathrm{d}t &= -\int_{x_0}^{x} f^{(j)}(t)\mathrm{d}\frac{(x-t)^j}{j!}\\ &= \frac{(x-x_0)^j f^{(j)}(x_0)}{j!} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^j}{j!} f^{(j+1)}(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Le théorème en découle par induction. □

Exemple 9.9. On reviens à l'exemple $f(x) = 1/(1-x)$. Le théorème 9.8 implique que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{j=0}^{k-1} x^j + \int_0^x \frac{k(x-t)^{k-1}}{(1-t)^k}\mathrm{d}t.$$

Si $x \le 0$, on a que $t \in [x, 0]$, donc $|(x-t)/(1-t)| \le |x| < 1$. Si $x > 0$, on a que $t \in [0, x]$, donc

$$\left|\frac{x-t}{1-t}\right| = \frac{x-t}{1-t} = 1 - \frac{1-x}{1-t} \le 1 - (1-x) = x.$$

En tout cas, $|(x-t)/(1-t)| \le |x|$, donc on voit que le reste converge vers 0 quand $|x| < 1$. □

On étudie maintenant la deuxième question. L'exemple suivant démontre que la réponse est negative.

Exemple 9.10 (le monstre de Cauchy)**.** Considérons la fonction

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

On va montrer que $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$. Le seul point où la fonction est potentiellement non-différentiable est 0. On montrera que $f^{(k)}(0) = 0$, pour chaque $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Ceci implique que f ne peut pas s'écrire comme une série de puissances autour de 0. Sinon, les coefficients de cette série seraient tous égaux à 0 d'après le théorème 9.6, mais f n'est pas identiquement zéro au tour de 0.

Afin de montrer que $f^{(k)}(0) = 0$ pour chaque $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, on prouve d'abord que

$$f^{(k)}(x) = P_k(1/x) \cdot e^{-1/x} \quad (k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, x > 0), \tag{9.4}$$

où P_k est un polynôme. On le fait par induction sur k : c'est évidemment vrai quand $k = 0$. Supposons la vérité de cette relation pour un $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Donc

$$f^{(k)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{P_k(1/x)}{e^{1/x}} = P_k'(1/x) \cdot \frac{-1}{x^2} \cdot e^{-1/x} + P_k(1/x) \cdot e^{-1/x} \cdot \frac{1}{x^2} = P_{k+1}(1/x) \cdot e^{-1/x},$$

où $P_{k+1}(y) = y^2(P_k(y) - P_k'(y))$, par la règle du produit et de la chaîne. Ceci conclut l'étape inductive et, par conséquent, la démonstration de la relation (9.4). On est, maintenant, prêt de montrer que $f^{(k)}(0) = 0$. On le fait aussi par induction sur k : quand $k = 0$, c'est trivial. Supposons que c'est vrai pour un $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Il suffit de montrer que $\lim_{x \to 0^+} f^{(k)}(x)/x = 0$, ce qui découlent directement de la relation (9.4) et du fait que $\lim_{y \to \infty} y^c/e^y = 0$ pour chaque $c \in \mathbb{R}$. □

La fonction exponentielle

Dans cette section, on appliquera la théorie des séries de puissances pour montrer de façon rigoureuse les propriétés analytiques habituelles de la fonction exponentielle. Pour cette section seulement, on travaille sur les nombres complexes $\mathbb{C}$. (On peut voir facilement que les théorèmes 9.1 et 9.6 ont des analogues directs sur $\mathbb{C}$.)

On se rappelle que, si $x \in \mathbb{R}$, alors

$$e^x := \sup_{y \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, x]} e^y,$$

où

$$e := \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

est la constante d'Euler. Maintenant, étant donné, un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, on définit

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

On peut voir facilement que cette fonction est bien définie, car la série converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$. Si

$$E := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

alors on a le théorème important suivant :

Théorème 9.11.

(a) Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$, on a que $\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$.

(b) $|\exp(ix)| = 1$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(c) Si $x = p/q$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$, alors $\exp(x) = E^{p/q}$.

(d) La fonction $x \to \exp(x)$, $x \in \mathbb{R}$, est strictement croissante, son image est $(0, +\infty)$, et elle différentiable avec $\exp' = \exp$.

Démonstration. (a) Le théorème du binôme de Newton et la convergence absolue impliquent que

$$\begin{aligned}\exp(z+w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{0 \le a \le n} \frac{z^a w^{n-a}}{a!(n-a)!} &= \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{n \ge a} \frac{z^a w^{n-a}}{a!(n-a)!} \\ &= \sum_{a=0}^{\infty} \frac{z^a}{a!} \sum_{n \ge a} \frac{w^{n-a}}{(n-a)!} \\ &= \exp(z) \cdot \exp(w).\end{aligned}$$

(b) C'est facile de voir que $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$, où $\overline{z}$ dénote le conjugué du nombre complexe z (voir l'annexe B). En particulier,

$$|\exp(ix)|^2 = \exp(ix) \cdot \overline{\exp(ix)} = \exp(ix) \cdot \exp(-ix) = \exp(ix + (-ix)) = \exp(0) = 1,$$

par la partie (a).

(c) Si $p \in \mathbb{N}$, on a que

$$\exp(p/q) = \exp(\underbrace{1/q + \cdots + 1/q}_{p \text{ fois}}) = \underbrace{\exp(1/q) \cdots \exp(1/q)}_{p \text{ fois}} = (\exp(1/q))^p.$$

Quand $p = q$, alors

$$(\exp(1/q))^q = \exp(q/q) = E,$$

pour que $\exp(1/q) = E^{1/q}$, ce qui montre la partie (c) quand $p \ge 1$. Si $p = 0$, alors le résultat est trivial. Finalement, si $p < 0$, alors on observe que

$$\exp(p/q)\exp(-p/q) = \exp(0) = 1,$$

d'après la partie (a). Ceci montre le résultat à tous les cas.

(d) La differentiabilité de la fonction exp et le fait que $\exp' = \exp$ découlent directement du théorème 9.6. En particulier, exp est une fonction continue. De plus, sa définition implique directement que $\exp(x) > x \ge 0$ quand $x \ge 0$. La même relation implique aussi que

$\lim_{x\to\infty} \exp(x) = +\infty$. Puis, on observe que $\exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = 1$ par la partie (a), d'où il découle que $\exp(x) > 0$ pour $x < 0$ et que $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$. Finalement, puisque $\exp'(x) = \exp(x) > 0$, alors exp est strictement croissante. Donc, $\exp(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$. $\square$

Puisque la fonction $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ est strictement croissante et surjective, alors elle admet une fonction réciproque $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. On sait que log est aussi différentiable et, si $y = \exp(x)$, alors

$$\log'(y) = \frac{1}{\exp'(x)} = \frac{1}{\exp(x)} = \frac{1}{y}.$$

Donc, on voit que

$$\log(e) = \lim_{n\to\infty} n\log(1 + 1/n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1 + 1/n)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+1/n} \cdot \frac{-1}{n^2}}{-1/n^2} = 1,$$

d'où on déduit que $e = E$. Avec le théorème 9.11, ceci montre que $e^x = \exp(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par convention, on écrit e^z au lieu de $\exp(z)$ pour $z \in \mathbb{C}$ aussi.

Pour $z \in \mathbb{C}$, on a aussi que

$$\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

ce qui coincide avec les fonctions trigonométriques usuelles quand $z \in \mathbb{R}$. On voit tout de suite que

$$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z),$$

d'où on trouve que

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{9.5}$$

En particulier, si $x \in \mathbb{R}$, alors on a que

$$\cos x = \mathrm{Re}(e^{ix}) \quad \text{et} \quad \sin x = \mathrm{Im}(e^{ix}). \tag{9.6}$$

Exemple 9.12. On a que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} e^{inx} = \frac{e^{i(N+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} &= \frac{e^{(N+1)x/2}}{e^{ix/2}} \cdot \frac{e^{i(N+1)x/2} - e^{-i(N+1)x/2}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} \\ &= e^{iNx/2} \cdot \frac{\sin(\pi(N+1)x/2)}{\sin(x/2)}.\end{aligned} \tag{9.7}$$

En particulier,

$$\sum_{n=1}^{N} \sin(nx) = \frac{\sin(\pi Nx/2)\sin(\pi(N+1)x/2)}{\sin(x/2)} \tag{9.8}$$

et

$$\sum_{n=1}^{N}\cos(nx) = -1 + \frac{\cos(\pi Nx/2)\sin(\pi(N+1)x/2)}{\sin(x/2)} \tag{9.9}$$
$$= \frac{\sin(\pi Nx/2)\cos(\pi(N+1)x/2)}{\sin(x/2)},$$

puisque $\sin(x/2) = \sin((N+1)x/2 - Nx/2) = \sin((N+1)x/2)\cos(Nx/2) - \cos((N+1)x/2)\sin(Nx/2)$. □

Exemple 9.13. Pour $s \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(s) > 1$, définissons la fonction ζ de Riemann par

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

où $x^s := e^{s\log x}$ quand $x > 0$. La fonction ζ est bien définie : si $s = \sigma + it$ avec $\sigma, t \in \mathbb{R}$, alors

$$|n^s| = \left|e^{s\log n}\right| = \left|e^{\sigma\log n + it\log n}\right| = \left|e^{\sigma\log n}e^{it\log n}\right| = \left|e^{\sigma\log n}\right| \cdot \left|e^{it\log n}\right| = n^\sigma,$$

où on a utilisé le fait que $|e^{i\theta}| = 1$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Alors, notre hypothèse que $\mathrm{Re}(s) = \sigma > 1$ implique que la série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ converge absolument, ce qui montre que $\zeta(s)$ est bien définie quand $\mathrm{Re}(s) > 1$.

On utilisera la formule d'Euler-Maclaurin afin de définir ζ quand $\sigma > 0$. Supposons pour l'instant que $\sigma > 1$. Si $N \in \mathbb{N}$, alors la formule d'Euler-Maclaurin (6.1) implique que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} = 1 + \int_1^N \frac{\mathrm{d}x}{x^s} - s\int_1^N \frac{\{x\}}{x^{s+1}} = \frac{s}{s-1} - \frac{N^{-s+1}}{s-1} - s\int_1^N \frac{\{x\}}{x^{s+1}}\mathrm{d}x.$$

Si $\sigma > 1$, alors $\lim_{N\to\infty}\sum_{n\le N} 1/n^s = \zeta(s)$ et $\lim_{N\to\infty} N^{-s+1} = 0$ car $|N^{-s+1}| = N^{-\sigma+1}$. De plus, l'intégrale impropre $\int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}}\mathrm{d}x$ converge absolument car $|\{x\}/x^{s+1}| \le 1/x^{\sigma+1}$. Donc

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}}\mathrm{d}x.$$

Le côté droit est bien défini quand $s \neq 1$ et $\mathrm{Re}(s) > 0$, ce qui nous permet de prolonger la fonction ζ dans la région $\Omega := \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 0, s \neq 1\}$. □

Exercices

Exercice 9.1. Soit la série de puissances $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/\sqrt{n+1}$.

(a) Montrez qu'elle a rayon de convergence $R = 1$.

(b) Étudiez si cette série converge uniformément sur $A = [-1/2, 1/2]$ et sur $C = (-1, 1)$.

(c) Définissons $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/\sqrt{n+1}$ si $0 < x \le 1$, et $f(1) = 0$. Montrez que $f \in \mathcal{R}^*([0,1])$ et que $\int_0^1 f = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{3/2}$.

Exercice 9.2. Soit la série de puissances

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

où

$$a_n = \begin{cases} 1/(2^n n) & \text{si } n \equiv 0 \pmod 3, \\ n^2 & \text{si } n \equiv 1 \pmod 3, \\ \sin(n) & \text{si } n \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

Trouvez le rayon de convergence de cette série, calculez l'ensemble des points x où elle converge et calculez sa somme en chaque tel point.

Exercice 9.3. Déterminez les valeurs de x pour lesquelles la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$$

converge et calculez sa somme. [*Indice* : $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$.]

Exercice 9.4. Soit la série de puissances

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n n!^2}.$$

(a) Trouvez son rayon de convergence.

(b) Montrez que la fonction-somme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n n!^2}$ satisfait l'équation différentielle

$$x^2 f''(x) + x f'(x) + x^2 f(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 9.5. Soit la série de puissances

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \text{où} \quad a_n = \begin{cases} n/2^n & \text{si } n \text{ est pair}, \\ 1/n! & \text{si } n \text{ est impair}. \end{cases}$$

Trouvez l'ensemble de points x pour lequels la série converge et calculez sa somme en ces points.

Exercice 9.6. Développez les fonctions suivantes en séries de puissances autour du point x_0 indiqué et trouvez leur rayons de convergence :

(a) $f(x) = \arcsin(x)$, $x_0 = 0$;

(b) $g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-tx}$, $x_0 = 0$.

Exercice 9.7. Montrez que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n (2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

[*Indice* : calculez $\int_0^1 \arcsin(x)\mathrm{d}x$. Puis, développez $\arcsin(x)$ dans sa série de Taylor et trouvez une autre expression pour $\int_0^1 \arcsin(x)\mathrm{d}x$.]

Exercice 9.8. Pour $n \geq 0$, définissons

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2^k} & \text{si } n = 2k \text{ pour un } k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ \\ \dfrac{(-1)^k}{k} & \text{si } n = 2k-1 \text{ pour un } k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}. \end{cases}$$

(a) Déterminez le rayon de convergence de la série de puissances $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
(b) Montrez que la série de puissances $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformément sur $[-1, 1]$.
(c) Calculez la série de puissances $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ en termes de fonctions élémentaires.

Exercice 9.9. Montrez que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2.$$

[*Indice :* développez $-\log(1-x)$ en ses séries de Taylor autour de 0.]

Exercice 9.10. Le fait que la constante d'Euler e est bien définie n'est pas trivial *à priori*. Cet exercice montre que la limite $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$ existe en effet :

(a) Montrez que si $\alpha > -1$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $(1+\alpha)^n \geq 1 + \alpha n$. [*Indice* : utilisez induction sur n. De façon alternative, appliquez le théorème des accroissements finis avec $f(\alpha) = (1+\alpha)^n$.]
(b) Montrez que la suite $a_n = (1+1/n)^n$ est croissante. [*Indice :* Montrez que $a_{n+1}/a_n = \frac{n}{n+1}(1-1/(n+1)^2)^{n+1}$.]
(c) Montrez que la suite $b_n = (1+1/n)^{n+1}$ est décroissante. [*Indice :* Montrez que $b_n/b_{n+1} = \frac{n}{n+1}(1+1/(n^2+2n))^{n+2}$.]
(d) Concluez que la limite $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$ existe.

Exercice 9.11 (la fonction logarithmique)**.** Comme on l'a fait au-dessus, la façon usuelle de définir la fonction logarithmique est comme l'inverse de la fonction exponentielle. Cependant, on peut donner une définition alternative, d'où toutes les propriétés usuelles du logarithme découlent facilement : on pose

$$\log x := \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

pour tout $x > 0$. À partir de cette définition, montrez les propriétés habituelles suivantes :

(a) log est une fonction différentiable sur $(0, \infty)$ dont la dérivée est donnée par $(\log x)' = 1/x$, $x > 0$;
(b) $\log(e^x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
(c) $\log(xy) = \log x + \log y$ et $\log(x/y) = \log x - \log y$ pour tous $x, y > 0$.

Exercice 9.12 (Putnam 2018)**.** Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Supposons que $f^{(k)} \geq 0$ pour chaque $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, ainsi que $f(0) = 0$.

(a) Montrez que $f(x) = 0$ pour tout $x \leq 0$.

(b) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrez que la série de Taylor de f autour de x_0 a rayon de convergence $R = \infty$. [*Indice :* Soit $x \geq x_0$. Montrez que $\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k/k! \leq f(x)$ et déduisez que $\sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k/k!$ converge absolument.]

(c) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, montrez que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

(d) Montrez que $f = 0$.

(e) Si on enlève l'hypothèse que $f(0) = 0$, pouvez-vous trouver une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f^{(k)} \geq 0$ pour chaque $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$?

Chapitre 10

Sommation d'Abel

Supposons que $\sum_{n=0}^\infty a_n$ est une série convergente. Alors, on sait que la série de puissances $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ a rayon de convergence $R \geq 1$. Si $R > 1$, alors $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ converge uniformément sur $[-1, 1]$. En particulier, et on a que

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^\infty a_n x^n = \sum_{n=0}^\infty a_n. \tag{10.1}$$

Est-ce que cette relation reste vraie quand $R = 1$?

