Arrangements d'étoiles sur le drapeau américain

Dimitris Koukoulopoulos
(en collaboration avec Johann Thiel)

Université de Montréal

Club mathématique, Université de Montréal
9 avril 2014

Le drapeau américain

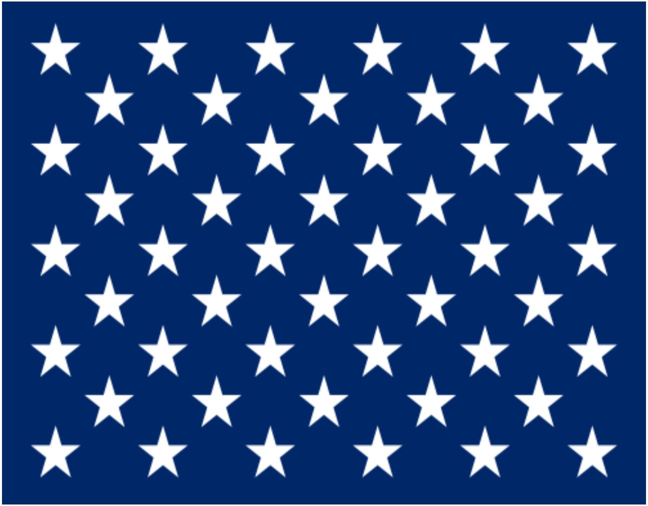


FIGURE : Le drapeau américain (naval) courant : 50 étoiles

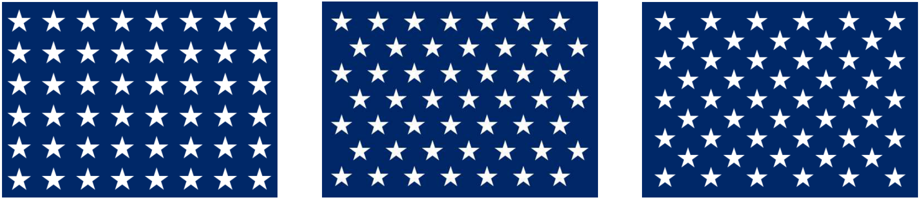
Porto Rico deviendra-t-il le 51e État des États-Unis ?

FIGURE : Photo par Bernand Braultm

La Presse, 7 novembre 2012 :
Les Portoricains ont voté en majorité mardi soir pour que leur île, qui a depuis 1952 le statut d'État libre associé aux États-Unis, devienne le 51e État américain, une réponse inédite à une question qui leur avait déjà été posée trois fois depuis 1967.
Le résultat de cette consultation, révélé mercredi par la commission électorale du territoire, est non contraignant. En vertu de la constitution américaine, l'intégration de Porto Rico aux États-Unis nécessite un vote du Congrès américain.

Un drapeau américain avec 51 étoiles ?

Il faut que le nouveau drapeau ait une certaine **symétrie**.



(a) 48 étoiles (b) 49 étoiles (c) 50 étoiles

FIGURE : Drapeaux de 1959 jusqu'à aujourd'hui

Chris Wilson a étudié ce problème et il a identifié six motifs possibles possédant beaucoup de symétrie :

(1) égal, (2) Oregon, (3) Wyoming, (4) long, (5) court, (6) alterné.

Beaux arrangements d'étoiles

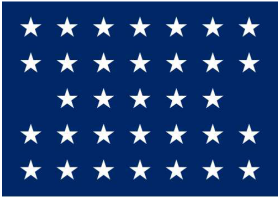
Égal - Toutes les rangées dans ce motif ont le même nombre d'étoiles.
Oregon - Comme dans le motif égal, toutes les rangées ont la même longueur, à l'exception de la rangée centrale qui est plus courte par deux étoiles. Ce motif exige d'un nombre impair de rangées.
Wyoming - Dans ce motif, la première et la dernière rangée sont plus longues que les autres par une étoile.
Long - Ce motif consiste à des rangées courtes et longues alternées, où les rangées longues possèdent d'une étoile plus que les rangées courtes. Dans ce motif, la première et la dernière rangée sont longues.
Court - Ce motif est défini comme le motif long, sauf que la première et la dernière rangée sont courtes.
Alterné - Ce motif est défini comme le motif long, sauf que la première rangée est longue et la dernière est courte, ou vice-versa.

Définition

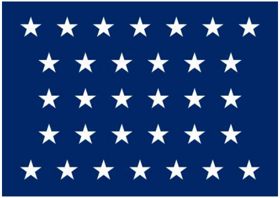
On dit qu'un arrangement des étoiles sur le drapeau américain est **beau** s'il utilise un motif entre les six motifs décrits ci-dessus, et le rapport entre le nombre de rangées et le nombre de colonnes appartient à l'intervalle $[1, 2]$.

