DIMITRIS KOUKOULOPOULOS
UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
CHAIRE FONDATION COURTOIS

# APPROXIMATIONS DE NOMBRES IRRATIONELS PAR DES NOMBRES RATIONELS

## COURS #3

ÉCOLE LANGLANDS, CRM

23-24 AOÛT 2021

# LA CONJECTURE DE DUFFIN-SCHAEFFER (CDS)



Conjecture (Duffin-Schaeffer, 1941) : Soient $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots \geq 0$.
Considérons $A = \{ x \in [0,1] : \exists \infty \ \frac{a}{q} \text{ réduites t.q. } |x - \frac{a}{q}| \leq \Delta_q \}$.

(a) Si $\sum_q \phi(q) \Delta_q < +\infty$, alors $\lambda(A) = 0$. presque aucun $x$ n'est approxim.

(b) Si $\sum_q \phi(q) \Delta_q = +\infty$, alors $\lambda([0,1] \setminus A) = 0$ (donc $\lambda(A) = 1$) presque $x$ est approxim.

$$\phi(q) = \# \{ a \in \{0, 1, \ldots, q-1\} \text{ t.q. } \operatorname{pgcd}(a,q) = 1 \}.$$

Le but de cet exposé est d'expliquer certaines idées importantes de la résolution de CDS :

**Théorème (K.-Maynard, 2020)** : la CDS est vraie.

# LA FONCTION D'EULER

$$\boxed{\phi(q) = \#\{a \in \{0,1,\dots,q-1\} \text{ t.q. } \operatorname{pgcd}(a,q)=1\}.}$$

- $\phi(q) = q \prod_{p \mid q} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \quad \forall q.$ (inclusion-exclusion)

- $\phi(p) = p-1 \quad \forall p$ premier

- $\frac{e^{-\gamma} q}{\log\log q} \underset{\approx}{\leq} \phi(q) \leq q \quad \forall q \geq 1$

  quand $q \to \infty$

- $\phi(q) \geq q/100$ pour $99\%$ d'entiers $q$.

- $\phi(q)/q$ est petit si $q$ a "trop de facteurs premiers".

# CDS QUAND $\phi(q) \approx q$

**Théorème (DS)**: Si $\exists c > 0$ t.q. $\phi(q) \geq cq$ pour «plusieurs» $q$ avec $A_q > 0$, alors CDS est vraie.

**Corollaire**: Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $\exists \infty$ $p$ premiers et $a \in \mathbb{Z}$ t.q. $\left|x - \frac{a}{p}\right| \leq \frac{1}{p^2}$.

**Preuve**: $\phi(p) = p-1 \geq p/2$ $\forall p$ et $\sum_p \phi(p)/p^2 = +\infty$.

**Conj**: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \forall \varepsilon > 0, \exists \infty$ $\frac{a}{p}$ t.q. $\left|x - \frac{a}{p}\right| \leq 1/p^{2-\varepsilon}$.

Ouverte même sous l'hypothèse généralisée de Riemann.

**Corollaire**: Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $\exists \infty$ $\frac{a}{q^2}$ réduites t.q. $\left|x - \frac{a}{q^2}\right| \leq \frac{1}{q^3}$

**Conj**: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \forall \varepsilon > 0, \exists \infty$ $\frac{a}{q^2}$ t.q. $\left|x - \frac{a}{q^2}\right| \leq \frac{1}{q^{3-\varepsilon}}$.

# AUTRES CAS DE LA CDS

**Thm (Erdős 1970 – Vaaler 1978)** : La CDS est vraie si $\Delta_q \leq \frac{C}{q^2}$ $\forall q$.

**Remarque** : Si $\Delta_q \leq C/q^2$ et $\sum \phi(q)\Delta_q = +\infty$, il faut que le support de $\Delta_q$ soit « grand ».

$\sum 1/n = +\infty$, $\sum 1/p = +\infty$, $\sum \frac{1}{n^2} < +\infty$

**Thm (Pollington–Vaughan, '90)** La CDS est vraie dans toutes les dimensions $\geq 2$.

[Si $\sum (\Delta_q \phi(q))^k = +\infty$, alors $\exists \infty$ $\frac{a_i}{q}$, $i = 1, \dots, k$, réduites t.q. $|x_i - \frac{a_i}{q}| \leq \Delta_q$ $\forall i = 1, \dots, k$, pour presque tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^k$.]