Pour répondre à cette question, on développe une idée d'Abel qui est une version discrète de l'intégration par parties. Observons qu'on se concerne à une somme de la forme $\sum_{n\geq 0} a_n b_n$, où on sait quelque chose pour les sommes partielles de $(a_n)_{n=1}^\infty$. Abel a montré qu'on peut transformer une telle somme :

Théorème 10.1 (Sommation d'Abel)**.** *Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ deux suites. Si $A_n = a_1 + \cdots + a_n$, alors*

$$\sum_{n=M+1}^N a_n b_n = A_n b_{n+1}\Big|_{n=M}^N - \sum_{n=M+1}^N A_n (b_{n+1} - b_n).$$

Démonstration. On a que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=M+1}^N a_n b_n = \sum_{n=M+1}^N (A_n - A_{n-1}) b_n &= \sum_{n=M+1}^N A_n b_n - \sum_{n=M+1}^N A_{n-1} b_n \\
&= \sum_{n=M+1}^N A_n b_n - \sum_{n=M}^{N-1} A_n b_{n+1} \\
&= \sum_{n=M+1}^N A_n b_n - A_M b_{M+1} + A_N b_{N+1} - \sum_{n=M+1}^N A_n b_{n+1} \\
&= A_n b_{n+1}\Big|_{n=M}^N - \sum_{n=M+1}^N A_n (b_{n+1} - b_n).
\end{aligned}$$

□

Avant de répondre à la question de la vérité de (10.1) quand $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge, on donne une application plus simple de la formule de sommation d'Abel qui illustre sa puissance. Précisément, on montre une importante généralisation du critère de convergence pour les séries alternées :

Théorème 10.2. *Soient $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ deux suites telles que*

$$A_n := a_1 + \cdots + a_n = O(1) \quad (n \geq 1)$$

et $b_n \searrow 0$. Alors, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

Démonstration. D'après le théorème 10.1, on a que

$$\sum_{n=M+1}^{N} a_n b_n = A_n b_{n+1}\Big|_{n=M}^{N} - \sum_{n=M+1}^{N} A_n(b_{n+1} - b_n).$$

L'inégalité du triangle donc implique que

$$\left|\sum_{n=M+1}^{N} a_n b_n\right| \leq |A_N b_{N+1}| + |A_M b_{M+1}| + \sum_{n=M+1}^{N} |A_n| \cdot |b_{n+1} - b_n|.$$

La relation $A_n = O(1)$ pour $n \geq 1$ veut dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|A_n| \leq C$ pour tout $n \geq 1$. De plus, puisque b_n décroit vers 0, alors $|b_{n+1} - b_n| = b_n - b_{n+1}$, et on trouve que

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=M+1}^{N} a_n b_n\right| &\leq C\left(b_{N+1} + b_{M+1} + \sum_{n=M+1}^{N} (b_n - b_{n+1})\right) \\ &= 2Cb_{M+1}.\end{aligned}$$

Puisque $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K = K(\varepsilon)$ tel que $|b_k| < \varepsilon/(2C)$ si $k \geq K$. Alors, si $N > M \geq K$, on trouve que

$$\left|\sum_{n=M+1}^{N} a_n b_n\right| < \varepsilon,$$

d'où il découle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ est convergente selon Cauchy, donc convergente. □

On peut aussi montrer une version fonctionnelle du théorème 10.2 :

Théorème 10.3. *Soit $f_n, g_n : X \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, deux suites de fonctions telles que :*

(a) pour chaque $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ est décroissante ;
(b) $f_n \to 0$ uniformément sur X ;
(c) la suite des sommes partielles $\sum_{n=1}^{N} g_n$ est uniformément bornée sur X, c'est-à-dire il existe une constante $C \geq 0$ telle que $\left|\sum_{n=1}^{N} g_n(x)\right| \leq C$ pour tous $x \in X$ et $N \geq 1$.

Alors, la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ converge uniformément sur X.

Démonstration. Exercice. □

Finalement, la sommation d'Abel nous permet de prolonger de l'intervalle de convergence uniforme pour quelques séries de puissances :

Théorème 10.4. *Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ une série de puissances, et soit $\alpha < \beta$ deux nombres réels. Si la série converge quand $x = \alpha$ et quand $x = \beta$, alors la série de puissances $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge uniformément sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$.*

Démonstration. Soit R le rayon de convergence de la série de puissances, pour que $\alpha, \beta \in [x_0 - R, x_0 + R]$. On sait déjà que si $0 \leq r < R$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge uniformément sur l'intervalle $[x_0 - r, x_0 + r]$. Donc, il suffit de montrer que si $\beta > x_0$, alors la série converge uniformément sur $[x_0, \beta]$, et que si $\alpha < x_0$, alors on a convergence uniforme sur $[\alpha, x_0]$.

On montre d'abord la premiere affirmation. On observe que si on fait le changement de variables $y = (x - x_0)/(\beta - x_0)$, alors la série de puissances devient

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n,$$

où $c_n = a_n(\beta - x_0)^n$. On sait que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge ; on veut montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

Soit

$$S = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{j=0}^{n} c_j.$$

Posons aussi

$$S_n = S + \delta_n, \quad \text{pour que} \quad \lim_{n\to\infty} \delta_n = 0.$$

La sommation d'Abel implique que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=M+1}^{N} c_n y^n = \sum_{n=M+1}^{N} c_n y^n &= S_n y^{n+1}\Big|_{n=M}^{N} - \sum_{n=M+1}^{N} S_n(y^{n+1} - y^n) \\
&= (S+\delta_n) y^{n+1}\Big|_{n=M}^{N} - \sum_{n=M+1}^{N} (S+\delta_n)(y^{n+1} - y^n) \\
&= \delta_n y^{n+1}\Big|_{n=M}^{N} - \sum_{n=M+1}^{N} \delta_n(y^{n+1} - y^n).
\end{aligned}$$

pour $N > M \geq 1$. Puisque $\delta_n \to 0$, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe K tel que $|\delta_n| \leq \varepsilon$ pour

$n \geq K$. Donc, si $N > M \geq K$ et $y \in [0,1]$, on a que

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=M+1}^{N} c_n y^n\right| &\leq |\delta_N| y^{N+1} + |\delta_M| y^{M+1} + \sum_{n=M+1}^{N} |\delta_n| (y^n - y^{n+1}) \\ &\leq \varepsilon(y^{N+1} + y^{M+1}) + \varepsilon \sum_{n=M+1}^{N} (y^n - y^{n+1}) \\ &= \varepsilon(y^{N+1} + y^{M+1}) + \varepsilon(y^{M+1} - y^{N+1}) \\ &= 2\varepsilon y^{M+1} \leq 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Le théorème 7.12 conclut la démonstration de la convergence uniforme de $\sum_{n\geq 0} c_n y^n$ sur $[0,1]$, et donc celle de $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ sur $[x_0, \beta]$.

Afin de voir la la convergence uniforme sur $[\alpha, x_0]$, il faut simplement observer qu'on a que $a_n(x-x_0)^n = a_n(\alpha - x_0)^n z^n$, où $z = (x_0 - x)/(x_0 - \alpha) \in [0,1]$. Puisque la série $\sum_{n\geq 0} d_n$, où $d_n = a_n(\alpha - x_0)^n$ converge, le même argument montre le résultat affirmé dans ce cas aussi. □

Exemple 10.5. La série de puissances $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ converge quand $x = -1$ et quand $x = 0$, donc elle converge uniformément sur $[-1, 0]$.

Sommabilité d'Abel et de Cesàro

Le théorème 10.4 a un corollaire important :

Corollaire 10.6. *Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, alors la série de puissances $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ a rayon de convergence ≥ 1 et on a que*

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Définition 10.7. Soit $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite réelle. On dit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est **Abel-sommable** si la série de puissances $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge pour $x \in [0,1)$ et la limite

$$A = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

existe. On dit aussi que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge vers A **au sens d'Abel**.

Le corollaire 10.6 implique que si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge au sens normal, alors elle converge vers la même valeur au sens d'Abel.

Exemple 10.8. On sait que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x},$$

pour $x \in [0, 1)$, donc la série $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ converge au sens d'Abel vers $1/2$. Ceci a une interpretation naturelle :

$$\sum_{n=0}^{N}(-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } N \text{ est impair,} \\ 1 & \text{si } N \text{ est pair,} \end{cases}$$

donc les sommes partielles sont en moyenne $1 \cdot 1/2 + 0 \cdot 1/2 = 1/2$. On voit alors que la somme d'Abel de $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ est la valeur moyenne de ses sommes partielles.

Il y a une autre notion de sommabilité qu'on utilisera plus tard, quand on étudie les séries de Fourier :

Définition 10.9. Soit $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite réelle. Soit $A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ ses sommes partielles, et soit

$$\sigma_n = \frac{A_0 + A_1 + \cdots + A_{n-1}}{n}$$

les **sommes partielles de Cesàro** de a_n. On dit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est **Cesàro-sommable** si la limite

$$C = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$$

existe. On dit aussi que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge vers C **au sens de Cesàro**.

Remarque 10.10. On a que

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{1}{n} \sum_{0\le j<n} A_j \\ &= \frac{1}{n} \sum_{0\le j<n} \sum_{0\le i\le j} a_i \\ &= \frac{1}{n} \sum_{0\le i<n} a_i \sum_{i\le j<n} 1 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{0\le i<n} a_i(n-i), \end{aligned}$$

puisque il existe $n - i$ entiers dans l'intervalle $[i, n)$. Donc,

$$\sigma_n = \sum_{j=0}^{n} a_j \left(1 - \frac{j}{n}\right). \tag{10.2}$$

Ce calcul sera util plus tard. □

Le lemme suivant garanti que si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge au sens normal, alors elle converge vers la même valeur au sens de Cesàro.

Lemme 10.11. *Si $(c_n)_{n\ge1}$ est une suite de nombres telle que $\lim_{n\to\infty} c_n = c \in \mathbb{R}$, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{n} = c.$$

Démonstration. Puisque $(c_n)_{n\ge1}$ est convergente, elle est aussi bornée. Soit $M = \sup_{n\ge1}|c_n| < \infty$. En particulier, $|c| \le M$. On fixe $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 = N_1(\varepsilon)$ tel que $|c_n - c| < \varepsilon$ pour $n \ge N_1$. Donc, pour $n \ge N_1$ on a que

$$\begin{aligned}\left|\frac{c_1+c_2+\cdots+c_n}{n} - c\right| &= \frac{|(c_1-c)+(c_2-c)+\cdots+(c_n-c)|}{n}\\ &\le \sum_{j=1}^{n}\frac{|c_j-c|}{n}\\ &= \sum_{j=1}^{N_1}\frac{|c_j-c|}{n} + \sum_{j=N_1+1}^{n}\frac{|c_j-c|}{n}\\ &\le \sum_{j=1}^{N_1}\frac{2M}{n} + \sum_{j=N_1+1}^{n}\frac{\varepsilon}{n}\\ &\le \frac{2N_1M}{n} + \varepsilon.\end{aligned}$$

Si $n \ge N := N_1 + 2N_1M/\varepsilon$, alors l'expression au dessus devient $< 2\varepsilon$, et le lemme en découle. $\square$

Exemple 10.12. Quand $a_n = (-1)^n$, on a que $A_n = \mathbf{1}_{n \text{ pair}}$. Donc, $\sigma_n \to 1/2$. On voit alors que $\sum_{n\ge0}(-1)^n$ converge au sens de Cesàro à la même valeur qu'au sens d'Abel.

Exercices

Exercice 10.1.

(a) Pour chaque $k \in \mathbb{Z}_{\ge0}$, montrez qu'il existe un polynôme P_k de degré $k+1$ et de coefficient dominant $\frac{1}{k+1}$ tel que

$$\sum_{n=1}^{N} n^k = P_k(N).$$

(b) (plus difficile) Montrez que les polynômes P_k de la partie (a) satisfassent l'équation recursive

$$(k+1)P_k(x) = x(x+1)^k - \sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j-1}P_j(x).$$

Exercice 10.2. Montrez le théorème 10.3.

Exercice 10.3. (a) Si $0 < |x| \le \pi$, alors montrez que

$$\sum_{n=1}^{N}\cos(nx) \ll \frac{1}{|x|}, \quad \sum_{n=1}^{N}\sin(nx) \ll \frac{1}{|x|}$$

uniformément pour tout $N \ge 1$. [*Indice :* voir l'exemple 9.12.]

(b) Supposons que $a_n \searrow 0$ et que $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Montrez que les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$$

convergent.

(c) Montrez que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n}$$

converge uniformément sur $[0,1]$. [*Indice :* séparez l'intervalle $[0,1]$ comme $[0,1/2] \cup [1/2,1]$ et utilisez de critères différents sur chaque sous-intervalle.]

(d) Montrez que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$$

converge ponctuellement mais pas uniformément sur $[-\pi,\pi]$. [*Indice :* pour la convergence uniforme, considérez la somme $\sum_{N<n\leq M} \sin(nx)/\sqrt{n}$. Étant donné $x > 0$ petit, pouvez-vous trouvez un intervalle $[N_x, M_x]$ sur lequel toutes les 'phases' nx sont 'synchronisées', dans le sens que $1 \geq \sin(nx) \geq 1/2$ pour tout $n \in [N_x, M_x]$?]

Exercice 10.4. Montrez que si la série de puissances $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformément sur (α, β), alors elle converge ponctuellement en $x = \alpha$ et en $x = \beta$.

Exercice 10.5. Soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de nombres reels

(a) Si la limite

$$\ell := \lim_{N\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_N}{N} \tag{10.3}$$

existe, alors montrez que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n} = \ell. \tag{10.4}$$

[*Indice* : Écrivez $A_n = a_1 + \cdots + a_n = (\ell + \delta_n)n$ et montrez que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n} = \ell \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} + \sum_{n=1}^{N} \frac{\delta_n}{n+1} + \frac{\ell N}{N+1} + \frac{\delta_N N}{N+1}.$$

Quelle est la valeur de $\lim_{n\to\infty} \delta_n$?]

(b) Trouvez une suite $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ avec $0 \leq a_n \leq 1$ pour la quelle la limite de (10.4) existe, mais la limite de (10.3) n'existe pas.

Annexe : une version intégrale de la formule de sommation d'Abel

La sommation d'Abel a une version continue qui est souvent plus facile à utiliser et à mémoriser :

Théorème 10.13. *Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite et $f \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 1})$, et définissons la fonction $A : \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R}$ par $A(x) = \sum_{1\leq n\leq x} a_n$ pour $x \geq 1$. Si $z \geq y \geq 1$, alors*

$$\sum_{y<n\leq z} a_n f(n) = A(t)f(t)\Big|_{t=y}^{z} - \int_y^z A(t)f'(t)\mathrm{d}t$$

En particulier, si $A = P + E$, où $P \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 1})$, alors

$$\sum_{y<n\leq z} a_n f(n) = \int_y^z f(t)P'(t)\mathrm{d}t + E(t)f(t)\Big|_{t=y}^{z} - \int_y^z E(t)f'(t)\mathrm{d}t.$$

Remarque 10.14. La fonction $x \to A(x)$ est une fonction en escalier : si $n \in \mathbb{N}$, alors $A(x) = A(n-1)$ pour tout $x \in [n-1, n)$ et $A(n^+) - A(n^-) = a_n$. Dans la décomposition $A = P+E$, on considère P comme une approximation différentiable de la fonction discontinue A, et E comme l'erreur produite par cette approximation. □

Remarque 10.15. Quand $a_n = 1$, alors $A(x) = \lfloor x \rfloor = P(x)+E(x)$ avec $P(x) = x$ et $E(x) = -\{x\}$. Alors, le théorème 10.13 est une vaste généralisation de la formule de sommation d'Euler-Maclaurin. □

Démonstration du théorème 10.13. Si $N = \lfloor y \rfloor$ et $M = \lfloor z \rfloor$, alors

$$\sum_{y<n\leq z} a_n f(n) = \sum_{n=N+1}^{M} a_n f(n).$$

En appliquant le théorème 10.1, on trouve que

$$\sum_{y<n\leq z} a_n f(n) = A(n)f(n+1)\Big|_{n=N}^{M} - \sum_{n=N+1}^{M} A(n)(f(n+1) - f(n)).$$

Puisque $f(n+1) - f(n) = \int_n^{n+1} f'(t)\mathrm{d}t$ et $A(t) = A(n)$ pour tout $t \in [n, n+1)$, alors on trouve que

$$\begin{aligned}\sum_{n=N+1}^{M} A(n)(f(n+1) - f(n)) &= \sum_{n=N+1}^{M} \int_n^{n+1} A(t)f'(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{N+1}^{M+1} A(t)f'(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_y^z A(t)f'(t)\mathrm{d}t - \int_y^{N+1} A(t)f'(t)\mathrm{d}t + \int_z^{M+1} A(t)f'(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Puisque $A(t) = A(N)$ pour $t \in [a, N+1) \subset [N, N+1)$, alors on trouve que

$$\int_y^{N+1} A(t)f'(t)\mathrm{d}t = \int_y^{N+1} A(N)f'(t)\mathrm{d}t = A(N)(f(N+1) - f(a))$$
$$= A(N)f(N+1) - A(y)f(y).$$

De même, on déduit que

$$\int_z^{M+1} A(t)f'(t)\mathrm{d}t = A(M)f(M+1) - A(z)f(z).$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{y<n\leq z} a_n f(n) &= A(n)f(n+1)\Big|_{n=N}^{M} - \int_y^z A(t)f(t)\mathrm{d}t \\ &\quad + A(N)f(N+1) - A(y)f(y) - A(M)f(M+1) + A(z)f(z) \\ &= A(t)f(t)\Big|_{t=y}^{z} - \int_y^z A(t)f'(t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

comme on l'a affirmé.

