DIMITRIS KOUKOULOPOULOS
UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
CHAIRE FONDATION COURTOIS

APPROXIMATIONS DE NOMBRES IRRATIONELS PAR DES NOMBRES RATIONELS

COURS #1

ÉCOLE LANGLANDS, CRM

23-24 AOÛT 2021

LES NOMBRES NON-DITS

> En grec, les nombres irrationels sont appelés «ἄρρητοι» qui veut dire littéralement «non-dits»

Les ***Pythagoriens*** croyait que

- «Le nombre est le principe de toute chose, et chaque nombre est associé à une figure» (Wikipedia)
- Tous les nombres sont «commensurables»

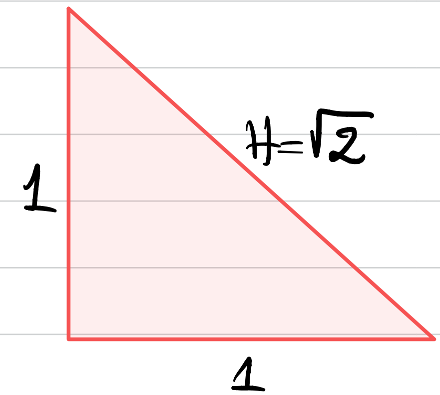
↳ multiples entiers par rapport à une unité commune.

La deuxième croyance a été brisée par la découverte des nombres irrationels (Hippasse?)

> «Petits meurtres entre mathématiciens» par T. Michaelides

UNE DESCENTE INFINIE

$H :=$ hypoténuse : $H^2 = 1^2 + 1^2 = 2$



$\boxed{\text{Théorème : } H \text{ est irrationel}}$

Preuve : Sinon, $\sqrt{2} = a/b \Rightarrow 2b^2 = a^2$

$\Rightarrow a$ pair, disons $a = 2a_1 \Rightarrow 2b^2 = 4a_1^2 \Rightarrow b^2 = 2a_1^2$

$\Rightarrow b$ pair, disons $b = 2b_1 \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$

Répetons une infinité de fois $\rightsquigarrow$ Contradiction!

LE PARADIS DE CANTOR

$\mathbb{Q}$ = ensembles de rationels

Thm 1 : $\mathbb{Q}$ est dénombrable

i.e. il existe une énumeration de tous les rationels

$$\begin{array}{ccccccc}
-\frac{3}{4} & -\frac{2}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{0}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} \\[6pt]
-\frac{3}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{0}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} \\[6pt]
-\frac{3}{2} & -\frac{2}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{0}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} \\[6pt]
-\frac{3}{1} & -\frac{2}{1} & -\frac{1}{1} & \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1}
\end{array}$$

$\mathbb{R}$ = ensemble de réels

Thm 2 : $\mathbb{R} \neq$ dénombrable

$$\left.\begin{array}{l}
x_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\cdots \\
x_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\cdots \\
x_3 = 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\cdots \\
x_4 = 0.a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}\cdots
\end{array}\right\}\ \text{énumeration de } [0,1[\,?$$

$x = 0.b_1b_2b_3\cdots$ où $b_j \neq a_{jj}$ n'est pas dans la liste

ESPÈCES DE NOMBRES

rationels: $\mathbb{Q}$ les fractions ou, de façon équivalente, les nombres réels dont le développement décimal est fini ou éventuellement périodique

Exemples: $1/2$, $1/7$, $0.\overline{127}$

irrationels: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ les "non-fractions" $\Leftrightarrow$ les nombres ayant un dev. décimal infini et non-périodique.

Exemples: $\sqrt{2}$, π, e, $0.101001000100001000000\ldots$

algébriques: $\mathbb{A} \supseteq \mathbb{Q}$ les racines d'équations polynômiales à coeffs entiers

Exemples: $\sqrt{2}$, $\dfrac{3^{1/5}+2^{1/7}}{5^{1/2}+5^{1/3}}$

$x^2-2=0$

$x=\frac{a}{b} \rightsquigarrow ax-b=0$

transcendantaux: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ les nombres non-algébriques

Exemples: e, π. Conjecture: $\pi+e$

périodes: $\mathbb{P} \supseteq \mathbb{A}$ les valeurs d'intégrales "$\int\cdots\int_\Omega f(\vec{x})\,d\vec{x}$" convergent absolument, avec f, Ω "algébriques"

Exemples: $\pi = \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2}$, $\log 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}dx$, $\sqrt{2} = \int_{0 \le x^2 \le 2} 1\,dx$.