**Thm (Aistleitner et al., 2019)** : La CDS est vraie si $\sum \frac{\phi(q)\Delta_q}{(\log q)^{\varepsilon}} = +\infty$

# UN CAS SPÉCIAL

- Soit une constante $c$ dans $[0,1]$. $(c = 1/3)$
- Fixons un ensemble d'« éligibles dénominateurs » $S \subseteq [N, 2N]$ t.q. $\# S \approx N^c$.

plus précisement on veut que $\sum_{q \in S} \frac{\phi(q)}{q} \approx N^c$

EXEMPLES: ① $c = 1$, $S \approx \mathbb{Z} \cap [N, 2N]$
② $c = 1/3$, $S \approx \{n^3 : n \in [N^{1/3}, (2N)^{1/3}]\}$.

Remarque Important: $S$ peut être bc plus irrégulier.

Question-clé: Si $A_q = \{ x \in [0,1] : \exists a \text{ t.q. } |x - a/q| \leq 1/q^{1+c} \}$ (avec $\mathrm{pgcd}(a,q) = 1$), est-il vrai que $\lambda\left(\bigcup_{q \in S} A_q\right) \geq 0.000001$?

PAR CONSTRUCTION: $0.01 \leq \sum_{q \in S} \lambda(A_q) \leq 100$.

# QUASI-INDEPENDENCE

$$A_q = \bigcup_{\substack{0<a<q \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}} \left[ \frac{a}{q} - \frac{1}{q^{1+c}}, \frac{a}{q} + \frac{1}{q^{1+c}} \right]$$

$$\lambda(A_q) = \frac{\phi(q)}{q^{1+c}}$$

$$\sum_{q\in S} \lambda(A_q) \approx 1.$$

**Q:** Est-il vrai que $\lambda\left(\bigcup_{q\in S} A_q\right) \approx 1$ ?

**R:** Oui, si les $A_q$ sont mutuellement independents.

$\boxed{\text{Borel-Cantelli}}$

En fait, la réponse reste affirmative si on sait que

$$\lambda(A_q \cap A_r) \leq 10^{10^{10}} \lambda(A_q)\lambda(A_r)$$

pour presque tous les paires $(q,r)\in S\times S$.

Philosophiquement, on veut contrôler les correlations entre les approximations par différents dénominateurs.

# LE GRAPHE DE DEPENDENCES

RAPPEL: $S \subseteq [N, 2N] \cap \mathbb{Z}$, $\#S \approx N^c$.

On veut m.q. $\lambda(A_q \cap A_r) \leq 10^{10^{10}} \lambda(A_q)\lambda(A_r)$

pour la plupart de $(q,r) \in S \times S$ où $A_q = \{x$ approximable avec dénominateur $q\}$

$$\forall M \geq 1, \quad E_M := \{(q,r) \in S \times S : \lambda(A_q \cap A_r) > M \cdot \lambda(A_q)\lambda(A_r)\}$$

NOTRE BUT: M.Q. $\#E_M \leq (\#S)^2 / M^2$

$\Leftrightarrow$ le graphe $G_M = (S, E_M)$ a densité d'arêtes

$$\delta = \frac{\# E_M}{\#(S \times S)} \leq \frac{1}{M^2}$$

STRATEGIE: M.Q. que si $G_M$ est dense, il faut que $S$ soit « structuré », donc on peut l'analyser facilement.

# ÉVÉNEMENTS EXTRÊMES

**PRINCIPE:** Soit $\mathcal{F}$ une famille d'objets et soit $P$ une propriété extrême/rare. Souvent, les membres de $\mathcal{F}$ qui satisfont $P$ ont une structure très particulière

**Exemple 1:** $X_1, X_2, \ldots, X_N$ sont $N$ lancement indépendantes d'une pièce juste. (i.e $\mathbb{P}(X_j = \text{face}) = 1/2$).

$$E = \{ X_j = \text{face pour} \geq \tfrac{2}{3}N \text{ valeurs de } j \}$$

Conditionnellement à $E$, on a que $\mathbb{P}(X_j = \text{face}) \sim \frac{2}{3}$.