Finalement, la dernière affirmation du théorème découle directement du fait que

$$P(t)f(t)\Big|_{t=y}^{z} - \int_y^z P(t)f'(t)\mathrm{d}t = \int_y^z P'(t)f(t)\mathrm{d}t,$$

par intégration par parties. □

Si $a_n = 1$, alors on observe que $A(x) = \sum_{n\leq x} 1 = \lfloor x \rfloor = x - \{x\}$, donc on peut prendre $P(x) = x$ et $E(x) = -\{x\}$. Donc, on retrouve la formule de sommation d'Euler-Maclaurin.

Remarque 10.16. Le théorème 10.13 a une preuve très intuitive dans le contexte de la théorie de l'**intégrale de Riemann-Stieltjes** [1, chapitre 7]. On a que

$$\sum_{y<n\leq z} a_n f(n) = \int_y^z f(t)\mathrm{d}A(t),$$

où l'intégrale à droite est une intégrale de Riemann-Stieltjes. Cette relation est une expression continue de l'identité

$$\sum_{y<n\leq z} a_n f(n) = \sum_{y<n\leq z} f(n)\Delta A(n),$$

où $\Delta A(n) = A(n) - A(n-1)$.

On peut maintenant intégrer par parties (cette étape a une justification rigoureuse) pour que

$$\sum_{y<n\leq z} a_n f(n) = \int_y^z f(t)\mathrm{d}A(t) = A(t)f(t)\Big|_{t=y}^{z} - \int_y^z A(t)f'(t)\mathrm{d}t.$$

Si $A = P + E$, où P est continûment différentiable, alors

$$\sum_{y<n\leq z} a_n f(n) = \int_y^z f(t)\mathrm{d}(P(t) + E(t)) = \int_y^z f(t)\mathrm{d}P(t) + \int_y^z f(t)\mathrm{d}E(t).$$

Dans la première intégrale, on a que $\mathrm{d}P(t) = P'(t)\mathrm{d}t$ et dans la deuxième on intègre par parties. Ceci recouvre la deuxième formule du théorème 10.13. $\square$

Chapitre 11

Convolutions et suites de Dirac

On définit la classe de fonctions

$$\mathcal{F} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,:\, f, |f| \in \mathcal{R}^*(\mathbb{R}),\ \|f\|_\infty < \infty\}.$$

Étant donné deux fonctions $f, g \in \mathcal{F}$, on définit leur convolution $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t.$$

Cette fonction est bien définie : on sait qu'il existe deux ensembles $\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g$ qui n'ont pas de points d'accumulations tels que $f \in \mathcal{R}([a,b])$ pour chaque $[a,b] \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{C}_f$ et $g \in \mathcal{R}([a,b])$ pour chaque $[a,b] \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{C}_g$. En mettant $\mathcal{C} = \mathcal{C}_f \cup \mathcal{C}_g$, on voit que la fonction $t \to f(t)g(x-t)$ est dans la classe $\mathcal{R}([a,b])$ pour chaque $[a,b] \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{C}$. De plus, on a que $|f(t)g(x-t)| \leq |f(t)| \cdot \|g\|_\infty \in \mathcal{R}^*(\mathbb{R})$ par l'hypothèse que $f, g \in \mathcal{F}$. Donc, le théorème 4.14 implique que la fonction $t \to f(t)g(x-t)$ est dans la classe $\mathcal{R}^*(\mathbb{R})$, donc $(f * g)(x)$ est bien définie pour chaque $x \in \mathbb{R}$. En faisant le changement de variable $s = x - t$, on voit que

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-s)g(s)\mathrm{d}s = (g * f)(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

c'est-à-dire la convolution est une opération commutative. On peut aussi montrer que $f * g \in \mathcal{F}$ et que

$$\int_{\mathbb{R}} (f * g) = \left(\int_{\mathbb{R}} f\right)\left(\int_{\mathbb{R}} g\right),$$

en utilisant le théorème de Fubini pour les intégrales doubles de Riemann. Cependant, ces deux propriétés de la convolution ne sont pas requises pour ce qu'on verra à cette section.

Exemple 11.1. Supposons que $f = \mathbf{1}_{[0,1]}$. Alors, on a que

$$(f * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,1]}(t)\mathbf{1}_{[0,1]}(x-t)\mathrm{d}t.$$

Puisque $0 \leq x - t \leq 1$ si et seulement si $x - 1 \leq t \leq x$, alors on trouve que

$$(f * f)(x) = \int_{\max\{0,x-1\} \leq t \leq \min\{1,x\}} \mathrm{d}t.$$

Le domaine d'intégration est non-vide si et seulement si $0 \leq x$ et $x - 1 \leq 1$, ce qui est équivalent à x appartenant à $[0, 2]$. Par la suite,

$$\begin{aligned}(f * f)(x) &= \begin{cases} \min\{1, x\} - \max\{0, x-1\} & \text{si } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}\end{aligned}$$

En particulier, on voit que $f * f$ est continue, même si f a des discontinuités. □

La dernière remarque au-dessus concerne une propriété importante de l'opération de la convolution : la fonction $f * g$ est, en général, plus "lisse" que les fonctions f et g. Le théorème suivant montre cette intuition de façon rigoureuse :

Théorème 11.2. *Soit $f \in \mathcal{F}$ et $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $g^{(k)}$ est bornée pour chaque $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Alors, $f * g \in C^\infty(\mathbb{R})$ et*

$$(f * g)^{(k)} = f * (g^{(k)}).$$

Démonstration. Il suffit de montrer le cas $k = 1$; le cas général en découle par induction.

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$, on a que

$$\begin{aligned}\frac{(f * g)(x+h) - (f * g)(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x+h-y)\mathrm{d}y - \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{g(x+h-y) - g(x-y)}{h}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Le théorème de Taylor implique que

$$g(x+h-y) - g(x-y) = h \cdot g'(x-y) + \frac{h^2}{2} \cdot g''(c),$$

où c est entre $x - y$ et $x - y + h$. Puisque on a supposé que g'' est bornée, on en déduit que

$$g(x+h-y) - g(x-y) = h \cdot g'(x-y) + O(h^2).$$

Donc,

$$\begin{aligned}\frac{(f * g)(x+h) - (f * g)(x)}{h} &= \int_{-\infty}^{\infty} [f(y)g'(x-y) + O(h|f(y)|)]\mathrm{d}y \\ &= (f * g')(x) + |h| \int_{-\infty}^{\infty} O(|f(y)|)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Puisque $|f| \in \mathcal{R}^*(\mathbb{R})$, le deuxième terme tend vers 0 quand $h \to 0$. Ceci conclut la démonstration. □

Ce qui est surprenant au théorème 11.2 est que la différentiabilité de $f * g$ provient exclusivement de la fonction g. On voit, alors, que $f*g$ “hérite” les propriétés de la “meilleure” fonction entre f et g. (On se rappelle que $f * g = g * f$.) En utilisant cette observation, on peut construire des bonnes approximations pour des fonctions f qui peuvent avoir un comportement très sauvage.

Le point de départ est une deuxième observation fondamental qui provient de la théorie de probabilités. Supposons que $\delta \in \mathcal{F}$ est une répartition probabiliste, c'est-à-dire une fonction telle que

$$\delta \geq 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta = 1.$$

On a alors que

$$(\delta * f)(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(x-t) \mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(x) \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot [f(x-t) - f(x)] \mathrm{d}t.$$

Supposons que presque toute la masse de δ est concentrée autour de 0. Par exemple, on peut supposer que

$$\delta(t) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-(nx)^2/2},$$

qui est la densité de la répartition normale $N(0, 1/n^2)$. Puisque l'écart type est $1/n$, on s'attend que presque toute la masse de cette répartition se trouve dans un intervalle de longueur $\approx 1/n$ autour de 0.

Pour une telle répartition, concentrée autour de 0, on devrait avoir que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot [f(x-t) - f(x)] \mathrm{d}t \approx \int_{|x| \approx \text{petit}} \delta(t) \cdot [f(x-t) - f(x)] \mathrm{d}t.$$

Mais si t est petit et f est continue en x, alors $f(x-t) - f(x)$ est petit. On trouve alors de façon heuristique que

$$(\delta * f)(x) \approx f(x)$$

quand f est continue en x et δ est *suffisamment* concentrée autour de 0. Cette observation nous amène à la définition suivante :

Définition 11.3. Une **suite de Dirac** est une suite de fonctions $\delta_n \in \mathcal{F}$, $n \geq 1$, telles que

(a) $\delta_n \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}} \delta_n = 1$;

(b) pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé, on a que $\lim_{n\to\infty} \int_{|x|>\varepsilon} \delta_n(x) \mathrm{d}x = 0$.

Remarque 11.4. La propriété (a) nous garantit que δ_n est une densité probabiliste pour chaque $n \geq 1$, et la propriété (b) nous garanti que la répartition probabiliste induite se concentre de plus en plus autour de 0 quand $n \to \infty$. □

Remarque 11.5. Il existe une répartition probabiliste qui est totalement concentrée en 0, appelée la **répartition de Dirac** en 0. Cependant, cette répartition est très singulière, donc elle n'a pas une densité probabiliste δ dans la classe $\mathcal{F}$. Une suite de Dirac alors rapproche de façon continue cette répartition singulière. De plus, on peut supposer, par exemple, que les fonctions δ_n sont lisses et que ses dérivées bornées (voir l'exemple 11.6 pour une construction générale de suites de Dirac). En appliquant le théorème 11.2, on peut construire une suite de fonctions lisses $f * \delta_n = \delta_n * f$ qui devraient rapprocher la fonction f. Cette idée joue un rôle fondamental en analyse. □

C'est assez facile de construire des exemples des suites de Dirac :

Exemple 11.6. Soit $\phi \in \mathcal{F}$ telle que $\phi \geq 0$. Si $I = \int_{\mathbb{R}} \phi > 0$ et $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de nombres positifs tendant vers $+\infty$, alors, la suite de fonctions $\delta_n(x) := I^{-1} M_n \phi(M_n x)$ est une suite de Dirac.

En effet, on a que $\delta_n \geq 0$ et que $\int_{\mathbb{R}} \delta_n = 1$, par un changement de variables. De plus, on a que

$$\int_{|x|>\varepsilon} \delta_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{I} \int_{|x|>\varepsilon} M_n \phi(M_n x)\mathrm{d}x = \frac{1}{I} \int_{|y|>M_n\varepsilon} \phi(y)\mathrm{d}y$$

par le changement des variables $y = M_n x$. Puisque l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{\infty} \phi$ converge, alors on a que $\lim_{M\to\infty} \int_{|x|>M} \phi(x)\mathrm{d}x = 0$, d'où la propriété (b) de la définition 11.3 découle.

Un cas important est donné par $\phi(x) = e^{-x^2/2}$, $I = \sqrt{2\pi}$ et $M_n = \sqrt{n}$. Dans ce cas, la fonction δ_n est la densité probabiliste d'une répartition gaussienne de moyenne 0 et d'écart-type $1/\sqrt{n}$. □

Exemple 11.7. Soit

$$\delta_n(x) := \begin{cases} (1-x^2)^n/I_n & \text{si } -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \qquad \text{où} \quad I_n := \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \mathrm{d}x.$$

Evidemment, on a que $\delta_n \geq 0$, $\delta_n \in \mathcal{F}$ et $\int_{\mathbb{R}} \delta_n = 1$. Il reste à montrer la propriété de la définition 11.3. Tout d'abord, on calcule I_n. En mettant $x = \sin\theta$, on trouve que

$$I_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\theta)^{2n+1}\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2n+1}\mathrm{d}\theta = 2 \cdot \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}} \geq \frac{2}{2n+1},$$

car

$$\binom{2n}{n} \leq \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} = 2^{2n} = 4^n.$$

Puis, si $\varepsilon \in (0,1)$ est fixé, on a que

$$\int_{|x|>\varepsilon} \delta_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{I_n} \int_{\varepsilon<|x|\leq 1} (1-x^2)^n \mathrm{d}x \leq \frac{2(1-\varepsilon^2)^n}{I_n} \to 0 \quad (n\to\infty),$$

car $1 - x^2 \leq 1 - \varepsilon^2$ quand $|x| > \varepsilon$. Ceci montre que $(\delta_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Dirac, comme on l'a affirmé. □

Théorème 11.8. *Soient $f \in \mathcal{F}$ et $(\delta_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de Dirac.*

(a) Si f est continue en x_0, alors $\lim_{n\to\infty}(\delta_n * f)(x_0) = f(x_0)$.

(b) Si f est continue sur $[a,b]$ et $0 < c < (b-a)/2$, alors $\delta_n * f \overset{unif}{\to} f$ sur $[a+c, b-c]$.

Démonstration. Les deux démonstrations se base sur la même principe : on utilise le fait que δ_n induit une répartition probabiliste, c'est-à-dire $\delta_n \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}} \delta_n = 1$, pour voir que

$$\begin{aligned}(\delta_n * f)(x_0) - f(x_0) &= \int_{\mathbb{R}} \delta_n(t) f(x_0 - t)\mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}} \delta_n(t) f(x_0)\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} \delta_n(t)(f(x_0 - t) - f(x_0))\mathrm{d}t \\ &= \int_{|t|\leq\eta} \delta_n(t)(f(x_0 - t) - f(x_0))\mathrm{d}t + \int_{|t|>\eta} \delta_n(t)(f(x_0 - t) - f(x_0))\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

pour chaque $x_0 \in \mathbb{R}$ et chaque $\eta > 0$. Pour la première intégrale, on utilise la continuité de f, et pour la deuxième, on utilise le fait que $\lim_{n\to\infty} \int_{|t|>\eta} \delta_n(t)\mathrm{d}t = 0$ et que f est bornée. Plus précisément, on a que

$$\begin{aligned}|(\delta_n * f)(x_0) - f(x_0)| &\leq \sup_{|t|\leq\eta} |f(x_0 - t) - f(x_0)| \cdot \int_{|t|\leq\eta} \delta_n(t)\mathrm{d}t + 2\|f\|_\infty \int_{|t|>\eta} \delta_n(t)\mathrm{d}t \\ &\leq \sup_{|t|\leq\eta} |f(x_0 - t) - f(x_0)| + 2\|f\|_\infty \int_{|t|>\eta} \delta_n(t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

où on a utilisé que $\delta_n \geq 0$ et que $\int_{\mathbb{R}} \delta_n = 1$. On spécialise les arguments maintenant pour les deux parties du théorème.

(a) Soit $\varepsilon > 0$. Par la propriété (b) de la définition 11.3, il existe $N \geq 1$ tel que

$$2\|f\|_\infty \int_{|t|>\eta} \delta_n(t)\mathrm{d}t < \varepsilon/2 \quad (n \geq N). \tag{11.1}$$

De plus, par la continuité en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que $|f(x_0 - t) - f(x_0)| < \varepsilon/2$ si $|t| \leq \eta$, et on trouve que $|(\delta_n * f)(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$ pour $n \geq N$, ce qui est ce qu'il fallait démontrer.

