DIMITRIS KOUKOULOPOULOS
UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
CHAIRE FONDATION COURTOIS

APPROXIMATIONS DE NOMBRES IRRATIONELS PAR DES NOMBRES RATIONELS

COURS #2

ÉCOLE LANGLANDS, CRM

23-24 AOÛT 2021

APPROXIMATION DIOPHANTIENNE

Thm 1: Soit x irrationel.

Dirichlet: $\exists \infty$ $\frac{a}{q}$ t.q. $\left|x - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}$

Zaharescu: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \infty$ $\frac{a}{q^2}$ t.q. $\left|x - \frac{a}{q^2}\right| \leq \frac{1}{(q^2)^{4/3 - \varepsilon}}$

Conj: $\frac{4}{3} \to \frac{3}{2}$

Matomäki: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \infty$ $\frac{a}{p}$ t.q. $\left|x - \frac{a}{p}\right| \leq \frac{1}{p^{4/3 - \varepsilon}}$

Conj: $\frac{4}{3} \to 1$

Thm 2 (Roth) Si x est algébrique, alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists c = c_\varepsilon > 0$ t.q. $\left|x - \frac{a}{q}\right| \geq \frac{c}{q^{2+\varepsilon}}$ $\forall a, q$.

Thm 3 (Zeilberger-Zudilin): $\forall a, q$, $\left|\pi - \frac{a}{q}\right| \geq \frac{c}{q^{7.103\ldots}}$

APPROXIMATION DIOPHANTIENNE MÉTRIQUE

Philosophie: montrer des théorèmes qui sont vrais pour "presque tous" nombres réels.

Plus concrètement, si P est une propriété désirée, le but est de montrer que l'ensemble

$$E := \{x \in \mathbb{R} : x \text{ ne satisfait pas } P\}$$

est "petit".

Cantor: petit = dénombrable ; Lebesgue: petit = ensemble mesure nulle

Exemple: M.Q. pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a que l'inégalité $\left|x - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$ a qu'un nombre fini de solutions.

ENSEMBLES DE MESURE NULLE

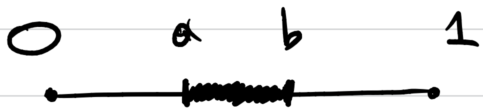
Définition: Soit $E \subseteq \mathbb{R}$. On dit que E a <u>mesure nulle</u> si $\forall \varepsilon > 0$, il est possible de couvrir E par une réunion d'intervalles $\bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j)$ t.q. $\sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) < \varepsilon$.

Théorème: Si $E \subseteq \mathbb{R}$ est dénombrable, alors il a mesure nulle.

Preuve: Soit $E = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. Fixons $\varepsilon > 0$.
Clairement, E est couvert par les intervalles $\left(x_j - \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}, x_j + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\right)$ dont la longueur totale est $\leq \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon/2^j = \varepsilon$. $\blacksquare$

Théorème: Il existe d'ensembles de mesure nulle qui sont non-dénombrables.

UN POINT DE VUE PROBABILISTE



Soit $[a,b] \subseteq [0,1]$.

- Si on choisit $x \in [0,1]$ uniformément au hasard, la probabilité qu'il se trouvera dans $[a,b]$ est $\frac{b-a}{1-0} = b-a$.

- Si $E \subseteq [0,1]$, alors la probabilité qu'un tel x se trouvera dans E est 0.

- <u>Explication</u>: $\forall \varepsilon > 0$, $E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j)$ t.q. $\sum (b_j - a_j) < \varepsilon$

$$\mathrm{Prob}(x \in E) \leq \mathrm{Prob}\Big(x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j)\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) < \varepsilon$$

LA MESURE DE LEBESGUE

Lebesgue a construit une fonction-longueur $\lambda : \mathcal{M} \longmapsto \mathbb{R}_{\geq 0}$ t.q.

① $\mathcal{M}$ est un ensemble de certains «bons» ensembles de nombres réels :

$\mathcal{M}$ contient les intervalles, les ensembles de mesure nulle, et il est fermé par rapport aux complements et aux réunions dénombrables.

② $\lambda([a,b]) = b - a$

③ Si $E \subseteq F$, alors $\lambda(E) \leq \lambda(F)$

④ Si $E_1, E_2, \ldots$ sont mutuellement disjoints, alors $\lambda\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(E_j)$.