**Exemple 2:** $S \subseteq \{1, \ldots, N\}$, $\#S = \delta N$

$T := \#\{(a,b,c) \in S^3 \text{ t.q. } b-a = c-b\}$

**Roth:** Soit $T \sim \frac{\delta^3}{4} N^2$ (typique/aléatoire) ou $S$ a structure additive

$\exists$ progr. arith. $P$ sur laquelle $S$ a densité $> \delta$

# L'inégalité de Pollington-Vaughan

Rappel: $S \subseteq [N, 2N] \cap \mathbb{Z}$, $\#S \approx N^c$.

$$E_M := \{ (q,r) \in S \times S : \lambda(A_q \cap A_r) > M \cdot \lambda(A_q)\lambda(A_r) \}$$

On veut m.q. $\#E_M \leq (\#S)^2 / M^2$. $\quad A_q = \frac{\mathbb{1}_{q \in S}}{q^{1+c}}$

Pollington-Vaughan: Si $\lambda(A_q \cap A_r) > M \cdot \lambda(A_q)\lambda(A_r)$, alors

1. $d := \operatorname{pgcd}(q, r) \geq N^{1-c}$
2. le nombre $qr/d^2$ a une propriété $P_M$ qui arrive pour $\leq (1/e^M)\,\%$ d'entiers

"trop de facteurs premiers $> e^M$"

Quand $c = 1$ ($N^{1-1} = 1$), ② suffit pour m.q. $\#E_M \leq (\#S)^2 / e^M$

(ceci est grosso modo l'argument d'Erdős-Vaaler)

# UNE STRUCTURE CACHÉE

**UN ENNEMI POTENTIEL :** $D = \lceil N^{1-c} \rceil$, $S = \{D\cdot m : m \in S_0\}$,

où $S_0 \subseteq \left[\frac{N}{D}, \frac{2N}{D}\right]$, $\#S_0 \approx N^c =: N_0 \sim \frac{N}{D}$

$\therefore \quad \mathrm{pgcd}(q,r) \geq D \geq N^{1-c} \quad \forall q, r \in S$

Mais $\#S_0 \approx N_0 \approx N/D$, donc on peut traiter cet ennemi potentiel comme on l'a fait pour le cas $c=1$ (argument Erdős–Vaaler)