Exemples de beaux arrangements d’étoiles

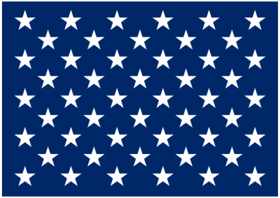
(a) Égal (48 étoiles, 1912)



(b) Oregon (33 étoiles, 1859)

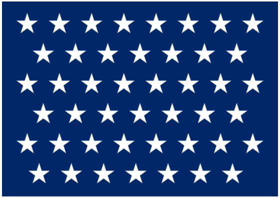


(c) Wyoming (32 étoiles, 1858)



(d) Long (50 étoiles, 1960)

(e) Court



(f) Alterné (45 étoiles, 1896)

Nombres d'étoiles possédant d'un bel arrangement

Skip Garibaldi a écrit un programme qui calcule pour quels $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ il existe un bel arrangement d'étoiles :

$$\{n \leq 100 : \exists \text{ bel arrangement de } n \text{ étoiles sur le drapeau américain}\}$$
$$= \{1, 2, \ldots, 100\} \setminus \{29, 69, 87\}.$$

Exemple : Si on considère le motif Wyoming avec 5 rangées de 7 étoiles et 2 rangées longues de 8 étoiles, on trouve un bel arrangement de $35 + 16 = 51$ étoiles. $\rightsquigarrow$ Solution du problème avec Porto Rico.

Définition

$S(N) := \#\{n \leq N : \exists \text{ bel arrangement de } n \text{ étoiles}\}$,
pour que $S(100) = 97$.

Théorème (K. - Thiel)

La densité de nombres n pour lesquels il existe un bel arrangement de n étoiles est égale à 0, c'est-à-dire

$$\lim_{N\to\infty} S(N)/N = 0.$$

Caractérisation des beaux arrangements

Proposition

Un bel arrangement de n étoiles existe si un des suivants est vrai :

(i) (égal) $n = ab$ avec $1 \leq b/a \leq 2$.

(ii) (Oregon) $n + 2 = (2a + 1)b$ avec $1 \leq b/(2a + 1) \leq 2$.

(iii) (Wyoming) $n - 2 = ab$ avec $1 \leq (b + 1)/a \leq 2$.

(iv) (long) $2n - 1 = (2a + 1)(2b + 1)$ avec $1 \leq (b + 1)/(2a + 1) \leq 2$.

(v) (court) $2n + 1 = (2a + 1)(2b + 1)$ avec $1 \leq (b + 1)/(2a + 1) \leq 2$.

(vi) (alterné) $n = a(2b - 1)$ avec $1 \leq b/(2a) \leq 2$.

Exemple : Supposons qu'il existe un motif long avec n étoiles.

Soit a le nombre de rangées courtes et b le nombre d'étoiles que chacune contient.

$$\begin{aligned} &\implies \quad n = (a+1)(b+1) + ab = 2ab + a + b + 1 \\ &\implies 2n - 1 = 4ab + 2a + 2b + 1 = (2a+1)(2b+1) \end{aligned}$$

La table de multiplication

$\times$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

(g) Tous les produits

FIGURE : La table de multiplication de 10×10

La table de multiplication, II

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2						12	14	16	18	20
3					15		21	24	27	30
4							28	32	36	40
5					25		35		45	50
6							42	48	54	60
7							49	56	63	70
8								64	72	80
9									81	90
10										100

(a) Les produits distincts

FIGURE : La table de multiplication de 10×10

Il y a 42 produits distincts

Le problème d'Erdős (**Un** des problèmes d'Erdős)

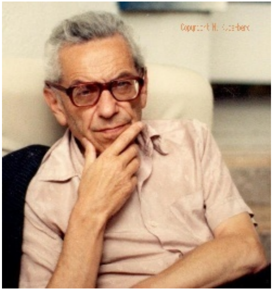


FIGURE : Paul Erdős

$$A(N) := \#\{n \in \mathbb{N} : n = ab \text{ avec } 1 \leq a, b \leq N\} =? \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{A(N)}{N^2} =?$$

Une première estimation de $A(N)$:

$$\frac{N^2}{2} \gtrsim A(N) \geq \#\{pq : p, q \text{ premiers, } 1 \leq p < q \leq N\} \approx \frac{N^2}{2(\log N)^2}.$$

Le nombre de facteurs premiers d'un entier

Si $n = p_1 \cdots p_r$ est la factorisation première de n, alors on pose

$$\Omega(n) = r.$$

$$\Omega(12) = 3 \text{ puisque } 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3\,;$$
$$\Omega(100) = 4 \text{ puisque } 100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5.$$

En général, $\Omega(mn) = \Omega(m) + \Omega(n)$. (Si $m = p_1 \cdots p_r$ et $n = p_{r+1} \cdots p_{r+s}$, alors $mn = p_1 \cdots p_{r+s}$.)