(b) Puisque f est continue sur $[a,b]$, elle y est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta \in (0,c)$ tel que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ si $|x-y| \leq \eta$ et $x, y \in [a,b]$. Donc, si $x_0 \in [a+c, b-c]$ et $|t| \leq \eta$, alors $x_0, x_0 - t \in [a,b]$ et, par la suite, $|f(x_0 - t) - f(x_0)| \leq \varepsilon/2$. Par la suite,

$$|(\delta_n * f)(x_0) - f(x_0)| \leq \varepsilon/2 + 2\|f\|_\infty \int_{|t|>\eta} \delta_n(t)\mathrm{d}t \quad (x_0 \in [a+c, b-c]).$$

Comme au-dessus, il existe $N = N(\eta) \geq 1$ (alors, N ne dépend pas de x_0) tel que (11.1) est vraie. Donc $|(\delta_n * f)(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$ pour $n \geq N$, ce qui est ce qu'il fallait démontrer. □

Une application importante du théorème 11.8 est le fameux **théorème d'approximation de Weierstrass** :

Théorème 11.9 (théorème d'approximation de Weierstrass)**.** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors il existe une suite de polynômes convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$.*

Démonstration. Il suffit de montrer le théorème quand $[a, b] = [-1/2, 1/2]$. En effet, soit $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction linéaire avec $L(-1/2) = a$ et $L(1/2) = b$ (c'est-à-dire $L(x) = a(1/2-x)+b(x+1/2)$). La fonction $f \circ L : [-1/2, 1/2] \to \mathbb{R}$ est continue, donc si le théorème est vrai pour les fonctions continues sur $[-1/2, 1/2]$, alors il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ convergeant uniformément vers $f \circ L$. Donc, la suite de polynômes $Q_n := P_n \circ L^{-1}$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$. (Ici, on a utilisé le fait que l'inverse d'une fonction linéaire est encore linéaire afin de voir que Q_n est un polynôme pour tout $n \in \mathbb{N}$. Plus précisément, on a que $L^{-1}(t) = [t - (a + b)/2]/(b - a)$.)

Alors, soit $f : [-1/2, 1/2] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On affirme qu'on peut supposer sans perte de généralité que $f(-1/2) = f(1/2) = 0$. En effet, soit $\tilde{L} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction linéaire avec $\tilde{L}(-1/2) = f(a)$ et $\tilde{L}(1/2) = f(b)$, c'est-à-dire $\tilde{L}(x) = f(a) \cdot (1/2 - x) + f(b) \cdot (x + 1/2)$. En particulier, $f - \tilde{L}$ vaut zéro en $-1/2$ et en $-1/2$. Puisque $\tilde{L}$ est un polynôme (elle est une fonction linéaire), si on peut montrer que la fonction $f - \tilde{L}$ est la limite uniforme d'une suite de polynômes $(\tilde{P}_n)_{n=1}^{\infty}$, alors f sera la limite uniforme de la suite de polynômes $(\tilde{P}_n + \tilde{L})_{n=1}^{\infty}$.

Considérons, maintenant, $f : [-1/2, 1/2] \to \mathbb{R}$ continue avec $f(-1/2) = f(1/2) = 0$. Afin de construire la suite de polynômes, on utilise la suite de Dirac de l'exemple 11.7 :

$$\delta_n(x) := \begin{cases} (1-x^2)^n/I_n & \text{si } -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{où} \quad I_n = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \mathrm{d}x.$$

On définit $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } |x| \leq 1/2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque f est continue et $f(-1/2) = f(1/2) = 0$, alors $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$. En particulier, le théorème 11.8(b) implique que $\delta_n * \tilde{f} \overset{\text{unif}}{\to} \tilde{f}$ sur $[-1/2, 1/2]$, et $\tilde{f}|_{[-1/2,1/2]} = f$. On calcule maintenant $(\delta_n * f)(x)$ quand $x \in [-1/2, 1/2]$. On a que

$$(\delta_n * \tilde{f})(x) = (\tilde{f} * \delta_n) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(t)\delta_n(x-t)\mathrm{d}t = \int_{-1/2}^{1/2} f(t)\delta_n(x-t)\mathrm{d}t.$$

On observe que $|x - t| \leq |x| + |t| \leq 1$ si $|t|, |x| \leq 1/2$. En particulier,

$$\begin{aligned} \delta_n(x-t) = I_n^{-1}(1-(x-t)^2)^n &= I_n^{-1} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j (x-t)^{2j} \\ &= I_n^{-1} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j \sum_{i=0}^{2j} \binom{2j}{i} x^i (-t)^{2j-i} \\ &= I_n^{-1} \sum_{i=0}^{2n} x^i \sum_{i/2 \leq j \leq n} \binom{n}{j} \binom{2j}{i} (-1)^{i+j} t^{2j-i}. \end{aligned}$$

Par conséquent, si $|x| \leq 1/2$, alors

$$(\delta_n * \tilde{f})(x) = \sum_{i=0}^{2n} x^i \int_{-1/2}^{1/2} I_n^{-1} \sum_{i/2 \leq j \leq n} \binom{n}{j} \binom{2j}{i} (-1)^{i+j} t^{2j-i} f(t)\mathrm{d}t =: P_n(x),$$

ce qui est un polynôme de degré $\leq 2n$ en x. □

Exercices

Exercice 11.1. (Rudin [2], exercice 7.20) Soit une fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\int_0^1 f(x)x^n \mathrm{d}x = 0,$$

pout tout entier $n \geq 0$. Montrez que f est identiquement égale à zéro.

Exercice 11.2. (Rudin [2], exercice 7.23) Soit $P_0 = 0$ et, pour $n \geq 0$, posons

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x^2 - P_n(x)^2}{2}.$$

Montrez que $P_n(x) \to |x|$ lorsque $n \to \infty$ uniformément pour $x \in [-1,1]$. [*Indice* : Utilisez l'identité

$$|x| - P_{n+1}(x) = (|x| - P_n(x)) \cdot \left(1 - \frac{|x| + P_n(x)}{2}\right).$$

Déduisez que $0 \leq P_{n+1}(x) \leq P_n(x) \leq |x|$, ainsi que

$$|x| - P_n(x) \leq |x| \left(1 - \frac{|x|}{2}\right)^n < \frac{2}{n+1},$$

pour $x \in [-1,1]$.]

Exercice 11.3. Soit

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } |x| \leq \frac{1}{4n}, \\ \frac{1}{4n} & \text{si } n \leq |x| \leq 2n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Est-ce que $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Dirac ?

Exercice 11.4. Étant donnée une fonction $f \in \mathcal{F} \cap C(\mathbb{R})$, trouvez une suite des fonctions $(f_n)_{n\geq 1} \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$ convergeant vers f uniformément sur chaque intervalle fini $[a,b]$.

Exercice 11.5.

(a) Construisez une suite de Dirac $(\delta_n)_{n\geq 1}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a que $\delta_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ et que

$$\delta_n(x) = 0 \text{ si } |x| \geq 1/n.$$

[*Indice* : voir l'exemple 9.10.]

(b) Si χ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[a,b]$ et $\chi_n = \chi * \delta_n$, alors montrez que[1]

$$\begin{cases} \chi_n(x) = 1 & \text{si } a + 1/n \le x \le b - 1/n, \\ 0 \le \chi_n(x) \le 1 & \text{si } x \in [a - 1/n, a + 1/n] \cup [b - 1/n, b + 1/n], \\ \chi_n(x) = 0 & \text{si } x \notin [a - 1/n, b + 1/n]. \end{cases}$$

Exercice 11.6. Soit $f, g \in \mathcal{F}$. Montrez que leur convolution $f * g$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1. Donc, χ_n est une approximation lisse de la fonction caractéristique de l'intervalle $[a,b]$. On peut utiliser ces fonctions dans plusieurs contextes. Par exemple, si on veut compter combien de pairs $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ appartiennent à l'anneau $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : R' \le \sqrt{x^2+y^2} \le R\}$, on peut considérer la somme $\sum_{a,b\in\mathbb{Z}} \chi_n(a^2+b^2)$, où χ_n est une approximation lisse de la fonction caractéristique de l'intervalle $[R^2, R'^2]$. Le fait que χ_n est différentiable une infinité de fois offre plusieurs avantages ; par exemple, voir exercice 12.13.

Chapitre 12

Séries de Fourier

Supposons qu'on a une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est 1-périodique, c'est-à-dire $f(x+1) = f(x)$. Une telle fonction pourrait representer un phénomène périodique, comme une onde (qui pourrait être une onde électromagnétique, une vague dans la mer, etc.) On veut analyser cette fonction en termes de fonctions périodiques plus simples. On connait déjà des fonctions simples qui sont 1-périodiques : les fonctions

$$1, \quad \cos(2\pi n x), \quad \sin(2\pi n x),$$

où $n \in \mathbb{N}$.

La question principale qu'on va étudier est : quand peut-on écrire

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n x), \tag{12.1}$$

pour des $a_0, a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$ et $b_1, b_2, \dots \in \mathbb{R}$? En fait, il est plus facile d'essayer de trouver des coefficients $c_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n x}. \tag{12.2}$$

On aura toujours que $c_{-n} = \overline{c_n}$ pour assurer que le côté droit est un nombre réel. Ces deux représentations sont équivalentes : vu que

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{-ie^{i\theta} + ie^{i\theta}}{2},$$

la relation (12.1) implique *formellement* (12.2) avec

$$c_0 = a_0, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2},$$

pour $n \in \mathbb{N}$. (“Formellement” veut dire qu'on ne se préoccupe pas de questions de convergence pour l'instant ; les manipulations de sommes sont formelles.)

Réciproquement, la relation $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ transforme une représentation de la forme (12.2) avec $\overline{c_n} = c_{-n}$, à une de la forme (12.1) avec

$$a_0 = c_0, \quad a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

Ceci montre l'équivalence *formelle* entre (12.1) et (12.2). Pour le reste de ce chapitre, on travaillera avec (12.2).

Or, supposons qu'on a une représentation de f de la forme (12.2). Qu'est-ce qu'on peut dire des coefficients c_n ? La relation-clé est

$$\int_0^1 e^{2\pi imx}\overline{e^{2\pi inx}}\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{2\pi i(m-n)x}\mathrm{d}x = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m \neq n. \end{cases} \tag{12.3}$$

En effet, si $m = n$, c'est évident que $\int_0^1 e^{2\pi i(m-n)x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x = 1$, et si $m \neq n$, alors

$$\int_0^1 e^{2\pi imx}\overline{e^{2\pi inx}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^{2\pi i(m-n)x}}{2\pi i(m-n)}\right)\mathrm{d}x = \frac{e^{2\pi i(m-n)x}}{2\pi i(m-n)}\bigg|_{x=0}^{1} = 0,$$

car $e^{2\pi ik} = \cos(2\pi k) + i\sin(2\pi k) = 1$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

On voit donc que les fonctions $x \to e^{2\pi inx}$ forment un ensemble orthonormal par rapport au produit scalaire

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x.$$

On ne va pas utiliser ce fait, mais cela nous donne une bonne intuition concernant ce qu'il faut faire pour déterminer c_n. Supposons que $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ est une base orthonormale de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ par rapport au produit scalaire $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle = v_1w_1 + \cdots + v_nw_n$, où $\boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_n)$ et $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_n)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On veut exprimer $\boldsymbol{v}$ en termes de la base $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$, c'est-à-dire on veut trouver des nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\boldsymbol{v} = \lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{e}_n$. On sait qu'un tel choix existe, car $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ est une base, et pour ce choix

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_j\rangle = \langle \lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_j\rangle = \lambda_1\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_j\rangle + \cdots + \lambda_n\langle \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_j\rangle = \lambda_j,$$

d'après l'hypothèse que $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ est un ensemble orthonormal. Alors, on voit que $\lambda_j = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_j\rangle$.

Motivé par la discussion ci-dessus, on considère les intégrales

$$\langle f(x), e^{2\pi inx}\rangle = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}\mathrm{d}x.$$

Cette intégrale est bien définie si $f \in \mathcal{R}([0,1])$ d'après le théorème 2.2(d), alors supposons que c'est le cas. C'est-à-dire, on suppose ici que f appartient à la classe de fonctions

$$\mathcal{F}_{\mathrm{per}} := \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid g \text{ 1-périodique},\ g \in \mathcal{R}([0,1])\}.$$

Pour des raisons de convergence, supposons aussi que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < \infty$. Vu que $|c_ne^{2\pi inx}| = |c_n|$, le critère de Weierstrass implique que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_ne^{2\pi inx}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. En particulier, le théorème 8.4 nous donne que

$$\int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_me^{2\pi imx}\right)e^{-2\pi inx}\mathrm{d}x = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m\int_0^1 e^{2\pi i(m-n)x}\mathrm{d}x = c_n,$$

d'après (12.3). Alors, les candidats pour les coefficients c_n de la représentation (12.2), s'ils existent, sont les **coefficients de Fourier** de f, définis par

$$\hat{f}(n) := \int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}\mathrm{d}x.$$

La série

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2\pi inx}$$

est appelée la **série de Fourier** de f. On ne suppose pas que cette série converge, c'est une expression *formelle* pour l'instant.

On a montré alors le lemme suivant :

Lemme 12.1. *Si $f \in \mathcal{F}_{pér}$ est telle que $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi inx}$ pour des coefficients complexes c_n avec $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < \infty$, alors $c_n = \hat{f}(n)$.*

La question principale à laquelle le reste de ce chapitre est consacré est :

Quand est-ce que la série de Fourier de f converge vers la fonction, et quelle sorte de convergence a-t-on ?

Plus précisement, étant donnée une fonction $f \in \mathcal{F}_{\text{pér}}$ et $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, on définit

$$S_N f(x) := \sum_{|n|\leq N} \hat{f}(n)e^{2\pi inx}.$$

Pour quels $x \in \mathbb{R}$ a-t-on que $\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = f(x)$? De plus, quand a-t-on que $S_N f \overset{\text{unif}}{\to} f$ sur $\mathbb{R}$? On étudiera ces questions aux prochaines sections.

Remarque 12.2. Puisque chaque fonction $f \in \mathcal{F}_{\text{per}}$ est une fonction réelle, on a que

$$\overline{\hat{f}(n)} = \int_0^1 \overline{f(x)e^{-2\pi inx}}\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)e^{2\pi inx}\mathrm{d}x = \hat{f}(-n).$$

De plus, puisque f est 1-périodique, l'exercice 3.7 implique que

$$\hat{f}(n) := \int_a^{a+1} f(x)e^{-2\pi inx}\mathrm{d}x,$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Si on suppose, en plus, que $f \in C^k(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire $f^{(k)}$ existe et est continue), alors on a que

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{(2\pi in)^k} \int_0^1 f^{(k)}(x)e^{-2\pi inx}\mathrm{d}x \quad (n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}),$$

comme on peut le voir en intégrant k fois par parties (voir aussi l'exercice 3.7(b)). Donc,

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{(2\pi|n|)^k} \int_0^1 \left|f^{(k)}(x)\right| \mathrm{d}x \quad (n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}),$$

En particulier, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$ si $f \in C^2(\mathbb{R})$.

Ces observations seront utiles plus tard. □

Les noyaux de Dirichlet et de Fejér

Comme on l'a mentionné à la fin de la section précédente, on veut comprendre quand $S_N f(x) \to f(x)$. On observe que

$$S_N f(x) = \sum_{|n| \le N} \left(\int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n t} \mathrm{d}t \right) e^{2\pi i n x} = \int_0^1 f(t) \left(\sum_{|n| \le N} e^{2\pi i n (x-t)} \right) \mathrm{d}t.$$

Alors, on définit le **noyau de Dirichlet**

$$D_N(x) := \sum_{|n| \le N} e^{2\pi i n x}.$$

De plus, étant données deux fonctions $f, g \in \mathcal{F}_{\text{pér}}$, on définit leur convolution

$$(f * g)(x) := \int_0^1 f(t) g(x-t) \mathrm{d}t,$$

pour que

$$S_N f = f * D_N.$$

On observe que

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int_0^1 f(t) g(x-t) \mathrm{d}t \\ &\overset{u=x-t}{=} \int_{x-1}^{x} f(x-u) g(u) \mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 f(x-u) g(u) \mathrm{d}u \\ &= (g * f)(x),\end{aligned}$$

d'après l'exercice 3.7. En particulier,

$$S_N f = D_N * f,$$

aussi.

Comme on va le voir plus tard, une autre quantité importante dans la théorie de séries de Fourier sont les sommes de Cesàro de f, c'est-à-dire les moyennes de la suite $(S_n f)_{n \ge 1}$, définies par

$$\sigma_N f(x) := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n f(x).$$

Puisque $S_n f = D_n * f$ et l'opération de la convolution est linéaire, il est facile de voir que

$$\sigma_N f = F_N * f,$$

où F_N est le **noyau de Fejér**, défini par

$$F_N(x) := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x).$$

La raison pour laquelle on introduit le noyau de Fejér est qu'il est beaucoup plus facile (pour des raisons qu'on va expliquer ci-dessous) de montrer que $\sigma_N f$ converge vers f. De plus, puisque $\sigma_N f$ est la moyenne de $S_n f$, le lemme 10.11 nous permet de conclure que

$$\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = \lim_{N\to\infty} \sigma_N f(x) \quad \text{quand la première limite existe.}$$

Le lemme suivant établit plusieurs formules utiles pour les noyaux de Dirichlet et de Fejèr :

Lemme 12.3. *Soit $N \in \mathbb{N}$.*

(a) On a que

$$\int_0^1 D_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 F_N(x)\mathrm{d}x = 1.$$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a que[1]

$$D_N(x) = \frac{\sin(\pi(2N+1)x)}{\sin(\pi x)}$$

et

$$F_N(x) = \sum_{|n|\le N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e^{2\pi i n x} = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i n x}\right|^2 = \frac{\sin^2(\pi N x)}{N\sin^2(\pi x)}.$$

Démonstration. (a) Puisque $\int_0^1 e^{2\pi i n x}\mathrm{d}x = \mathbf{1}_{n=0}$, le résultat en découle directement pour le noyau de Dirichlet. Vu que F_N est une moyenne de certains noyaux de Dirichlet, on a le résultat pour le noyau de Fejér également.