Note : λ formalise l'idée intuitive de "choisir x unif. au hasard".
$\text{Prob}(x \in E \mid x \in [0,1]) = \lambda(E)$.

LE THÉORÈME DE KHINTCHINE

Théorème (Khintchine, 1924): Soit $(\Delta_q)_{q=1}^{\infty}$ une suite t.q. $q\Delta_q \searrow$.

Considérons $K = \{x \in \mathbb{R} : \exists \infty\ a,q \text{ t.q. } |x - a/q| \le \Delta_q\}$.

(a) Si $\sum_q q\Delta_q < +\infty$, alors K a mesure nulle
presque aucun x n'est approximable

(b) Si $\sum_q q\Delta_q = +\infty$ alors $\mathbb{R}\setminus K$ a mes. nulle.
presque chaque x est approximable

Corollaire: Soit $\varepsilon > 0$.

(a) Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $\exists \infty\ a,q$ t.q. $|x - a/q| \le 1/q^2(\log q)^{1-\varepsilon}$.

(b) Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, il y a qu'un nombre fini de a,q t.q. $|x - \frac{a}{q}| \le \frac{1}{q^2(\log q)^{1+\varepsilon}}$

Question: Est-ce que π se comporte comme un nombre réel typique ou atypique?

UNE SUITE D'ESSAIS

▶ Exécutons une suite d'essais : $E_1, E_2, E_3, \ldots$

P.ex. : E_1 = lancer une pièce juste

E_2 = choisir 10 habitants de Montréal au hasard et mesurer leur grandeur.

Note : il est possible que les résultats de $E_1, E_2, \ldots$ soient interdépendants (p. ex. si E_1 = face, tous les habitants de E_2 seront femmes)

▶ Pour chaque essai E_j, considérons R_j, un sous-ensemble de tous les résultats possibles.

P.ex. R_1 = la pièce tombe sur le côté "face"

R_2 = tous les 10 habitants ont grandeur > 6'

Question : Combien de R_j vont arriver

KHINTCHINE D'UN POINT DE VUE PROBABILISTE

RAPPEL : $K = \{x\in\mathbb{R} : \exists \infty\ a,q \text{ t.q. } |x - a/q| \le \Delta_q\}$.

↳ ensemble 1-périodique

Remarque : Si $x\in\mathbb{R}$, alors $x+n\in\mathbb{R}$ $\forall n\in\mathbb{Z}$:

$$|x-a/q| = \left|x+n - \frac{(a+nq)}{q}\right|$$

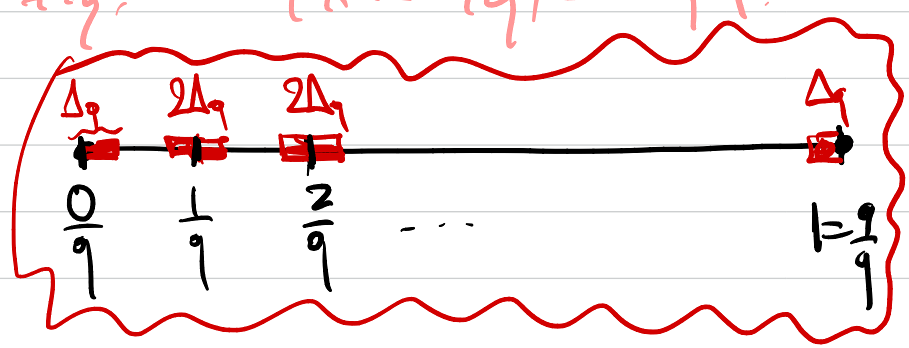
Donc $K = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (K_1+n)$, où $K_1 := K\cap[0,1]$.

- $\forall q$, considérons l'essai E_q qui choisit $x\in[0,1]$ uniformément au hasard et trouvons a t.q. $|x-\frac{a}{q}| =$ minimal.
- R_q est l'événement que $|x-\frac{a}{q}| \le \Delta_q$.

$R_q = \{x\in[0,1] : \exists a\in\mathbb{Z} \text{ t.q. } |x-a/q|\le\Delta_q\}$.