Théorème (Hardy, Ramanujan)

Soit $\epsilon > 0$. Alors on a que

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \#\{n \leq N : (1-\epsilon)\log\log N \leq \Omega(n) \leq (1+\epsilon)\log\log N\} = 1.$$

Re-interprétation **probabiliste** du théorème de Hardy-Ramanujan :

Pour presque tous les nombres $n \leq N$, on a que $\Omega(n) \sim \log\log N$.

Ou, même, si on choisit un nombre entier n « aléatoirement », alors $\Omega(n) \sim \log\log n$ avec probabilité 1.

Le moyen de Ω

- $$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Omega(n) = \frac{1}{N}\sum_{n\le N}\sum_{p^a|n,\, a\ge 1} 1 = \frac{1}{N}\sum_{p^a\le N,\, a\ge 1}\ \sum_{n\le N,\, p^a|n} 1$$
$$\overset{n=p^a m}{=} \frac{1}{N}\sum_{p^a\le N,\, a\ge 1}\ \sum_{m\le N/p^a} 1 = \frac{1}{N}\sum_{p^a\le N,\, a\ge 1}\left(\frac{N}{p^a}+O(1)\right)$$
$$= \sum_{p\le N}\frac{1}{p} + O\left(\sum_{p \text{ premier},\, a\ge 2}\frac{1}{p^a}\right)$$
  - $$\sum_{p \text{ premier},\, a\ge 2}\frac{1}{p^a} = \sum_{p \text{ premier}}\frac{1}{p^2(1-1/p)} < \infty$$
- $$\sum_{p\le N}\frac{1}{p} = \log\log N + c + O\left(\frac{1}{\log N}\right) \qquad \text{(Mertens)}$$

$$\Longrightarrow\ \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Omega(n) = \log\log N + O(1)$$

Application sur le problème d'Erdős

$$A(N) = \#\{n \in \mathbb{N} : n = ab \text{ avec } 1 \le a, b \le N\}.$$

- Pour presque tout entier $n \le N$, on a que $\Omega(n) \sim \log\log N$.
- Donc pour presque toute paire (a, b) avec $1 \le a, b \le N$, on a que $\Omega(ab) = \Omega(a) + \Omega(b) \sim 2\log\log N \sim 2\log\log(N^2)$.
- Donc $n = ab$ est « typiquement » un nombre entier $\le N^2$ « non-typique ».
- $\implies \lim_{N\to\infty} A(N)/N^2 = 0$.

Rigoureusement,

$$\begin{aligned} A(N) &\le \#\left\{n \le N^2 : \Omega(n) > \frac{4}{3}\log\log N\right\} \\ &\quad + \#\left\{(a,b) : a, b \le N,\ \Omega(ab) \le \frac{4}{3}\log\log N\right\} \\ &\le \epsilon N^2 + 2\sum_{a \le N} \#\left\{b \le N : \Omega(b) \le \frac{2}{3}\log\log N\right\} \\ &\le \epsilon N^2 + 2N \cdot \epsilon N = 3\epsilon N^2. \end{aligned}$$

Retour aux beaux arrangements

$$
\begin{aligned}
S_{gal}(N) &:= \#\{n \le N : \exists \text{ bel arrangement de } n \text{ étoiles dans le motif égal}\} \\
&= \#\{n \le N : n = ab \text{ avec } 1 \le b/a \le 2\} \\
&\le \#\{n \le N : n = ab \text{ avec } a, b \le \sqrt{2N}\} \\
&\le A(\sqrt{2N}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{long}(N) &= \#\{n \le N : 2n-1 = (2a+1)(2b+1) \text{ avec } 1 \le \frac{b+1}{2a+1} \le 2\} \\
&\le \#\{n \le 2N : n = ab \text{ avec } 2 \le (b+1)/a \le 4\} \\
&\le \#\{n \le 2N : n = ab \text{ avec } 1 \le b/a \le 4\} \\
&\le \#\{n \le 2N : n = ab \text{ avec } a, b \le \sqrt{8N}\} \\
&\le A(\sqrt{8N}).
\end{aligned}
$$

$$
\cdots \quad \Longrightarrow \quad S(N) \le 6 \cdot A(\sqrt{12N}) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{N \to \infty} \frac{S(N)}{N} = 0.
$$

Considérations probabilistes dans le monde déterministe

$$\#\{n \leq N : d|n\} = \#\{n = dm : m \leq \frac{N}{d}\} \approx \frac{N}{d} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{Prob}_{n\in\mathbb{N}}(d|n) = \frac{1}{d}$$