**HYPOTHÈSE DE TRAVAIL :** Soit $S \subseteq [N, 2N] \cap \mathbb{Z}$ t.q.

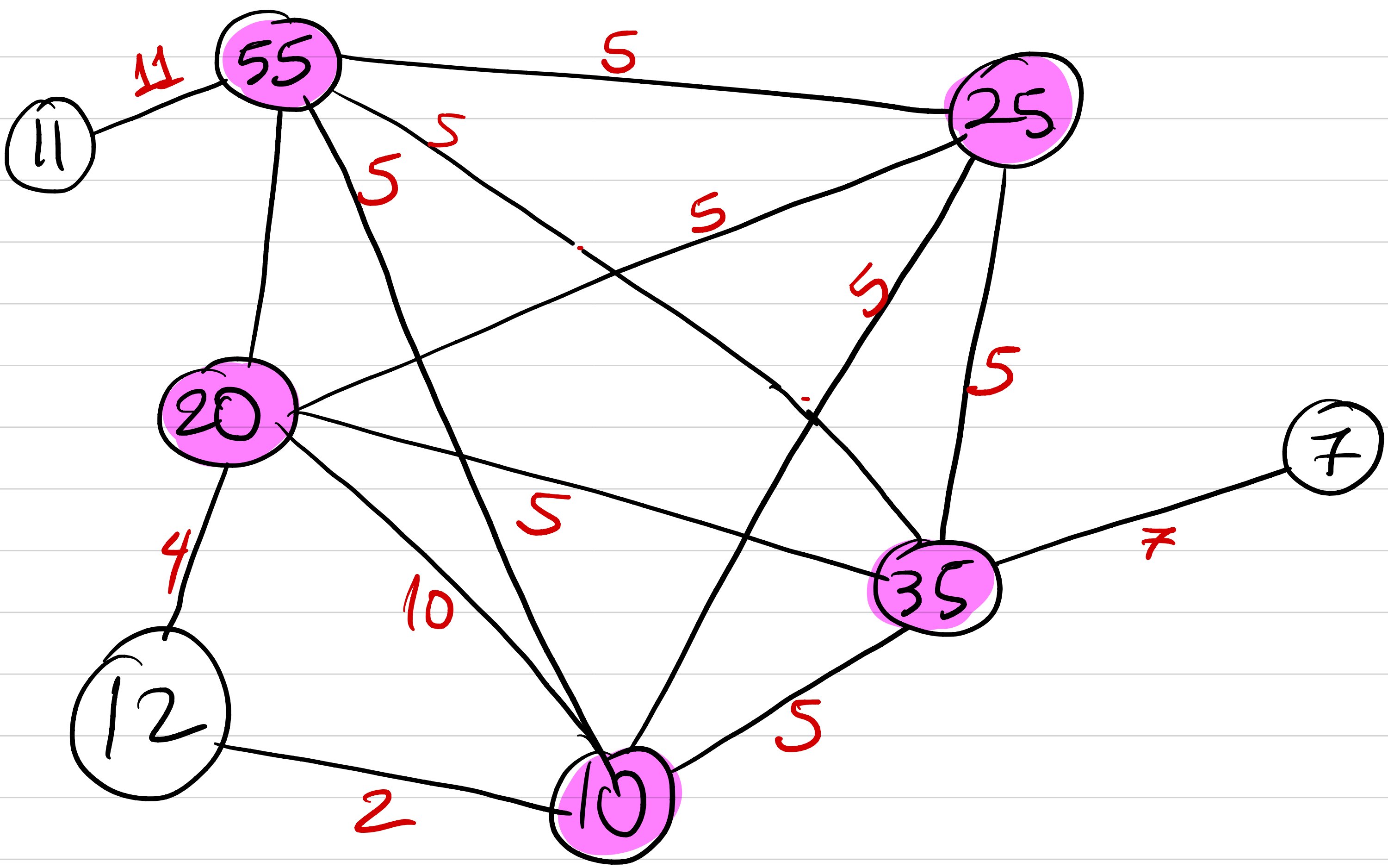
- $\#\{(q,r) \in S^2 : \mathrm{pgcd}(q,r) \geq N^{1-c}\} \geq \delta \cdot \#S^2$
- $\#S \approx N^c$

Il faut que $\exists d \geq N^{1-c}$ t.q. $S$ contient $\geq \delta^{100} N^c$ multiples de $d$.

# GRAPHES DE PGCD

$$G = (S, E) \quad \text{où} \quad E = \{(q,r) \in S^2 : \mathrm{pgcd}(q,r) \geq D\}$$

$D = 2$



# UN ALGORITHME DE COMPRESSION

graph initial $= G =: G_0 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_2 \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow G_J$ = structuré (diviseur commun)

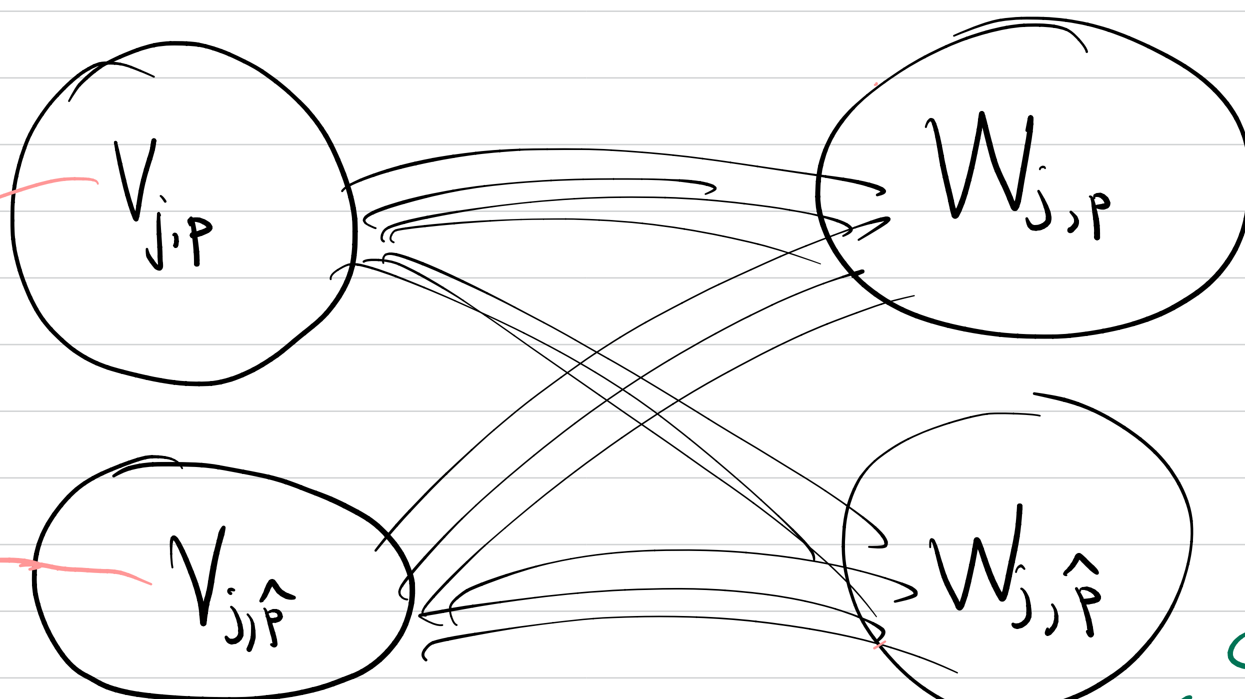
à chaque étape, on gagne information sur la divisibilité de sommets par un noveau premier