- $\mathrm{Prob}(R_q) = \dfrac{\lambda(R_q)}{\lambda([0,1])} = 2q\Delta_q$

↑ si $\Delta_q \le 1/2q$



LES LEMMES DE BOREL-CANTELLI

Théorème: Soit $A_1, A_2, \ldots$ une suite d'événements (résultats d'essais)

(a) Si $\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{Prob}(A_j) < +\infty$, alors presque sûrement le nombre de A_j qui arrivent est fini.

(b) Si les A_j sont mutuellement indépendents et $\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{Prob}(A_j) = +\infty$, alors presque sûrement le nombre de A_j qui arrivent est infini.

Dans Khintchine, $K = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (K_1 + n)$, où

$K_1 = \{x \in [0,1] :$ une infinité de R_q arrivent$\}$ avec

$R_q = \{x \in [0,1] : \exists a$ t.q. $|x - \frac{a}{q}| \leq \Delta_q\}$ de Prob. $2q\Delta_q$.

$\boxed{\text{Théorème BC(a)} \implies \text{Khintchine (a)}.}$

BOREL-CANTELLI SANS INDEPENDENCE

▶ Problème : les événements $R_q = \{x \in [0,1] : \exists a \text{ t.q. } |x - \frac{a}{q}| \leq \Delta_q\}$ ne sont pas indépendants.

$\lambda(R_{q_1} \cap R_{q_2}) \overset{?}{=} \lambda(R_{q_1})\lambda(R_{q_2})$

▶ Khintchine (1924) : ils sont assez "quasi-independants" pour que le principe de Borel-Cantelli tienne sous la condition que $q\Delta_q \searrow$.

▶ Si $q\Delta_q \searrow$, alors $\Delta_1 \geq 2\Delta_2 \geq 3\Delta_3 \geq \cdots \geq 0$. Donc :

- soit $\exists q_0$ t.q. $\Delta_{q_0} = 0 \Rightarrow \Delta_q = 0 \ \forall q \geq q_0 \Rightarrow K = \mathbb{Q}$
- ou $\Delta_q > 0 \ \forall q \geq 1$ (i.e. impossible de restreindre les dénominateurs)

▶ Duffin-Schaeffer (1941) : si on enlève la condition $q\Delta_q \searrow$, il est possible de construire Δ_q t.q.