(b) Vu que

$$D_N(x) = e^{-2\pi i N x} \sum_{n=0}^{2N} e^{2\pi i n x},$$

la formule affirmée pour D_N découle de (9.7).

La première formule pour F_N est un corollaire de (10.2). Pour la deuxième formule, on

1. Si $x = k \in \mathbb{Z}$, on interprète $\sin(\pi(2N+1)x)/\sin(\pi x)$ comme la limite $\lim_{y\to k} \sin(\pi(2N+1)y)/\sin(\pi y) = 2N+1$. Une remarque similaire s'applique aussi à la formule pour F_N.

observe que

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi inx}\right|^2 &= \left(\sum_{a=0}^{N-1} e^{2\pi aix}\right)\overline{\left(\sum_{b=0}^{N-1} e^{2\pi bix}\right)} \\ &= \left(\sum_{a=0}^{N-1} e^{2\pi aix}\right)\left(\sum_{b=0}^{N-1} e^{-2\pi bix}\right) \\ &= \sum_{0\le a,b\le N-1} e^{2\pi i(a-b)x} \\ &= \sum_{|n|\le N-1} e^{2\pi inx}\cdot \#\{0\le a,b\le N-1 : a-b=n\}.\end{aligned}$$

On écrit $a = b + n$ et on observe que si $n \ge 0$, alors les conditions $0 \le b + n \le N - 1$ et $0 \le b \le N - 1$ sont équivalentes à l'inégalité $0 \le b \le N - n - 1$. Donc, $\#\{0 \le a, b \le N-1 : a-b = n\} = N - n$ dans ce cas. De même, si $n < 0$, alors on trouve que les relations $0 \le b + n \le N - 1$ et $0 \le b \le N - 1$ sont équivalentes à l'inégalité $-n \le b \le N - 1$, d'où on déduit que $\#\{0 \le a, b \le N - 1 : a - b = n\} = N + n$. Ceci implique que

$$\left|\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi inx}\right|^2 = \sum_{|n|\le N-1}(N-|n|)e^{2\pi inx} = \sum_{|n|\le N}(N-|n|)e^{2\pi inx},$$

et la deuxième formule pour F_N suit. Finalement, la troisième formule découle de la deuxième et de la relation (9.7). □

Le lemme précèdent implique $F_N \ge 0$, que $\int_0^1 F_N = 1$, et que $F_N \overset{\text{unif}}{\to} 0$ sur $[-1/2, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, 1/2]$, pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé. Donc, F_N est une suite de Dirac 1-périodique :

Définition 12.4. Une **suite de Dirac 1-périodique** est une suite de fonctions $\delta_n \in \mathcal{F}_{\text{pér}}$, $n \ge 1$, telles que

(a) $\delta_n \ge 0$ et $\int_{-1/2}^{1/2} \delta_n = 1$;

(b) pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé, on a que $\lim_{n\to\infty} \int_{\varepsilon<|x|\le 1/2} \delta_n(x)\mathrm{d}x = 0$.

□

Théorème 12.5. *Soient $f \in \mathcal{F}_{pér}$ et $(\delta_n)_{n=1}^\infty$ une suite de Dirac 1-périodique.*

(a) Si les fonctions δ_n sont paires, i.e. $\delta_n(-t) = \delta_n(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et $x \in \mathbb{R}$ est tel que les limites

$$f(x+) = \lim_{t\to x^+} f(t) \quad \textit{et} \quad f(x-) = \lim_{t\to x^-} f(t)$$

existent, alors

$$\lim_{n\to\infty}(\delta_n * f)(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}.$$

(b) Si f est continue sur $\mathbb{R}$, alors $\delta_n * f \overset{unif}{\to} f$ sur $\mathbb{R}$.

Ici, le symbole $*$ signifie la convolution de fonctions 1-périodiques.

Démonstration. Vu que $f \in \mathcal{R}([0,1])$, alors f est bornée sur $[0,1]$ et, par périodicité, sur $\mathbb{R}$. Soit $M = \|f\|_\infty < \infty$.

(a) Puisque δ_n est paire et $\int_{-1/2}^{1/2} \delta_n = 1$, alors on trouve que $\int_{-1/2}^{0} = \int_0^{1/2} \delta_n = 1/2$. Donc

$$\begin{aligned}(\delta_n * f)(x) &- \frac{f(x+) - f(x-)}{2} \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \delta_n(t) f(x-t)\mathrm{d}t - \int_{-1/2}^{0} \delta_n(t) f(x+)\mathrm{d}t - \int_0^{1/2} \delta_n(t) f(x-)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1/2}^{0} \delta_n(t)(f(x-t) - f(x+))\mathrm{d}t + \int_0^{1/2} \delta_n(t)(f(x-t) - f(x-))\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

pour que

$$\begin{aligned}\left|(\delta_n * f)(x) - \frac{f(x+) - f(x-)}{2}\right| &\le \int_{-\eta}^{0} \delta_n(t)|f(x-t) - f(x+)|\mathrm{d}t \\ &+ \int_0^{\eta} \delta_n(t)|f(x-t) - f(x-)|\mathrm{d}t + 2M \int_{\eta \le |t| \le 1/2} \delta_n(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $\eta = \eta(\varepsilon, x) > 0$ tel que

$$|f(y) - f(x+)| < \varepsilon \quad (x < y \le x + \eta) \quad \text{et} \quad |f(y) - f(x+)| < \varepsilon \quad (x - \eta \le y < x).$$

Puisque $\delta_n \ge 0$ et $\int_{-1/2}^{1/2} \delta_n = 1$, alors

$$\left|(\delta_n * f)(x) - \frac{f(x+) - f(x-)}{2}\right| \le \varepsilon + 2M \int_{\eta \le |t| \le 1/2} \delta_n(t)\mathrm{d}t.$$

Finalement, il existe $N = N(\eta) = N(\varepsilon, x)$ tel que $\int_{\eta \le |t| \le 1/2} \delta_n(t)\mathrm{d}t < \varepsilon/2M$ pour $n \ge N$, pour que

$$\left|(\delta_n * f)(x) - \frac{f(x+) - f(x-)}{2}\right| < 2\varepsilon \quad (n \ge N).$$

Ceci montre la première partie du théorème.

(b) Cette partie est montrée de façon similaire : on a que

$$|(\delta_n * f)(x) - f(x)| \le \int_{-\eta}^{\eta} \delta_n(t)|f(x-t) - f(x)|\mathrm{d}t + 2M \int_{\eta \le |t| \le 1/2} \delta_n(t)\mathrm{d}t.$$

Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, elle est uniformément continue sur chaque intervalle compact $[a,b]$. En prenant $[a,b] = [0,2]$ et en utilisant la périodicité de f, on voit qu'elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ tel que $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ si $|y - x| \le \eta$. Donc,

$$|(\delta_n * f)(x) - f(x)| \le \varepsilon + 2M \int_{\eta \le |t| \le 1/2} \delta_n(t)\mathrm{d}t.$$

Finalement, il existe $N = N(\eta) = N(\varepsilon)$ tel que $\int_{|t| > \eta} \delta_n(t)\mathrm{d}t < \varepsilon/2M$ pour $n \ge N$, d'où on déduit que $|(\delta_n * f)(x) - f(x)| < \varepsilon$ pour $n \ge N$ et $x \in \mathbb{R}$, ce qui conclut la démonstration. $\square$

Théorèmes de convergence

Or, on utilise les outils développés à la section précédente pour montrer plusieurs théorèmes de convergence des séries de Fourier.

Théorème 12.6. *Soit $f \in \mathcal{F}_{pér}$, et soit $x \in \mathbb{R}$ tel que les limites $f(x+)$ et $f(x-)$, comme définies au théorème 12.5, existent. Si la suite $(S_N f(x))_{N\geq 1}$ converge, alors elle converge vers $(f(x+)+f(x-))/2$, c'est-à-dire on a que*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}.$$

Démonstration. Soit $\ell = \lim_{N\to\infty} S_N f(x)$. Le lemme 10.11 implique que $\lim_{N\to\infty} \sigma_N f(x) = \ell$ aussi. D'autre part, le théorème 12.5(a) implique que $\lim_{N\to\infty} \sigma_N f(x) = (f(x+)+f(x-))/2$, ce qui montre le théorème. □

Exemple 12.7. Soit $f(x) = \{x\}$, la partie fractionnelle de x. On a que

$$\hat{f}(0) = \int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

et que

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) = \int_0^1 x e^{-2\pi i n x} \mathrm{d}x = \int_0^1 x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^{-2\pi i n x}}{-2\pi i n}\right) \mathrm{d}x &= x \cdot \frac{e^{-2\pi i n x}}{-2\pi i n}\bigg|_{x=0}^{1} - \int_0^1 \frac{e^{-2\pi i n x}}{-2\pi i n} \mathrm{d}x \\ &= \frac{e^{-2\pi i n}}{-2\pi i n} = -\frac{1}{2\pi i n}. \end{aligned}$$

par (12.3). Alors,

$$S_N f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi i} \sum_{1\leq |n| \leq N} \frac{e^{2\pi i n x}}{n}.$$

En écrivant $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$, on trouve que

$$S_N f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(2\pi n x)}{n}.$$

Si $x = 0$, alors $S_N f(x)$ converge trivialement vers $1/2$, et si $0 < |x| \leq 1/2$, alors $S_N f(x)$ converge par le corollaire 10.3. Donc, le théorème 12.6 implique que $\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = (\{x+\} + \{x-\})/2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n x)}{n} = \pi\left(\frac{1}{2} - x\right) \quad (0 < x < 1).$$

□

Théorème 12.8. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 1-périodique et continue.*

(a) On a que $\sigma_N f \overset{unif}{\to} f$ *sur* $\mathbb{R}$.

(b) Si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$*, alors* $S_N f \overset{unif}{\to} f$ *sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration. (a) Le résultat découle directement du théorème 12.5(b). (Comme on l'a déjà remarqué, le lemme 12.3 implique facilement que $(F_N)_{N\geq 1}$ est une suite de Dirac 1-périodique.)

(b) L'hypothèse que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$ et le critère de Weierstrass impliquent que la suite de fonctions $(S_N f)_{N\geq 1}$ converge uniformément vers une fonction g sur $\mathbb{R}$. Le lemme 10.11 implique que $g = f$. □

Un corollaire facile et très utile du théorème 12.8 et de la remarque 12.2 est le résultat suivant :

Corollaire 12.9. *Si* $f \in C^2(\mathbb{R})$ *est une fonction 1-périodique, alors* $S_N f \overset{unif}{\to} f$.

Théorème 12.10 (théorème de Riemann-Lebesgue)**.** *Si* $f \in \mathcal{F}_{pér}$*, alors*

$$\lim_{|n|\to\infty} \hat{f}(n) = 0.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f \in \mathcal{R}([0,1])$, il existe $P = \{p_0, p_1, \ldots, p_k\}$, partition de $[0,1]$, telle que $D(f,P) < \varepsilon$. Pour $j \in \{1,\ldots,k\}$, posons $M_j = \sup_{p_{j-1}\leq x\leq p_j} f(x)$ et $m_j = \inf_{p_{j-1}\leq x\leq p_j} f(x)$, et considérons la fonction

$$g(x) := \sum_{j=1}^{k} m_j \mathbf{1}_{[p_{j-1},p_j)}(x) \quad (0 \leq x < 1).$$

On prolonge g à $\mathbb{R}$ de façon 1-périodique, en posant $g(x) := g(\{x\})$ pour $x \notin [0,1)$. Par la définition de g, on a que $g \leq f$ sur $[0,1)$ et, par périodicité, sur $\mathbb{R}$. De plus

$$\int_0^1 (f-g) = \sum_{j=1}^{k} \int_{p_{j-1}}^{p_j} (f - m_j) \leq \sum_{j=1}^{k} (M_j - m_j)(p_j - p_{j-1}) = D(f,P) < \varepsilon.$$

Par conséquent,

$$|\hat{f}(n) - \hat{g}(n)| = \left| \int_0^1 (f(x) - g(x)) e^{-2\pi i n x} \mathrm{d}x \right| \leq \int_0^1 |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x = \int_0^1 (f-g) < \varepsilon.$$

Finalement, si $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, alors on observe que

$$\hat{g}(n) = \sum_{j=1}^{k} m_j \int_{p_{j-1}}^{p_j} e^{-2\pi i n x} \mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{k} m_j \left. \frac{e^{-2\pi i n x}}{-2\pi n} \right|_{x=p_{j-1}}^{p_j},$$

pour que

$$|\hat{g}(n)| \leq \frac{|m_1| + \cdots + |m_k|}{\pi |n|}.$$

Ici, P dépend seulement de ε. Donc, après avoir fixé P, on peut choisir $|n|$ assez grand pour que $|\hat{g}(n)| < \varepsilon$, d'où on déduit que $|\hat{f}(n)| < 2\varepsilon$. Ceci conclut la démonstration. □

Théorème 12.11. *Soit $f \in \mathcal{F}_{pér}$. Si f est différentiable sur un point $x \in \mathbb{R}$, alors* $\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = f(x)$.

Démonstration. On se rappelle que $S_N f = D_N * f$. Donc, le lemme 12.3 implique que

$$\begin{aligned} S_N f(x) - f(x) &= \int_{-1/2}^{1/2} D_N(t) f(x-t)\mathrm{d}t - f(x)\int_{-1/2}^{1/2} D_N(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} D_N(t)(f(x) - f(x-t))\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{f(x)-f(x-t)}{\sin(\pi t)} \sin(\pi(2N+1)t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

On définit

$$g(t) := \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(x-t)}{\sin(\pi t)} & \text{si } 0 < |t| \leq 1/2, \\ \\ \dfrac{f'(x)}{\pi} & \text{si } t = 0, \end{cases}$$

on prolonge g à $\mathbb{R}$ de façon 1-périodique, pour que

$$S_N f(x) - f(x) = \int_{-1/2}^{1/2} g(t)\sin(\pi(2N+1)t)\mathrm{d}t.$$

Si on peut montrer que $g \in \mathcal{R}([-1/2, 1/2])$, alors en suivant la démonstration du théorème de Riemann-Lebesgue, on trouve que $\lim_{N\to\infty}(S_N f(x) - f(x)) = 0$, ce qui est ce qu'on veut démontrer.

Alors, il reste de montrer que $g \in \mathcal{R}([-1/2, 1/2])$. On commence en montrant que g est bornée. On sait que $\lim_{t\to 0}\sin(\pi t)/t = \pi$ et que $\lim_{t\to 0}(f(x) - f(x-t))/t = f'(x)$, d'après la differentiabilité de f en x. On déduit que $\lim_{t\to 0}(f(x) - f(x-t))/\sin(\pi t) = f'(x)/\pi$. En particulier, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\left| \frac{f(x)-f(x-t)}{\sin(\pi t)} - \frac{f'(x)}{\pi} \right| < 1 \quad (0 < |t| < \delta).$$

Vu que f est bornée comme membre de l'ensemble $\mathcal{F}_{\text{pér}}$, alors on voit que

$$\left| \frac{f(x)-f(x-t)}{\sin(\pi t)} \right| \leq M := \max\left\{ 1 + \frac{|f'(x)|}{\pi}, \frac{2\|f\|_\infty}{\delta} \right\} < \infty$$

pour $0 < |t| \leq 1/2$. En tout cas, $|g(t)| \leq M$ pour $t \in [-1/2, 1/2]$, et la périodicité de g conclut la démonstration de notre affirmation que g est bornée. Finalement, on montre que $g \in \mathcal{R}^*([-1/2, 1/2])$, ce qui suffit d'après l'exercice 4.1. Puisque $f \in \mathcal{R}([-1/2, 1/2])$ et $\sin(\pi t)$ est continue pour $t \in [-1/2, 1/2] \setminus \{0\}$, il est facile de voir que $g \in \mathcal{R}([-1/2, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, 1/2])$, pour tout $\varepsilon > 0$. Finalement, on observe que

$$\left| \int_{\varepsilon' \leq |t| \leq \varepsilon} g(t)\mathrm{d}t \right| \leq 2M\varepsilon.$$

Ceci montre que les limites $\lim_\varepsilon \int_{-1/2}^{-\varepsilon} g$ et $\lim_\varepsilon \int_{\varepsilon}^{1/2} g$ existent, et le résultat affirmé est prouvé. $\square$

Exercices

Exercice 12.1. Soit $f \in \mathcal{F}_{\text{pér}}$. Pour tout $c \in \mathbb{R}$, montrez que

$$\hat{f}(n) = \int_c^{c+1} f(x) e^{-2\pi i n x} \mathrm{d}x.$$

Exercice 12.2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 1-périodique qui est paire sur l'intervalle $(-1/2, 1/2)$, c'est-à-dire $f(-x) = f(x)$ pour $|x| < 1/2$. Montrez que

$$\hat{f}(n) = 2\int_0^{1/2} f(x) \cos(2\pi n x) \mathrm{d}x.$$

Exercice 12.3. Montrez que

$$x(1-x) = \frac{1}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n x)}{\pi^2 n^2} \qquad (0 \leq x \leq 1).$$

Déduisez que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 12.4. Calculez la série de Fourier de la fonction $f(x) = |\sin(2\pi x)|$ et examinez si

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}.$$

Exercice 12.5. Soit $f(x) = \{x\}$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Montrez que f est une fonction 1-périodique qui est différentiable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

(b) Calculez les coefficients de Fourier de f.