Si $p \neq q$ sont deux nombres premiers différents, alors

$$\#\left(\{n \leq N : p|n\} \cap \{n \leq N : q|n\}\right) = \#\{n \leq N : p, q|n\} = \#\{n \leq N : pq|n\}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{Prob}_{n\in\mathbb{N}}(\{p|n\} \cap \{q|n\}) = \frac{1}{pq} = \mathbf{Prob}_{n\in\mathbb{N}}(p|n)\mathbf{Prob}_{n\in\mathbb{N}}(q|n).$$

“ $\Longrightarrow$ ″ les événements $\{n \in \mathbb{N} : p|n\}$ et $\{n \in \mathbb{N} : q|n\}$ sont indépendants

On modèle la divisibilité par p^a par la variable aléatoire X_{p^a}, où

$$\begin{cases} \mathbf{Prob}(X_{p^a} = 1) = \frac{1}{p^a} \\ \mathbf{Prob}(X_{p^a} = 0) = 1 - \frac{1}{p^a} \end{cases}$$

Si $p \neq q$, alors X_{p^a} et X_{q^b} sont censées être indépendantes.

Considérations probabilistes dans le monde déterministe, II

$$\Omega(n) = \sum_{p^a | n,\, a \geq 1} 1 \;\text{ pour } n \leq N \quad \rightsquigarrow \quad \text{modelé par} \quad \tilde{\Omega} := \sum_{p^a \leq N,\, a \geq 1} X_{p^a}$$

$$\mathbf{Prob}(\tilde{\Omega} = r) \approx \frac{1}{\log N} \frac{(\log\log N)^r}{r!}$$

$$\mathbf{Prob}\left(\alpha \leq \frac{\tilde{\Omega} - \log\log N}{\sqrt{\log\log N}} \leq \beta\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-t^2/2} dt$$

Ces relations sont vraies pour l'objet déterministe $\Omega(n)$ aussi :

$$\#\{n \leq N : \Omega(n) = r\} \asymp \frac{N}{\log N} \frac{(\log\log N)^{r-1}}{(r-1)!} \qquad (1 \leq r < 2\log\log N);$$

$$\#\left\{n \leq N : \alpha \leq \frac{\Omega(n) - \log\log N}{\sqrt{\log\log N}} \leq \beta\right\} \sim \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-t^2/2} dt \qquad (\text{Erdős-Kac})$$

Résultats plus spécifiques pour $A(N)$

Théorème (Ford)

Il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que

$$\frac{c_1 N}{(\log N)^{\delta}(\log\log N)^{3/2}} \leq A(N) \leq \frac{c_2 N}{(\log N)^{\delta}(\log\log N)^{3/2}}$$

pour tout $N \geq 3$, où $\delta = 1 - \frac{1+\log\log 2}{\log 2} = 0.086071\ldots$

Anatomie des entiers apparaissant dans la table de multiplication : si $k_0 = \left\lfloor \frac{\log\log N}{\log 2} \right\rfloor$, alors

$$\begin{aligned} A(N) &\approx \#\left\{ n \leq N^2 : \begin{matrix} n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}, & p_1 < \cdots < p_k \\ k = k_0 + O(1), & \log\log p_j > j \log 2 - O(1),\ \forall j \end{matrix} \right\} \\ &\approx \frac{N^2}{\log N} \frac{(\log\log N)^{k_0 - 1}}{(k_0 - 1)!} \mathbf{Prob}\left(\xi_j > \frac{j - O(1)}{k_0} \middle| 0 \leq \xi_1 \leq \cdots \leq \xi_{k_0} \leq 1 \right). \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Connexions avec des marches aléatoires.

Conclusion

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S(N)}{N} = 0, \tag{*}$$

où

$$S(N) = \#\{n \leq N : \exists \text{ bel arrangement de } n \text{ étoiles}\}.$$

Par exemple, il n'existe pas un bel arrangement avec 69 étoiles.

Cependant, on peut écrire $69 = (8 + 7 + 8) + (8 + 7 + 8) + (8 + 7 + 8)$, ce qui nous donne un nouveau type d'un bel arrangement.

Même si on inclut ce nouveau type à la définition de $S(N)$, la relation (*) reste vraie.

Leçon : si les Américains veulent ajouter plusieurs nouveaux états, alors il faut qu'ils deviennent de plus en plus créatifs.

Merci !

- D. Koukoulopoulos et J. Thiel, *Arrangements of stars on the American flag*. Amer. Math. Monthly 119 (2012), no. 6, 443–450.
- C. Wilson, *13 Stripes and 51 Stars* (2010), disponible à `http://www.slate.com/id/2256250/`.