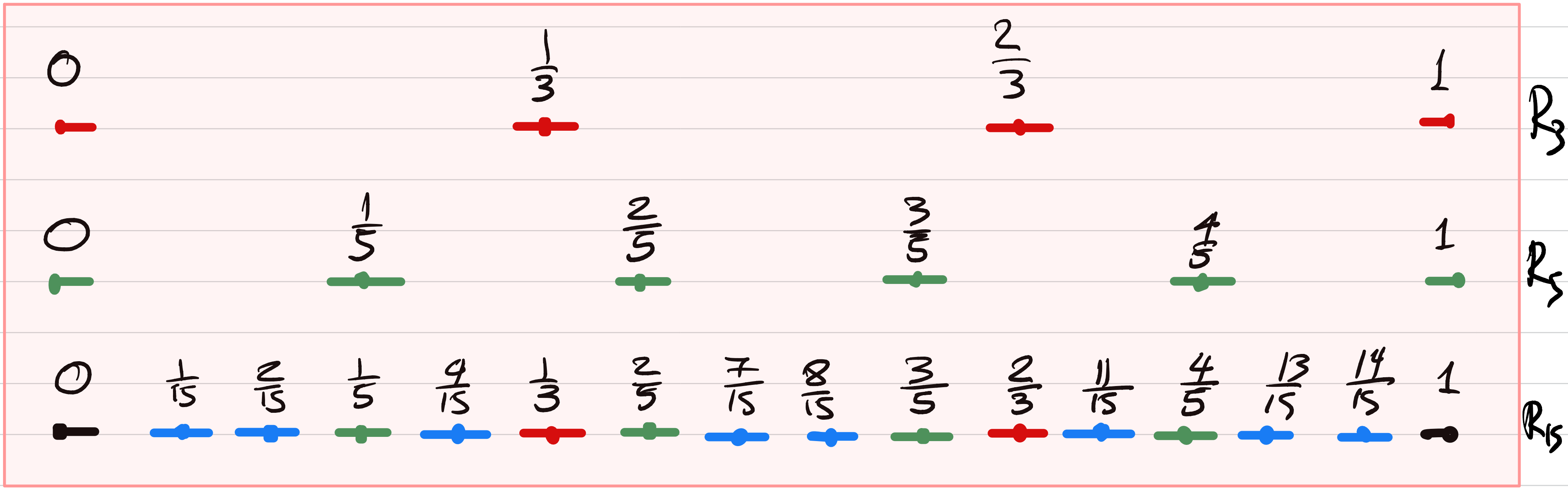
① $\sum q\Delta_q = +\infty$

② $\lambda(K) = 0$

} violation du principe de Borel-Cantelli !

LA CONSTRUCTION DE DUFFIN-SCHAEFFER

Idée : $\frac{a}{q} = \frac{ma}{mq} \quad \forall m \geq 1.$



$R_3, R_5 \subseteq R_{15}$ $\rightsquigarrow$ beaucoup de $\left\{\begin{array}{l}\text{redondance}\\ \text{interdépendence}\end{array}\right\}$

LA CONJECTURE DE DUFFIN-SCHAEFFER

Conjecture (Duffin-Schaeffer, 1941): Soient $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots \geq 0$.
Considérons $A = \{x \in [0,1] : \exists \infty \ \frac{a}{q}$ réduites t.q. $|x - \frac{a}{q}| \leq \Delta_q\}$

(a) Si $\sum_q \phi(q) \Delta_q < +\infty$, alors $\lambda(A) = 0$. (presque aucun x n'est approximable)

(b) Si $\sum_q \phi(q) \Delta_q = +\infty$, alors $\lambda(A) = 1$. (presque chaque x est approximable)

Notes: ① $\phi(q) = \#\{0 \leq a < q : \text{pgcd}(a,q) = 1\}$
$$= q \cdot \prod_{p|q \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \quad \text{(inclusion-exclusion)}.$$

② Borel-Cantelli (a) $\Longrightarrow$ Duffin-Schaeffer (a)

$A_q = \{x \in [0,1] : \exists a$ copremier avec q t.q. $|x - a/q| \leq \Delta_q\}$. $\rightsquigarrow \lambda(A_q) = 2\phi(q)\Delta_q$ (si $\Delta_q \leq 1/2q$

LA GÉNÉRALISATION CORRECTE DE KHINTCHINE

Conjecture (Catlin): Soient $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ et $\Delta_q^* = \sup\{\Delta_q, \Delta_{2q}, \Delta_{3q}, \dots\}$

Considérons $K = \{x \in \mathbb{R} : \exists \infty\ a, q$ t.q. $|x - \frac{a}{q}| \leq \Delta_q\}$.

(a) Si $\sum \phi(q) \Delta_q^* < +\infty$, alors $\lambda(K) = 0$.

(b) Si $\sum \phi(q) \Delta_q^* = +\infty$, alors $\lambda(\mathbb{R} \setminus K) = 0$.

Remarque: $K \setminus \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \exists \infty\ \frac{a}{q}$ réduites t.q. $|x - \frac{a}{q}| \leq \Delta_q^*\}$.

↳ (en supposant que $\underbrace{\Delta_q \leq \frac{1}{2q} \quad \forall q}$)

Donc, DS $\Longrightarrow$ Catlin.

UNE VERSION FRACTALE DE DS

$$A = \left\{ x \in [0,1] : \exists \infty \ \tfrac{a}{q} \text{ réduites t.q. } \left| x - \tfrac{a}{q} \right| \leq \Delta_q \right\}$$

- Si $\sum \phi(q) \Delta_q < +\infty$, alors $\lambda(A) = 0$.

Question : dim Hausdorff de A = ?

- $S = \blacksquare$ (carré) : $\lambda(S \cap B(x,\varepsilon)) \approx \text{cst} \cdot \varepsilon^2$ pour p.t. $x \in S$.
- $S = /$ (ligne) : $\lambda(S \cap B(x,\varepsilon)) \approx \text{cst} \cdot \varepsilon$ — // —

Dfn informelle : $\dim(S) = d$ si $\lambda(S \cap B(x,\varepsilon)) \approx \text{cst} \cdot \varepsilon^d$ pour un $x \in S$ "typique".