Conjecture: $e, \frac{1}{\pi} \notin$ périodes

ENSEMBLES GRANDS MAIS PEU COMPRIS

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{A}_{\text{réels}} \subseteq \mathbb{P}_{\text{réeles}} \subseteq \mathbb{R}.$$

dénombrables ; non-denombrable

Problèmes fameux ouverts

① M.Q. γ est irrationel $\gamma = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log N\right)$

② M.Q. e, $\frac{1}{\pi}$ ne sont pas de périodes

③ M.Q. $\pi + e$ est transcendental.

PRINCIPE: Souvent, il est facile de m.q. un ensemble E est «grand», mais difficile de m.q. un nombre donné (e.g. π) est dans E!

MÉTHODE DE PREUVE: $E = A \setminus B$, où A «grand», B «petit».

Cantor: Cardinalité ; Lebesgue: mesure (longueur)

APPROXIMATION DIOPHANTIENNE

Nombres irrationels : complexité infinie typiquement (dev. déc. infinie & non-périodique)

Nombres rationels : complexité finie
↓
mesurée par la taille du numérateur et du dénominateur.

Pour nous : $0 \leq \frac{a}{q} \leq 1$, donc $\mathrm{Cplx}\left(\frac{a}{q}\right) \to q$.

[D'autres considérations possibles : complexité computationelle de Kolmogorov, etc.]

Question Fondamentale : Étant donné un irrationel x et une marge d'erreur $\delta > 0$, trouver $\frac{a}{q}$ de cplxté minimale t.q.

$$\left| x - \frac{a}{q} \right| < \delta.$$

LE DÉVELOPPEMENT DÉCIMAL

$$\pi = 3.141592653589793238462643383279\ldots$$

① $\pi \approx 3.14 = \dfrac{314}{100} = \dfrac{157}{50}$ $\qquad \left|\pi - \dfrac{157}{50}\right| = 0.015\ldots$

② $\pi \approx 3.141592 = \dfrac{3141592}{10^6} = \dfrac{392699}{2^3 5^6}$

$$\left|\pi - \frac{392699}{2^3 5^6}\right| = 10^{-7} \times 6.535\ldots$$

③ En général, si on utilise n digits

$$\pi \approx \frac{a_n}{q_n} \quad \text{où} \quad q_n \approx 10^n \quad \text{et} \quad \left|\pi - \frac{a_n}{q_n}\right| \approx \frac{1}{10^n} \approx \frac{1}{q_n}.$$

---

④ $\dfrac{22}{7} = 3.14\overline{285714}$ $\qquad \left|\pi - \dfrac{22}{7}\right| = 0.01264\ldots$

⑤ $\dfrac{355}{113} = 3.14159\overline{92}$ $\qquad \left|\pi - \dfrac{355}{113}\right| = 10^{-7} \times 2.667\ldots$

LE THÉORÈME DE DIRICHLET

Théorème (Dirichlet, 1834) Soit $Q \geq 1$ un entier et x un réel. Alors, il existe une fraction réduite $\frac{a}{q}$ t.q. $1 \leq q \leq Q$ et $\left|x - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{qQ}$ $\leq 1/q^2$

Corollaire: Si x est irrationel, alors il existe une infinité de fractions réduites $\frac{a}{q}$ t.q. $\left|x - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}$.

Preuve du Cor: Appliquons le thm avec $Q_1 = 10$: $\left|x - \frac{a_1}{q_1}\right| \leq \frac{1}{q_1 Q_1} \leq \frac{1}{q_1^2}$

Prenons $Q_2 \geq Q_1$ t.q. $\frac{1}{Q_2} < \left|x - \frac{a_1}{q_1}\right|$ (possible car $x \neq \frac{a_1}{q_1}$).

Trouvons $\frac{a_2}{q_2}$ t.q. $\left|x - \frac{a_2}{q_2}\right| \leq \frac{1}{q_2 Q_2}$

$$\Rightarrow \left|x - \frac{a_2}{q_2}\right| < \left|x - \frac{a_1}{q_1}\right| \quad \& \quad \left|x - \frac{a_2}{q_2}\right| \leq \frac{1}{q_2^2}.$$

donc $\frac{a_1}{q_1} \neq \frac{a_2}{q_2}$

Etc… $\blacksquare$

PREUVE DU THÉORÈME DE DIRICHLET

Théorème (Dirichlet, 1834) Soit $Q \geq 1$ un entier et x un réel. Alors, il existe une fraction réduite $\frac{a}{q}$ t.q. $1 \leq q \leq Q$ et $\left|x - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{qQ}$.