$$G_j = (V_j, W_j, E_j) \qquad \text{(bipartite graph)}.$$

p premier

divisible par p

non-divisible par p




L'algorithme détermine à quel sous-graphe parmi ceux 4 ne se concentrer

Choisir ce qui a « meilleure qualité »

# LA QUALITÉ D'UN GRAPHE

$G_j = (V_j, W_j, E_j)$, $\exists\, a_j, b_j$ t.q. $a_j | v$, $b_j | w$ $\forall v \in V_j, w \in W_j$

$V_j, W_j \subseteq S_j$ $\quad \# E_j = \delta_j \cdot \# V_j \# W_j$.

$$q(G_j) \approx \delta_j^{10} \# V_j \# W_j \cdot \frac{a_j b_j}{\mathrm{pgcd}(a_j, b_j)^2} = \lambda_j$$

qualité

Croissante quand $j \nearrow$

| sous-graphe | $a_{j+1}$ | $b_{j+1}$ | $\lambda_{j+1} := \frac{a_{j+1} b_{j+1}}{\mathrm{pgcd}(a_{j+1}, b_{j+1})}$ |
|---|---|---|---|
| $(V_{j,p}, W_{j,p})$ | $pa_j$ | $pb_j$ | $\lambda_j = a_j b_j / \mathrm{pgcd}(a_j, b_j)^2$ |
| $(V_{j,p}, W_{j,\hat{p}})$ | $pa_j$ | $b_j$ | $p\lambda_j$ |
| $(V_{j,\hat{p}}, W_{j,p})$ | $a_j$ | $pb_j$ | $p\lambda_j$ |
| $(V_{j,\hat{p}}, W_{j,\hat{p}})$ | $a_j$ | $b_j$ | $\lambda_j$ |

# AUTRES DIRECTIONS DE RECHERCHE

**Conjecture** (Littlewood c. 1930) : Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. M.Q.
$\exists \infty$ $a, b, q$ t.q.

$$q^3 \cdot \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \cdot \left|\beta - \frac{b}{q}\right| \xrightarrow[q \to \infty]{} 0$$

**Remarques:** ① Dirichlet $\Rightarrow \exists \infty$ $a, b, q$ t.q. $q^3 \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \cdot \left|\beta - \frac{b}{q}\right| < \frac{1}{2}$.
② Einsiedler-Katok-Lindenstrauss (2006) : l'ensemble d'exceptions $(\alpha, \beta)$ a dim. de Hausdorff 0.

**Lonely Runner Conjecture** (Wills, 1967) : Soient $k$ personnes courant sur le cercle unitaire avec vitesses constantes $v_1, v_2, \dots, v_k$. M.Q. $\forall j$, $\exists$ temps $t > 0$ t.q. la distance sur le cercle du $j$-ième coureurs des autres est $\geq 1/k$.

**Remarques:** Connue si $k \leq 7$. Pour grand $k$, le record est que la distance est $\geq \frac{1}{2k} + \frac{c \log k}{k^2 (\log \log k)^2}$ (T. Tao)


SUWALLS
That's all Folks!