(c) Montrez que si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, alors

$$\{x\} = 1/2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n x)}{\pi n}.$$

(d) Montrez que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(2\pi n x)/n$ converge uniformément sur $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$, pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé.

Exercice 12.6. Si $f(x) = (1 - 2|x|)^2$ pour $x \in [-1/2, 1/2]$, alors montrez que

$$f(x) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cos(2\pi n x)}{\pi^2 n^2}$$

et déduisez que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

[*Indice* : pour la dernière identité, intégrez f.]

Exercice 12.7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 1-périodique telle que $f(x) = -1$ si $x \in [-1/2, 0)$ et $f(x) = 1$ si $x \in [0, 1/2)$. Calculez les coefficients de Fourier de f et la valeur de la série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2\pi inx}$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$ pour lequel elle est convergente.

Exercice 12.8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 1-périodique telle que $f(x) = \cosh(2\pi x) = (e^{2\pi x} + e^{-2\pi x})/2$ pour $-1/2 \leq x < 1/2$. Calculez les coefficients de Fourier de f et évaluez la somme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Exercice 12.9. Soient f et g les fonctions 1-périodiques définies par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1/2 < x \leq 0 \\ 3 & \text{si } 0 < x \leq 1/2, \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1/2 < x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x \leq 1/2. \end{cases}$$

Calculez leurs séries de Fourier et évaluez-les en $x = 0$. Qu'est-ce que vous observez ?

Exercice 12.10. Soit $f \in \mathcal{F}_{\text{pér}}$ et soient aussi $a_{-N}, a_{-N+1}, \ldots, a_N$ quelques nombres complexes. Posons

$$T(x) = \sum_{|n|\leq N} a_n e^{2\pi inx}.$$

(a) Montrez que

$$\int_0^1 |T(x)|^2 \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2.$$

[*Indice* : $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.]

(b) Montrez que

$$\int_0^1 f(x)\overline{T(x)}\mathrm{d}x = \sum_{|n|\leq N} \hat{f}(n)\overline{a_n}.$$

(c) Déduisez que

$$\int_0^1 |f(x) - T(x)|^2 \mathrm{d}x \geq \int_0^1 |f(x) - S_N f(x)|^2 \mathrm{d}x;$$

de plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si $a_n = \hat{f}(n)$ pour tout $n \in \{-N, -N+1, \ldots, N\}$.

(d) Supposez que f est continue.

(i) Montrez que $|\sigma_N f|^2 \overset{\text{unif}}{\to} |f|^2$ sur $\mathbb{R}$.

(ii) Déduisez que la suite

$$P_N = \sum_{|n|\leq N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right)^2 |a_n|^2$$

converge vers $\int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x$.

(iii) Montrez que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2$ converge et déduisez l'**identité de Parseval** :

$$\int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2.$$

Exercice 12.11. Soit $r \in (0,1)$ et

$$P_r(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{2\pi i n x}.$$

(a) Montrez que

$$P_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi x)+r^2}.$$

(b) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction 1-périodique telle que $f, |f| \in \mathcal{R}^*([0,1])$, alors montrez que

$$\int_0^1 f(t)P_r(x-t)dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\hat{f}(n)e^{2\pi i n x}.$$

Exercice 12.12. Soit $\delta \in (0,1/2)$. On définit une fonction 1-périodique $w_\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$w_\delta(x) = \begin{cases} (1-|x/\delta|)/\delta & \text{si } |x| \leq \delta, \\ 0 & \text{si } |\delta| \leq x \leq 1/2. \end{cases}$$

(a) Calculez les coefficients $\hat{w_\delta}(n)$.
(b) Est-ce que c'est vrai que la suite des fonctions $S_N w_\delta(x) = \sum_{|n|\leq N} \hat{w_\delta}(n)e^{2\pi i n x}$ converge ponctuellement vers w_δ ? Est-ce que la convergence est uniforme ?
(c) Montrez que la suite des fonctions $(w_{1/n})_{n\geq 1}$ est une suite de Dirac 1-périodique.
(d) Montrez que $\hat{w_\delta}(n) = 1 + O(n\delta)$ pour $|n| \leq 1/\delta$. (On voit ici une fonction concentrée sur un intervalle de longueur 2δ dont les coefficients de Fourier $\hat{w_\delta}(n)$ sont essentiellement constants pour $|n| \leq 1/\delta$, et on a que $2\delta \cdot 1/\delta = 1 =$ constante. Ceci est une manifestation de la principe d'incertitude.)

Exercice 12.13. Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ pour laquelle il existe une constante $M \geq 0$ telle que

$$|f(x)| + |f'(x)| + |f''(x)| \leq \frac{M}{x^2+1} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(a) Montrez que la série

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$$

converge uniformément sur $[0,1]$.
(b) Montrez que la fonction

$$F(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$$

est 1-périodique et appartient à $C^2(\mathbb{R})$. Déduisez que

$$F(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{F}(m)e^{2\pi i m x}$$

(c) Montrez que

$$\widehat{F}(m) = (\mathscr{F} f)(m), \quad \text{où} \quad (\mathscr{F} f)(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \xi t} \mathrm{d}t$$

est la **transformation de Fourier** de f. Déduisez que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\mathscr{F} f)(m).$$

Remarque. Cette égalité est appelée la **formule sommatoire de Poisson**. Observez que si $m = 0$, alors $(\mathscr{F} f)(0) = \int_{\mathbb{R}} f$. En général, si f n'oscille pas trop, on s'attend à ce que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \approx \int_{\mathbb{R}} f$ (voir la formule d'Euler-Maclaurin). Donc, on considère le terme avec $m = 0$ comme le 'terme principal'. Tous les autres termes devraient être petits à cause de l'oscillation de $e^{2\pi i m t}$ pour $m \neq 0$.

Exercice 12.14. (a) Pour $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, intégrez par parties pour montrer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-\pi x^2} \mathrm{d}x = \frac{2k-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k-2} e^{-\pi x^2} \mathrm{d}x.$$

[*Indice :* $(e^{-\pi x^2})' = -2\pi x e^{-\pi x^2}$.] Déduisez que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-\pi x^2} \mathrm{d}x = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{(2\pi)^k}.$$

(b) Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrez que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi x y) e^{-\pi x^2} \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2\pi y)^{2k}}{(2k)!} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-\pi x^2} \mathrm{d}x = e^{-\pi y^2}.$$

[*Indice :* pour la première égalité, utilisez l'exercice 8.9 avec

$$f_n(x) = e^{-\pi x^2} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2\pi y x)^{2k}}{(2k)!}$$

et $g(x) = e^{-\pi x^2 + 2\pi |xy|}$.]

(c) Déduisez que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi (x+iy)^2} \mathrm{d}x = 1$$

pour chaque $y \in \mathbb{R}$.

(d) Pour tout $x > 0$, montrez que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 / x} = \sqrt{x} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x}.$$

[*Indice* : formule sommatoire de Poisson.]

Annexe : la répartition uniforme mod 1

Soit $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de nombres réels. On veut étudier la *répartition* de cette suite mod 1. Ceci veut dire que, pour chaque $u \in [0,1]$, on étudie

$$Z(N;u) := \#\{n \le N : \{u_n\} < u\}.$$

On dit que la suite $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ est **uniformément répartie mod 1** si

$$\lim_{N\to\infty} \frac{Z(N;u)}{N} = u$$

pour chaque $u \in [0,1]$.

Le théorème principal dans ce sujet est le **critère de Weyl** qui caractérise les suites étant uniformément réparties en termes de leur **transformation de Fourier**

$$\widehat{U}_N(k) := \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k u_n} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Théorème 12.12 (le critère de Weyl)**.** *La suite $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ est uniformément répartie mod 1 si, et seulement si,*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\widehat{U}_N(k)}{N} = 0 \quad \textit{pour chaque } k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

Démonstration. Montrons d'abord la direction converse car elle est directement liée à la théorie de séries de Fourier qu'on a étudié à ce chapitre. Supposons, alors, que $\lim_{N\to\infty} \hat{U}_N(k)/N = 0$ quand $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. On montre que $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ est uniformément répartie mod 1.

Soit $u \in (0,1)$ (quand $u \in \{0,1\}$, on a trivialement que $Z(N;u) = uN$). On observe que

$$Z(N;u) = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{[0,u)\,(\mathrm{mod}\,1)}(u_n),$$

où $\mathbf{1}_{[0,u)\,(\mathrm{mod}\,1)}$ veut dire la fonction indicatrice de l'ensemble $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[n, n+u)$. Alors, elle est une fonction 1-périodique. Puisque ses seules discontinuités sont de sauts aux points $0, u\,(\mathrm{mod}\,1)$, on peut la décomposer en séries de Fourier : si $x \not\equiv 0, 1\,(\mathrm{mod}\,1)$, alors

$$\mathbf{1}_{[0,u)\,(\mathrm{mod}\,1)}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(u) e^{2\pi i k x},$$

où

$$c_k(u) = \int_0^u e^{-2\pi k x} \mathrm{d}x = \begin{cases} (1 - e^{2\pi i k u})/(2\pi i k) & \text{si } k \ne 0, \\ u & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$Z(N;u) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(u) e^{2\pi i k u_n}.$$

Si on imagine qu'on peut interchanger l'ordre de sommation, on trouve que

$$Z(N;u)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(u)\widehat{U}_N(k). \tag{12.4}$$

Puisque $\widehat{U}_N(k)/N$ est petit pour $k\neq 0$ et N grand, on a montré de façon formelle que

$$Z(N;u)\approx c_0(u)\widehat{U}_N(0)=u\cdot N.$$

L'argument ci-dessus souffre de manque de rigueur dans plusieurs étapes. Par exemple, la série $\sum_k |c_k(u)|$ diverge, donc c'est difficile de justifier (12.4). Pour fixer ce problème, on remplace $\mathbf{1}_{[0,u)\,(\mathrm{mod}\,1)}$ par une fonction dont la transformation de Fourier a meilleures propriétés de convergence.

Définissons deux fonctions 1-périodiques $f_j^{\pm}$ par

$$f_j^+ := \mathbf{1}_{[0,u+1/j)\,(\mathrm{mod}\,1)} * \big(j\cdot \mathbf{1}_{[-1/j,0)\,(\mathrm{mod}\,1)}\big) \quad \text{et} \quad f_j^- := \mathbf{1}_{[0,u-1/j)\,(\mathrm{mod}\,1)} * \big(j\cdot \mathbf{1}_{[0,1/j)\,(\mathrm{mod}\,1)}\big).$$

(Notez que $j\mathbf{1}_{[0,1/j)\,(\mathrm{mod}\,1)}$ et $j\mathbf{1}_{[-1/j,0)\,(\mathrm{mod}\,1)}$ sont de suites de Dirac mod 1.) De façon explicite, quand $j>\max\{2/u,2/(1-u)\}$, on calcule que

$$f_j^+(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } 0\le x\le u, \\ j(u+1/j-x) & \text{si } u\le x\le u+1/j, \\ j(x+1/j) & \text{si } -1/j\le x\le 0, \\ 0 & \text{si } u+1/j-1\le x\le -1/j \end{cases}$$

et

$$f_j^-(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } 1/j\le x\le u-1/j, \\ j(u-x) & \text{si } u-1/j\le x\le u, \\ jx & \text{si } 0\le x\le 1/j, \\ 0 & \text{si } u-1\le x\le 0. \end{cases}$$

En particulier, on a que

$$f_j^- \le \mathbf{1}_{[0,u)\,(\mathrm{mod}\,1)} \le f_j^+.$$

De plus, [2]

$$\widehat{f_j^+}(k) = j\cdot \widehat{\mathbf{1}}_{[0,u+1/j)\,(\mathrm{mod}\,1)}(k)\cdot \widehat{\mathbf{1}}_{[-1/j,0)\,(\mathrm{mod}\,1)}(k) = \frac{j(e^{-2\pi i(u+1/j)k}-1)(e^{2\pi k/j}-1)}{4\pi^2k^2}$$

et

$$\widehat{f_j^-}(k) = j\cdot \widehat{\mathbf{1}}_{[0,u-1/j)\,(\mathrm{mod}\,1)}(k)\cdot \widehat{\mathbf{1}}_{[0,1/j)\,(\mathrm{mod}\,1)}(k) = -\frac{j(e^{-2\pi i(u-1/j)k}-1)(e^{-2\pi k/j}-1)}{4\pi^2k^2}$$

2. Cette étape peut être justifiée par un calcul directe pour les fonctions f_j^+. Cependant, c'est une identité qui est vraie en grande généralité : on a que $\widehat{(f*g)}(n)=\int_0^1(f*g)(x)e^{-2\pi inx}\mathrm{d}x=\int_0^1\int_0^1 f(y)g(x-y)e^{-2\pi ny}e^{-2\pi n(x-y)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$. En changeant l'ordre d'intégration, une étape qui peut être justifiée par le théorème de Fubini quand $f,g\in\mathcal{F}_{\text{pér}}$, on trouve que $\widehat{(f*g)}(n)=\widehat{f}(n)\cdot\widehat{g}(n)$.

On voit alors que

$$|\widehat{f_j^{\pm}}(k)| \le \frac{j}{\pi^2 k^2} \quad \text{quand } k \neq 0.$$

Or, on observe que

$$Z(N;u) \le \sum_{n=1}^{N} f_j^+(u_n) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f_j^+}(k) e^{2\pi i k u_n} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f_j^+}(k) \widehat{U}_N(k).$$

Cette étape est bien justifiée maintenant, car $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f_j^+}(k)| < \infty$. Puisque $\widehat{f_j^+}(0) = u + 1/j$, on a que

$$Z(N;u) \le (u+1/j)N + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \widehat{f_j^+}(k)\widehat{U}_N(k).$$

Soit $\varepsilon > 0$. On pose

$$j = \lceil \max\{1/\varepsilon, 2/u, 2/(1-u)\} \rceil .$$

Quand $|k| \ge j/\varepsilon$, alors on utilise la borne triviale $|\widehat{U}_N(k)| \le N$, pour que

$$\left| \sum_{|k|\ge j/\varepsilon} \widehat{f_j^+}(k)\widehat{U}_N(k) \right| \le \sum_{|k|\ge j/\varepsilon} \frac{Nj}{\pi^2 k^2} = \sum_{k\ge j/\varepsilon} \frac{2Nj}{\pi^2 k^2} \le \frac{2Nj}{\pi^2} \int_{j/\varepsilon}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{2N\varepsilon}{\pi^2},$$

où on a utilisé le fait que $1/t^2$ est décroissante (voir l'exercice 6.1).