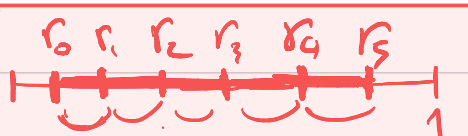
Preuve: $\left|x - a/q\right| \leq 1/qQ \iff |qx - a| \leq \frac{1}{Q}$.

Considerons les $Q+1$ nombres $0 \cdot x, 1 \cdot x, 2 \cdot x, \dots, Q \cdot x$

$\forall j, \quad jx = n_j + r_j$ où $n_j \in \mathbb{N}$, $0 \leq r_j < 1$.

Donc, on a $Q+1$ nombres dans $[0,1)$: $r_0, r_1, r_2, \dots, r_Q$.

$\Rightarrow \exists\ 1 \leq j_1 < j_2 \leq Q$ t.q. $|r_{j_2} - r_{j_1}| < \frac{1}{Q} \Rightarrow \cdots \Rightarrow |qx - a| < \frac{1}{Q}$



si chaque longueur était $\geq 1/5$, on aurait que $r_5 - r_0 \geq 1$ ↯

où a/q est la version réduite de $\frac{n_{j_2} - n_{j_1}}{j_2 - j_1}$ (donc $q \leq j_2 - j_1 \leq Q$).

FRACTIONS CONTINUES

① $\pi = 3{,}14\ldots = 3 + r_1 \rightsquigarrow \pi \approx 3 \quad , \quad 0 < r_1 < 1$

② $\dfrac{1}{r_1} = 7{,}0625\ldots = 7 + r_2 \rightsquigarrow \pi = 3 + \dfrac{1}{7 + r_2} \approx 3 + \dfrac{1}{7} = \dfrac{22}{7}$

③ $\dfrac{1}{r_2} = 15{,}996\ldots = 15 + r_3 \rightsquigarrow \pi \approx 3 + \dfrac{1}{7 + \frac{1}{15}} = \dfrac{333}{106}$

④ $\dfrac{1}{r_3} = 1{,}00341\ldots = 1 + r_4 \rightsquigarrow \pi \approx 3 + \dfrac{1}{7 + \dfrac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = \dfrac{355}{113}$

L'algorithme se généralise facilement $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$X \approx n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{\cdots + \frac{1}{n_k}}}} =: \frac{a_k}{b_k}$$

$$a_k = n_k a_{k-1} + a_{k-2}$$

$$b_k = n_k b_{k-1} + b_{k-2}$$

PROPRIÉTÉS DES FRACTIONS CONTINUES

$$X \approx n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{\cdots + \frac{1}{n_k}}}} =: \frac{a_k}{b_k} \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_k = n_k a_{k-1} + a_{k-2} \\ b_k = n_k b_{k-1} + b_{k-2} \end{array} \right\}$$

- $$\left| x - \frac{a_k}{b_k} \right| = \min \left\{ \left| x - \frac{a}{b} \right| : 1 \leq b \leq b_k,\ a \text{ entier} \right\}$$

- $$\frac{1}{2 b_k b_{k+1}} \leq \left| x - \frac{a_k}{b_k} \right| \leq \frac{1}{b_k b_{k+1}} < \frac{1}{b_k^2} \quad \leadsto \quad \left| x - \frac{a_k}{b_k} \right| \approx \frac{1}{b_k^2 n_{k+1}}$$

- Si $\left| x - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{2b^2}$ et $(a,b) = 1$, alors $\frac{a}{b} \in \left\{ \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots \right\}$

MESURE D'IRRATIONALITÉ

Thm : Si $x = n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cdots}}$ est t.q. les coeff's n_j sont uniformement bornés, alors $\exists c > 0$ t.q. $\left|x - \frac{a}{q}\right| \geq \frac{c}{q^2}$ $\forall a \in \mathbb{Z}$, $\forall q \in \mathbb{N}$.

Exemple : $x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}} \rightsquigarrow x = 1 + \frac{1}{x}$, $x > 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

Thm (Liouville) : Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $\forall \mu > 0$ l'inégalité $\left|x - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{q^\mu}$ a une infinité de solutions, alors x est transcendental.