Thm (Beresnevich, Velani 2006) : Supposons DS. Alors $\dim_H(A) = \min(D, 1)$, où $D = \inf\left\{ c \geq 0 : \sum \phi(q) \Delta_q^c < +\infty \right\}$.

THÉORIE ERGODIQUE

Soit $\phi : [0,1] \longmapsto [0,1]$ une transformation de $[0,1]$.

On dit que ϕ est **ergodique** si :

① ϕ est «bonne» (i.e. Borel-mesurable).

② ϕ «preserve la mesure», i.e. $\forall E \subseteq [0,1)$ «bon», on a $\lambda(\phi^{-1}(E)) = \lambda(E)$

③ Si $\phi(E) \subseteq E$, alors $\lambda(E) = 0$ ou 1.
(ensembles invariants triviaux).

Théorème (Birkhoff): Si $\phi : [0,1] \to [0,1]$ est ergodique, alors la suite $(x, \phi(x), \phi^2(x), \dots)$ est uniformément répartie mod 1 pour presque tout $x \in [0,1]$

Note: $\phi^k = \phi \circ \cdots \circ \phi$ (composition k fois)

APPLICATIONS DE LA THÉORIE ERGODIQUE

1 $\phi(x) = x+\alpha \pmod 1$ $(=\{x+\alpha\})$. $\phi^2(x) = (x+\alpha)+\alpha \mod 1 = x+2\alpha \mod 1$

$\phi^k(x) = x+k\alpha \pmod 1$ $\rightsquigarrow$ Distr. Unif mod 1 de $(n\alpha)_{n=1}^{\infty}$

---

2 $x = 0.a_1a_2\cdots \rightsquigarrow a_1 = \lfloor 10x \rfloor$, $x_1 := \{10x\} = 0.a_2a_3\cdots$.

$\phi(x) = \{10x\}$ ergodique $\rightsquigarrow \lim_{N\to\infty} \frac{\#\{n \le N : a_n = k\}}{N} = \frac{1}{10}$ $\forall k \in \{0,1,\dots,9\}$ pour presque tout x.

---

3 $x = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \dots}} \rightsquigarrow x = \frac{1}{n_1 + x_1}$, où $n_1 = \lfloor 1/x \rfloor$, $x_1 = \{1/x\}$.

$\phi(x) = \{1/x\}$ ergodique par rapport à la mesure

$$\mu(E) = \frac{1}{\log 2}\int_E \frac{dx}{1+x}, \quad E \subset [0,1].$$

$\rightsquigarrow$ Thm (Khintchine): Pour pr. tout x, $\lim_{k\to\infty} (n_1 \cdots n_k)^{\frac{1}{k}} = \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{r(r+2)}\right)^{\log_2 r}$

LES THÉORÈMES DE CASSELS ET DE GALLAGHER

Théorème (Cassels, 1950). Soient $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \geq 0$ et

$$K_1 = \left\{ x \in [0,1] : \exists \infty\ a, q \text{ t.q. } \left| x - \frac{a}{q} \right| \leq \Delta_q \right\}$$

On a que $\lambda(K_1) = 0$ ou 1.

Théorème (Gallagher, 1961) Soient $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \geq 0$ et

$$A = \left\{ x \in [0,1] : \exists \infty\ \frac{a}{q} \text{ réduites t.q. } \left| x - \frac{a}{q} \right| \leq \Delta_q \right\}.$$

On a que $\lambda(A) = 0$ ou 1.

$\boxed{\text{IDÉE}}$ $K_r = \left\{ x \in [0,1] : \exists \infty\ a, q. \text{ t.q. } \left| x - \frac{a}{q} \right| \leq r \cdot \Delta_q \right\}$

FAIT: $\forall r \geq 1$, $K_1 \subseteq K_r$ et $\lambda(K_r \setminus K_1) = 0$.

Donc, si $K_\infty := K_1 \cup K_2 \cup \cdots$, alors $\lambda(K_\infty \setminus K_1) = 0$.

Mais, $\phi(K_\infty) \subseteq K_\infty$, où $\phi(x) = 2x \pmod 1$.


SUWALLS
That's all Folks!