D'autre part, quand $0 < |k| \le j/\varepsilon$, on utilise la borne triviale $|\widehat{f_j^+}(k)| \le \widehat{f_j^+}(0) = u + 1/j \le 1$. De plus, l'hypothèse implique qu'il existe $N_0 = N_0(\varepsilon, j, u) = N_0(\varepsilon, u)$ tel que $|\widehat{U}_N(k)| \le \varepsilon^2 N/j$ quand $1 \le |k| \le j/\varepsilon$. Par conséquent,

$$\left| \sum_{1\le|k|\le j/\varepsilon} \widehat{f_j^+}(k)\widehat{U}_N(k) \right| \le \sum_{1\le|k|\le j/\varepsilon} \frac{2\varepsilon^2 N}{j} \le 4\varepsilon N.$$

En mettant tous nos estimations ensemble, on trouve que

$$Z(N;u) \le (u+6\varepsilon)N$$

quand $N \ge N_0$. De même, en commençant avec l'inégalité $Z(N;u) \ge \sum_{n=1}^{N} f_j^-(u_n)$, on peut aussi montrer que $Z(N;u) \ge (u-6\varepsilon)N$ pour $N \ge N_0$. Puisque ε peut être aussi petit qu'on veut, on trouve que $\lim_{N\to\infty} Z(N;u)/N = u$.

Réciproquement, supposons que suite $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ est uniformément répartie mod 1 et fixons $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Montrons que $\lim_{N\to\infty} \widehat{U}_N(k)/N = 0$.

Fixons un grand nombre entier A qu'on choisira plus tard. Si $(a-1)/A \le \{u_n\} < a/A$ pour un $a \in \mathbb{Z} \cap [1, A]$, alors

$$e^{2\pi i k u_n} - e^{2\pi i k a/A} = e^{2\pi i k \{u_n\}} - e^{2\pi i k a/A} = \int_{2\pi k a/A}^{2\pi k \{u_n\}} i e^{i\theta} \mathrm{d}\theta.$$

En particulier,

$$|e^{2\pi iku_n} - e^{2\pi ika/A}| \leq \int_{2\pi ka/A}^{2\pi k\{u_n\}} |ie^{i\theta}|\mathrm{d}\theta = 2\pi k(\{u_n\} - a/A) \leq \frac{2\pi k}{A}.$$

Alors, on trouve que

$$\begin{aligned}\left|\widehat{U}_N(k) - \sum_{a=1}^{A} \sum_{\substack{1\leq n\leq N \\ (a-1)/A\leq\{u_n\}<a/A}} e^{2\pi ika/A}\right| &= \left|\sum_{a=1}^{A} \sum_{\substack{1\leq n\leq N \\ (a-1)/A\leq\{u_n\}<a/A}} (e^{2\pi iku_n} - e^{2\pi ika/A})\right| \\ &\leq \frac{2\pi k}{A} \cdot N.\end{aligned}$$

Fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons $A = \lceil 2\pi/\varepsilon \rceil$, pour que

$$\left|\widehat{U}_N(k) - \sum_{a=1}^{A} \sum_{\substack{1\leq n\leq N \\ (a-1)/A\leq\{u_n\}<a/A}} e^{2\pi ika/A}\right| \leq \varepsilon N.$$

Puis, on observe que

$$\sum_{\substack{1\leq n\leq N \\ (a-1)/A\leq\{u_n\}<a/A}} 1 = Z(N; a/A) - Z(N; (a-1)/A).$$

On écrit

$$Z(N; u) = uN + R(N; u).$$

On sait que, pour chaque u fixé, $R(N; u)/N \to 0$. Puisque on a déjà fixé A, on sait alors qu'il existe $N_0 = N(\varepsilon, A) = N(\varepsilon)$ tel que

$$|R(N; j/N)| \leq \frac{\varepsilon N}{A} \quad (0 \leq j \leq A,\ N \geq N_0).$$

Donc

$$\left|\sum_{\substack{1\leq n\leq N \\ (a-1)/A\leq\{u_n\}<a/A}} 1 - \frac{N}{A}\right| \leq \frac{2\varepsilon N}{A}.$$

On en déduit que

$$\left|\sum_{a=1}^{A} \sum_{\substack{1\leq n\leq N \\ (a-1)/A\leq\{u_n\}<a/A}} e^{2\pi ika/A} - \sum_{a=1}^{A} e^{2\pi ka/A}\frac{N}{A}\right| \leq 2\varepsilon N$$

quand $N \geq N_0$. Par la suite,

$$\left|\widehat{U}_N(k) - \sum_{a=1}^{A} e^{2\pi ka/A}\frac{N}{A}\right| \leq 3\varepsilon N.$$

Mais, on a que

$$\sum_{a=1}^{A} e^{2\pi i k a/A} = e^{2\pi i k/A} \cdot \frac{e^{2\pi i k} - 1}{e^{2\pi k/A} - 1} = 0$$

car $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et $k/A \notin \mathbb{Z}$. Ceci montre que $|\widehat{U}_N(k)| \leq 3\varepsilon N$ pour $N \geq N_0$. Puisque ε peut être aussi peut qu'on veut, on a montré que $\lim_{N\to\infty} \hat{U}_N(k)/N = 0$ quand $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. □

Un corollaire fameux du théorème 12.12 est :

Corollaire 12.13. *Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors la suite $(n\alpha)_{n=1}^{\infty}$ est uniformément répartie mod 1.*

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. La relation (9.7) implique que

$$\left| \sum_{n=0}^{N} e^{2\pi i k n \alpha} \right| \leq \frac{1}{\sin(\pi k \alpha)}.$$

Puisque $\alpha \notin \mathbb{Q}$, on a que $\sin(\pi k \alpha) \neq 0$. Donc,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} e^{2\pi i k n \alpha} = 0.$$

Le résultat alors découle du critère de Weyl. □

Exercice 12.15. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue que est 1-périodique et $\sqrt{2}$-périodique, c'est-à-dire $f(x+1) = f(x) = f(x+\sqrt{2})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrez que f est constante. [*Indice :* voir le corollaire 12.13 plus bas.]

Troisième partie

Quelques prérequis

Annexe A

Éléments de topologie d'espaces métriques

Ensembles ouverts

Définition A.1. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. On dit que a est un **point intérieur** de A s'il existe $\varepsilon > 0$ (qui pourrait dépendre de a) tel que l'intervalle $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ est contenu dans A. L'ensemble de tous les points intérieurs de A est appelé l'**intérieur** de A et il est dénoté par A°.

On dit que A est un ensemble **ouvert** si $A^\circ = A$, c'est-à-dire si chaque point de A est un point intérieur de A.[1] $\square$

Par exemple, l'intervalle (a, b) est un ensemble ouvert. Cependant l'intervalle $(a, b]$ n'est pas ouvert : on peut facilement vérifier que $(a, b]^\circ = (a, b) \neq (a, b]$.

Lemme A.2. *Si $\{V_i : i \in I\}$ est une collection d'ensembles ouverts, alors l'union $\bigcup_{i \in I} V_i$ est un ensemble ouvert également.*

Démonstration. Exercice. $\square$

La proposition suivante caractérise les ensembles ouverts :

Proposition A.3. *Si $A \subseteq \mathbb{R}$ est ouvert, alors*

$$A = \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i),$$

où $I \subseteq \mathbb{N}$ et les intervalles (a_i, b_i), $i \in I$, sont mutuellement disjoints. De plus, cette représentation de A est unique.

Démonstration. Soit $a \in A$. On considère la collection d'intervalles ouverts

$$\mathcal{F}_a := \{(c, d) \subseteq A : a \in (c, d)\}.$$

1. C'est trivial que $A^\circ \subseteq A$.

Cette collection est non-vide car il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq A$ et, par la suite, $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \in \mathcal{F}_a$. Soit

$$J_a = \bigcup_{(c,d)\in\mathcal{F}_a} (c,d).$$

On affirme que J_a est un intervalle ouvert. Plus, précisément, si $m_a = \inf J_a$ et $M_a = \sup J_a$, alors on montrera que $J_a = (m_a, M_a)$. Si on peut montrer cette relation, il découle que J_a appartient soi-même à $\mathcal{F}_a$. Alors, J_a est, en fait, l'intervalle ouvert maximal contenant le point a et contenu dans A.

Tout d'abord, on montre que si $x, y \in J_a$, alors chaque nombre entre x et y est aussi dans J_a. En effet, puisque $x, y \in J_a$, alors il existe $(\alpha,\beta), (\gamma,\delta) \in \mathcal{F}_a$ tel que $x \in (\alpha,\beta)$ et $y \in (\gamma,\delta)$. De plus, l'intersection des intervalles $(\alpha,\beta), (\gamma,\delta)$ n'est pas vide car le nombre a appartient à elle. Donc $(\alpha,\beta)\cup(\gamma,\delta)$ est un intervalle ouvert qui contient a, soit $(\alpha,\beta)\cup(\gamma,\delta) = (\kappa,\lambda)$. De plus, $(\kappa,\lambda) \subseteq A$ et alors $(\kappa,\lambda) \in \mathcal{F}_a$; en particulier, $(\kappa,\lambda) \subseteq J_a$. Mais chaque point entre x et y appartient à $(\kappa,\lambda) \subseteq J_a$ car $x, y \in (\kappa,\lambda)$. Donc chaque point entre x et y appartient à J_a, comme affirmé.

Finalement, on montre que $J_a = (m_a, M_a)$. Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $x, y \in J_a$ tels que $m_a \le x \le m_a + \varepsilon$ et $M_a + \varepsilon \le y \le M_a$. On sait que chaque point entre x et y appartient à J_a. En particulier, $[m_a+\varepsilon, M_a-\varepsilon] \subseteq J_a$. Puisque cette relation est vraie pour chaque $\varepsilon > 0$, alors on trouve que $(m_a, M_a) \subseteq J_a$. D'autre côté, on sait que $J_a \subseteq [m_a, M_a]$. Donc les seules possibilités pour J_a sont les intervalles (m_a, M_a), $[m_a, M_a)$, $(m_a, M_a]$ et $[m_a, M_a]$. Mais J_a est un ensemble ouvert car il est l'union de quelques intervalles ouverts (voyez le lemme A.2). Donc on doit avoir que $J_a = (m_a, M_a)$; les autres possibilités produisent un ensemble non-ouvert.

On a montré que à chaque nombre $a \in A$, on peut associer J_a, l'intervalle ouvert maximal qui contient a et est contenu dans A. Puis on affirme que si $a, b \in A$, alors soit $J_a = J_b$ soit $J_a \cap J_b = \emptyset$. C'est une conséquence de la maximalité des J_a et J_b. En effet, supposons qu'il existe $c \in J_a \cap J_b$. Donc $J_a \subseteq A$ est un intervalle qui contient c et la maximalité de J_c implique que $J_a \subseteq J_c$. De même, on trouve que $J_b \subseteq J_c$. Mais ces relations impliquent que $a, b \in J_c$. Comme avant, on déduit de cette relation que $J_c \subseteq J_a$ et que $J_c \subseteq J_b$. Donc $J_a = J_c = J_b$, ce qui conclut la démonstration de notre affirmation.

On est prêt de finir la démonstration : on sait que $A = \bigcup_{a\in A} J_a$ (cette relation découle du fait que $a \in J_a \subseteq A$, pour tout $a \in A$). Alors on peut choisir un ensemble $\{a_i : i \in I\}$ tel que $A = \bigcup_{i\in I} J_{a_i}$ et les intervalles J_{a_i}, $i \in I$, sont mutuellement disjoints. Puisque chaque intervalle J_{a_i} contient un nombre rationnel different, nécessairement soit I est un ensemble fini soit il est infini mais dénombrable.

L'unicité de cette représentation de A découle directement de la démonstration. $\square$

Ensembles fermés

Définition A.4. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. On dit que x est un **point adhérent** de A si, pour chaque $\varepsilon > 0$, on a que $A \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \neq \emptyset$. On dénote l'ensemble des points adhérents de A par $\overline{A}$.

On dit que A est un ensemble **fermé** si $A = \overline{A}$, c'est-à-dire si chaque point adhérent de A appartient à A.[2] $\square$

Par exemple, l'intervalle $[a, b]$ est un ensemble fermé mais l'intervalle $(a, b]$ n'est pas fermé, puisque $\overline{(a, b]} = [a, b] \neq (a, b]$.

Les points de A sont des points adhérents trivialement. Pour cette raison, on introduit la notion des points d'accumulation :

Définition A.5. On dit que x est un **point d'accumulation** de A si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $y \neq x$ qui appartient à $A \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. On dénote l'ensemble des points d'accumulation de A par A'. $\square$

C'est facile de voir que $\overline{A} = A \cup A'$, pour tout $A \subseteq \mathbb{R}$.

Lemme A.6. *Un ensemble de nombres réels A est ouvert si et seulement si son complement A^c est fermé.*

Démonstration. Premièrement, on suppose que A est ouvert et on montre que $B := A^c$ est fermé. C'est clair que $B \subseteq \overline{B}$, puisque si $b \in B$, alors $b \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon) \cap B$. Alors il reste de montrer que $B = \overline{B}$. Il suffit de montrer que $A \cap \overline{B} = \emptyset$. En effet, si $a \in A$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq A = B^c$ et donc $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap B = \emptyset$, qui implique que $a \notin \overline{B}$, comme affirmé. Ceci conclut la démonstration que B est fermé.

Réciproquement, supposons que B est fermé. Si $a \in A$, alors $a \notin B = \overline{B}$. Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B \cap (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \emptyset$, qui implique que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq B^c = A$. Ceci conclut la démonstration que A est ouvert. $\square$

Lemme A.7. *Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ et soit $B = A^c$ son complement. On a que*

$$A^\circ = \overline{B}^c.$$

Démonstration. Exercice. $\square$

Lemme A.8. *Si $\{F_i : i \in I\}$ est une collection d'ensembles fermés, alors l'intersection $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un ensemble fermé également.*

Démonstration. Exercice. $\square$

C'est possible de caractériser les points adhérents et les points d'accumulation de A en utilisant de suites :

Proposition A.9. *Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$.*

(a) Le nombre x est un point adhérent de A si et seulement si il existe une suite $(a_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de A qui converge vers x.

(b) Le nombre x est un point d'accumulation de A si et seulement si il existe une suite $(a_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de $A \setminus \{x\}$ qui converge vers x.

2. C'est trivial que $A \subseteq \overline{A}$.

Démonstration. (a) Si x est un point adhérent, alors pour chaque $n \geq 1$, il existe $a_n \in A \cap (x - 1/n, x + 1/n)$. Donc la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de A converge vers A.

Réciproquement, supposons qu'il existe une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de A qui converge vers x. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $N = N(\varepsilon)$ tel que $|a_n - a| < \varepsilon$ pour $n \geq N$. En particulier, $a_N \in A \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, ce qui implique que $A \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \neq \emptyset$. Donc x est un point adhérent.

(b) Exercice. □

Corollaire A.10. *Un ensemble de nombres réels A est fermé si et seulement si pour chaque suite $(a_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de A qui converge, alors on a que $\lim_{n\to\infty} a_n \in A$ également.*

Démonstration. Supposons que A est fermé et soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de A qui converge à un nombre $x \in \mathbb{R}$. Alors la proposition A.9(a) implique que $x \in \overline{A} = A$, comme voulu.

Réciproquement, supposons que pour chaque suite $(a_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de A qui converge, alors on a que $\lim_{n\to\infty} a_n \in A$. Soit $a \in \overline{A}$. La proposition A.9(a) implique qu'il existe une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de A qui converge vers a. Donc $a = \lim_{n\to\infty} a_n \in A$, ce qui est ce qu'il fallait démontrer. □

Les théorèmes de Bolzano-Weierstrass et de Cantor

Théorème A.11 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble borné et infini. Alors A a un point d'accumulation.*

Démonstration. Soit $M > 0$ tel que $A \subseteq [-M, M]$. Soit $[-M, 0]$ soit $[0, M]$ contient une infinité d'éléments du A. Sans perte de généralité, on suppose que c'est $[0, M]$ qui a cette propriété. Soit $a_1 \in A \cap [0, M]$. Puis, on divise $[0, M]$ dans deux parties, $[0, M/2]$ et $[M/2, M]$ et on observe qu'au mois un de ces parties contient une infinité d'éléments du A. Sans perte de généralité, on suppose que c'est $[0, M/2]$ qui a cette propriété et on choisit $a_2 \in A \cap [0, M/2] \setminus \{a_1\}$.

En continuant dans la même façon, on construit une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ d'éléments distincts de A telle que $a_n, a_{n+1}, \dots$ appartiennent à un intervalle de longueur $M/2^{n-1}$. Ceci implique que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy, donc convergente : en effet, si $\varepsilon > 0$, alors il existe $N \geq 1$ tel que $M/2^{N-1} < \varepsilon$. Par conséquent, si $m, n \geq N$, alors $|a_n - a_m| \leq M/2^{N-1} < \varepsilon$, ce qui montre notre affirmation que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy et, par la suite, convergente.