Thm (Roth) : Soit $x \in \mathbb{R}$ algébrique. Alors, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists c = c_\varepsilon > 0$ t.q. $\left|x - \frac{a}{q}\right| \geq \frac{c}{q^{2+\varepsilon}}$ pour tous $a \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

MESURE D'IRRATIONALITÉ, CTD

Thm (Zeilberger, Zudilin 2020): Si $\mu = 7.103205334\ldots$, alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists c > 0$ t.q. $\left|\pi - \frac{a}{q}\right| \geq \frac{c}{q^{\mu+\varepsilon}}$.

Problème: Déterminer la valeur optimale de μ pour π et d'autres constantes fameuses.

On connait que $\mu(e) = 2$

Plus tard on vera que :

Thm (Khintchine): $\mu(x) = 2$ pour "presque tout" x.

Question: π se comporte comme un réel "typique" ou non ?

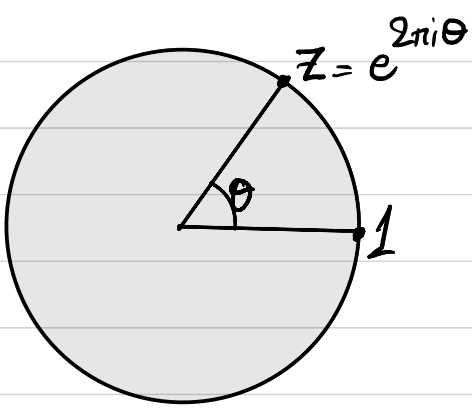
RESTRICTION DE DÉNOMINATEURS

Question Fondamentale Généralisée : Soit $D \subseteq \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$.
Trouver $q \in D$ minimal et $a \in \mathbb{Z}$ t.q. $\left|x - \frac{a}{q}\right| < \delta$.

Formulation alternative : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\|t\| := \mathrm{dist}(t, \mathbb{Z}) = \min\{|t-n| : n \in \mathbb{Z}\}$

La question devient donc : étant donné D, x, δ, trouver $q \in D$ t.q. $\|qx\| < \delta q$ $\left(\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } |qx - a| < \delta q\right)$.

Dirichlet : Si $D = \mathbb{N}$, alors $\displaystyle\min_{1 \leq q \leq Q} \|qx\| \leq 1/Q$.



$$\theta \to 2\theta \to 3\theta \to 4\theta \to \cdots$$

$$z \to z^2 \to z^3 \to z^4 \to \cdots$$

Répartition de $(z^k)_{k \in D}$ sur le cercle ?

DISTRIBUTION UNIFORME MOD 1

Question : Soit $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$. Quand est-il vrai que la suite est uniformément repartie mod 1, c-à-d :

$$\forall\, 0 \leq \alpha < \beta \leq 1, \quad \lim_{N \to \infty} \frac{\#\{1 \leq n \leq N : a_n \pmod 1 \in [\alpha, \beta]\}}{N} = \beta - \alpha \,?$$

Théorème (Weyl) : $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ est unif. repartie mod 1 s-si

$$\forall k \in \mathbb{Z} - \{0\}, \quad \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \cos(2\pi k a_n), \quad \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sin(2\pi k a_n) \to 0.$$

Exemples :

1. $(nx)_{n=1}^{\infty}$ unif. repartie $\Leftrightarrow$ x irrationel.
2. $(n^2 x)_{n=1}^{\infty}$ unif. répartie $\Leftrightarrow$ x irrationel
3. $(px)_{p \text{ premier}}$ unif. répartie $\Leftrightarrow$ x irrationel

vitesse de convergence dépend des approx. rationelles de x.

RESTRICTION DE DÉNOMINATEURS, CTD

Théorème (Zaharescu, 1995) Soit x irrationel, $\varepsilon > 0$.

1. $\exists$ une inf. de q t.q. $\|q^2 x\| \leq \frac{1}{q^{2/3-\varepsilon}}$
2. $\forall Q$, $\min_{1 \leq q \leq Q} \|q^2 x\| \leq \frac{1}{Q^{4/7-\varepsilon}}$.

Remarque: Exposant optimal 1 aux deux cas

Théorème (Matomäki, 2009) Soit x irrationel, $\varepsilon > 0$

$\exists$ une infinité de premiers p t.q. $\|px\| \leq \frac{1}{p^{1/3-\varepsilon}}$.

Remarque: Exposant optimal 1


SUWALLS
That's all Folks!