Si $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, alors $a \in A'$. En effet, on sait que les nombres a_n sont tous différents, alors au plus un de ces nombres est égal à a, soit a_{n_1}. Alors la sous-suite $\{a_n\}_{n>n_1}$ consiste en éléments de $A \setminus \{a\}$ et sa limite est un point d'accumulation de A, d'après la proposition A.9(b). Ceci montre l'existence d'un point d'accumulation de A et conclut la démonstration. □

Corollaire A.12. *Si la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est bornée, alors elle possède une sous-suite convergente.*

Démonstration. Si l'ensemble $A := \{a_n : n \geq 1\}$ est fini, il existe $a \in A$ tel que $a = a_n$ pour une infinité d'indices n. Alors, la sous-suite $(a_n)_{n\geq 1,\, a_n = a}$ est évidemment convergente. Finalement, si A est un ensemble infini, alors A a un point d'accumulation selon le théorème de Bolzano-Weierstrass. Alors la proposition A.9(b) implique qu'il existe une suite de points de A (en particulier, une sous-suite de $(a_n)_{n\geq 1}$) qui converge vers ce point d'accumulation. Dans tous les cas, il existe une sous-suite de la $(a_n)_{n\geq 1}$ qui est convergente. $\square$

Théorème A.13 (Cantor)**.** *Supposons que* $\mathbb{R} \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq \cdots$, *où les ensembles* F_n, $n \geq 1$, *sont non-vides, fermés et bornés. Alors* $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

Démonstration. Pour tout $n \geq 1$, on choisit $a_n \in F_n \subseteq F_1$. Puisque F_1 est borné, alors $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite bornée. Donc le corollaire A.12 implique qu'elle a une sous-suite $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ convergente. On affirme que $a := \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$ appartient à $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Soit $k \geq 1$. On sait que $a_{n_\ell} \in F_{n_\ell} \subseteq F_{n_k}$, pour tout $k \geq \ell$. Puisque F_{n_k} est fermé et le nombre a est la limite de la suite $(a_{n_\ell})_{\ell\geq k}$, alors $a \in F_{n_k}$, d'après la proposition A.6. Alors, $a \in F_{n_k} \subseteq F_m$, pour tout $m \leq n_k$. Puisque c'est vrai pour tout $k \geq 1$ et la suite $n_k \to \infty$, alors $a \in \bigcap_{m=1}^{\infty} F_m$, comme affirmé. En particulier, $\bigcap_{m=1}^{\infty} F_m \neq \emptyset$. $\square$

Recouvrements

Définition A.14. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. Si la collection d'ensembles $\mathcal{C} = \{V_i : i \in I\}$ a la propriété que $\bigcup_{i\in I} V_i \supseteq A$, alors on dit que $\mathcal{C}$ **couvre** A. Aussi, on appel $\mathcal{C}$ un **recouvrement** de A. Finalement, si les ensembles V_i sont ouverts, alors on appel $\mathcal{C}$ un **recouvrement ouvert** de A. $\square$

Proposition A.15 (Lindelöff)**.** *Soit* $A \subseteq \mathbb{R}$. *Si* $\{V_i : i \in I\}$ *est un recouvrement ouvert de* A, *alors il existe* $J \subseteq I$ *dénombrable tel que* $\{V_j : j \in J\}$ *est également un recouvrement de* A.

Démonstration. On considère la collection d'intervalles $\mathcal{Q} = \{(p, q) : p, q \in \mathbb{Q},\ p < q\}$, qui est une collection dénombrable. On considère aussi la sous-collection

$$\tilde{\mathcal{Q}} = \{(p, q) \in \mathcal{Q} : \exists i \in I \text{ tel que } (p, q) \subseteq V_i\}.$$

Pour chaque intervalle $(p, q) \in \tilde{\mathcal{Q}}$, on choisit $i_{p,q} \in I$ tel que $(p, q) \subseteq V_{i_{p,q}}$ et on pose

$$J = \{i_{p,q} : (p, q) \in \tilde{\mathcal{Q}}\}.$$

On affirme que $\bigcup_{j\in J} V_j \supseteq A$. En effet, si $a \in A$, alors il existe $i \in I$ tel que $a \in V_i$. Puisque V_i est ouvert, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq V_i$. On prend $p \in \mathbb{Q} \cap (a - \varepsilon, a)$ et $q \in (a, a + \varepsilon)$, pour que $a \in (p, q) \subseteq V_i$. Donc $(p, q) \in \tilde{\mathcal{Q}}$, ce qui implique que $(p, q) \subseteq V_{i_{p,q}}$. Donc $a \in V_{i_{p,q}} \subseteq \bigcup_{j\in J} V_j$, ce qui montre notre affirmation que $A \subseteq \bigcup_{j\in J} V_j$. $\square$

Ensembles compacts

Définition A.16. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. On dit que A est un ensemble compact si, pour chaque collection $\{V_i : i \in I\}$ qui est un recouvrement ouvert de A, alors il existe $J \subseteq I$, J fini, tel que $\{V_i : i \in I\}$ couvre A également. $\square$

Théorème A.17. *Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(a) L'ensemble A est compact.

(b) L'ensemble A est fermé et borné.

(c) Chaque suite $(a_n)_{n\geq 1}$ de points de A a une sous-suite $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ qui converge vers un point de A.

Démonstration. $(a) \Rightarrow (b)$: Supposons que A est compact. On a que A est borné. En effet, la collection $\{(a-1, a+1) : a \in A\}$ couvre A, donc il existe $a_1, \dots, a_n \in A$ tels que $\bigcup_{i=1}^{n}(a_i - 1, a_i + 1) \supseteq A$. Par la suite, pour tout $a \in A$, on a que $|a| \leq M := 1 + \max_{1\leq i\leq n} |a_i|$, c'est-à-dire $A \subseteq [-M, M]$. Puis, on montre que A est fermé. D'après le corollaire A.10, il suffit de montrer que si une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ de points de A converge à un point x, alors $x \in A$ également. Supposons, au contraire que $x \notin A$. Si $\delta_n = |x - a_n| > 0$, alors

$$\mathcal{C} := \{(-\infty, x - \delta_n) \cup (x + \delta_n, +\infty) : n \geq 1\}$$

est un recouvrement ouvert de A. Cependant, il n'y pas de sous-collection finie de $\mathcal{C}$ qui couvre aussi A parce que, pour tout $\delta > 0$, il existe $n \geq 1$ tel que $a_n \in [x - \delta, x + \delta]$ et, par la suite, $A \cap [x - \delta, x + \delta] \neq \emptyset$. C'est une contradiction à la compacité de A. Alors il faut que $x \in A$, comme voulu.

$(b) \Rightarrow (c)$: Supposons que A est fermé et borné et soit une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de A. Puisque A est borné, alors la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est également bornée. Donc le corollaire A.12 implique qu'il existe une sous-suite $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ qui converge vers un nombre $x \in \mathbb{R}$. Finalement, on observe que $x \in A$ selon le corollaire A.10, car A est fermé.

$(c) \Rightarrow (b)$: Supposons que chaque suite $(a_n)_{n\geq 1}$ de points de A a une sous-suite $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ qui converge vers un point de A. On veut montrer que A est fermé et borné. D'abord, on montre que A est fermé. En effet, si $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers un nombre $x \in \mathbb{R}$, alors il existe une sous-suite $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ qui converge vers un point de A. Mais évidemment on a que $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = x$ et, par la suite, $x \in A$. Puis on montre que A est borné. Sinon, il existait une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de A telle que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$. Mais cette suite ne possède pas de sous-suite convergente, ce qui est une contradiction. Alors A est borné, comme désiré.

$(b) \Rightarrow (a)$: Supposons que A est borné et fermé. On veut montrer que A est compact. Soit $\{V_i : i \in I\}$ un recouvrement ouvert de A. D'après la proposition A.15, il existe $J \subseteq I$ dénombrable tel que $\{V_j : j \in J\}$ est aussi un recouvrement ouvert de A. On veut trouver un ensemble fini $J' \subseteq J$ tel que $\bigcup_{j\in J'} V_j \supseteq A$. Soit $J = \{j_1, j_2, \dots\}$. Il suffit de trouver $N \geq 1$ tel que $\bigcup_{n=1}^{N} V_{j_n} \supseteq A$. Supposons, au contraire, que ce n'est pas vrai. Donc pour chaque $N \geq 1$, l'ensemble

$$F_N := A \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{N} V_{j_n}\right) = A \cap V_{j_1}^c \cap \cdots V_{j_N}^c$$

est non-vide. De plus, F_N est fermé, d'après les lemmes A.6 et A.8 et F_N est borné car il est un sous-ensemble de A. Finalement, c'est clair que $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$. Alors le théorème A.13

implique que $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$. C'est une contradiction car

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = A \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_{j_n} \right) = A \setminus \left(\bigcup_{j \in J} V_j \right) = \emptyset.$$

Donc il doit exister $N \geq 1$ tel que $W_N \supseteq A$, ce qui conclut la démonstration que A est compact. □

Corollaire A.18. *L'intervalle ouvert* $[a, b]$ *est compact.*

Continuité

Théorème A.19. *Si* K *est compact et la fonction* $f : K \to \mathbb{R}$ *est continue, alors* f *est uniformément continue.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Pour chaque $x \in K$, il existe $\delta_x > 0$ such that $|f(y) - f(x)| < \varepsilon/2$ quand $|y - x| < \delta_x$. La collection $\{(x - \delta_x/2, x + \delta_x/2 : x \in K\}$ est un recouvrement ouvert de K. Donc il existe $x_1, \ldots, x_n \in K$ tels que $\bigcup_{i=1}^{n}(x_i - \delta_{x_i}/2, x + \delta_{x_i}/2) \supseteq K$. Soit $\delta = \min\{\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_n}\}$. Supposons que $|x - y| < \delta$. On a que $x \in (x_i - \delta_{x_i}/2, x + \delta_{x_i}/2)$ pour un $i \in \{1, \ldots, n\}$. Alors

$$|x - x_i| < \delta_{x_i}/2 \leq \delta_{x_i}$$

et

$$|y - x_i| = |y - x + x - x_i| \leq |y - x| + |x - x_i| < \delta + \delta_{x_i}/2 \leq \delta_{x_i}.$$

Donc

$$|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad |f(y) - f(x_i)| < \varepsilon/2,$$

ce qui implique que

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(x_i) + f(x_i) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

comme voulu. □

Annexe B

Nombres complexes

De façon informelle, [1] l'ensemble des nombres complexes est donné par

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\},$$

avec la convention que $i^2 = -1$. On peut ajouter et multiplier deux nombres complexes :

$$(x + iy) + (u + iv) := (x + u) + i(y + v) \quad \text{et} \quad (x + iy) \cdot (u + iv) := (xu - yv) + i(xv + yu).$$

La deuxième formule est motivée comme suivant :

$$\begin{aligned}(x + iy) \cdot (u + iv) &= x(u + iv) + iy(u + iv) = xu + ixv + iyu + i^2yv \\ &= xu + ixv + iyu - yv = (xu - yv) + i(xv + yu).\end{aligned}$$

Toutes les propriétés habituelles algébriques sont préservés (associativité, commutativité, distributivité, etc). Les nombres réels sont un sous-ensemble des nombres complexes, puisque $x = x + i0 \in \mathbb{C}$, pour chaque $x \in \mathbb{R}$. [2]

Notions de base

Si $z = x + iy$ est un nombre complexe, on appelle x et y sa **partie réelle** et sa **partie imaginaire**, respectivement, et on les note par

$$x = \mathrm{Re}(z) \quad \text{et} \quad y = \mathrm{Im}(z).$$

C'est facile à verifier que si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $z, w \in \mathbb{C}$, alors

$$\mathrm{Re}(\alpha z + \beta w) = \alpha \mathrm{Re}(z) + \beta \mathrm{Re}(w) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(\alpha z + \beta w) = \alpha \mathrm{Im}(z) + \beta \mathrm{Im}(w).$$

1. On peut faire la définition de $\mathbb{C}$ plus rigoureuse : on considère $\mathbb{R}^2$ muni de deux opérations suivantes : $(x, y)+(u, v) := (x+u, y+v)$ et $(x, y)\cdot(u, v) := (x, y+v)$. Si on utilise la notation *formelle* $x+iy := (x, y)$, alors on a que $i = 0+i\cdot 1 = (0, 1)$ et donc $(0, 1)^2 = (0, 1)\cdot(0, 1) = (0\cdot 0-1\cdot 1, 0\cdot 1+0\cdot 1) = (-1, 0) = -1+0i = -1$.

2. La raison historique pour l'introduction de $\mathbb{C}$ a été la résolution d'équations polynomiales. Par exemple, l'équation $x^2+1 = 0$, qui n'a pas de solutions sur $\mathbb{R}$, a exactement deux solutions sur $\mathbb{C}$: les nombres complexes i et $-i$. En général, chaque equation polynomiale $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ avec $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, a exactement n solutions sur $\mathbb{C}$ (si on compte les solutions avec leur « multiplicité »).

En particulier,

$$\mathrm{Re}(z \pm w) = \mathrm{Re}(z) \pm \mathrm{Re}(w) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z \pm w) = \mathrm{Im}(z) \pm \mathrm{Im}(w).$$

Le **conjugué** d'un nombre complexe $z = x + iy$ est défini par

$$\overline{z} := x - iy.$$

On voit directement que

$$z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z) \quad \text{et} \quad z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z).$$

Puisque $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $y = \mathrm{Im}(z) = 0$, alors on trouve que

$$z \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{z} = z.$$

Finalement, c'est facile à voir que la conjugaison respecte l'addition et la multiplication :

$$\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w} \quad \text{et} \quad \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}.$$

On peut penser aux nombres complexes comme vecteurs sur le plan euclidien, c'est-à-dire comme éléments de $\mathbb{R}^2$: le nombre complexe $x + iy$ correspond au vector (x, y). Donc, on peut considérer leur module comme vecteurs, qui mesure leur distance de l'origine. Plus précisément, si $z = x + iy$ est un nombre complexe, alors on définit son module

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

On a l'inégalité triangulaire :

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

De plus, le module est une fonction multiplicative :

$$|zw| = |z| \cdot |w|$$

et on a que

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z} \quad \text{implies} \quad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

La topologie de $\mathbb{C}$

Si $(z_n)_{n \geq 1}$ est une suite de nombres complexes, alors on écrit $z_n = a_n + ib_n$ et on considère les suites de nombres réels $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$. On écrit

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

prévu que les séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent. En particulier, on a que

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}(z_n) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}(z_n).$$

On dit que la série $\sum_{n \geq 1} z_n$ *converge absolument* si la série (de nombres réels non-negatifs) $\sum_{n \geq 1} |z_n|$ converge. Dans ce cas, on peut en déduire que les séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent et, par conséquent, que la somme infinie $\sum_{n \geq 1} z_n$ est bien définie.

Dérivation et intégration de fonctions à valeurs complexes

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est une fonction avec $g = \text{Re}(f)$ et $h = \text{Im}(f)$. On définit sa dérivé en x_0 comme la limite

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Si $g := \text{Re}(f)$ et $h := \text{Im}(f)$ sont dérivables en x_0, alors f l'est aussi et on a la relation

$$f'(x_0) = g'(x_0) + ig'(x_0).$$

Finalement, si g' et h' existent [3] et sont intégrables selon Riemann sur $[a, b]$, alors

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b g'(x)\mathrm{d}x + i\int_a^b h'(x)\mathrm{d}x \\ &= g(b) - g(a) + i(h(b) - h(a)) \\ &= f(b) - f(a).\end{aligned}$$

Si $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est une fonction, alors on considère les fonctions $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$, définies par

$$g(x) = \text{Re}(f(x)) \quad \text{et} \quad h(x) = \text{Im}(f(x)) \quad (a \leq x \leq b),$$

pour que $f(x) = g(x) + ih(x)$. (Parfois, on utilise la notation $g = \text{Re}(f)$ et $h = \text{Im}(f)$.) Si $g, h \in \mathcal{R}^*([a, b])$, alors on dit que $f \in \mathcal{R}^*([a, b])$ et on pose

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \int_a^b g(x)\mathrm{d}x + i\int_a^b h(x)\mathrm{d}x.$$

En particulier, on a que

$$\text{Re}\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right) = \int_a^b \text{Re}(f(x))\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \text{Im}\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right) = \int_a^b \text{Im}(f(x))\mathrm{d}x$$

3. Comme d'habitude, on définit la dérivée d'une fonction aux limites a et b en prenant les limites à gauche ou à droite, comme nécessaire.

Bibliographie

[1] T. M. Apostol, *Mathematical analysis.* Second edition. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1974.

[2] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis.* Third edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, 1976.

[3] J. R. Kirkwood, *An Introduction to Analysis.* The Prindle, Weber & Schmidt Series in Mathematics. PWS-KENT Publishing Co., Boston, MA, 1989.

[4] H. L. Montgomery, *Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis.* CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 84. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC ; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.