

## Plan de cours MAT 6340 – Géométrie symplectique – Hiver 2010

Les variétés symplectiques peuvent être conçues comme généralisation utile des fibrés cotangents, c'est-à-dire des espaces dans lesquels la mécanique hamiltonienne a lieu, mais également comme généralisation des variétés projectives complexes. Cette dualité entre dynamique et géométrie analytique est particulièrement féconde puisqu'elle agit dans les deux directions: la dynamique permet souvent de construire des invariants géométriques alors que la rigidité des variétés analytiques permet de dévoiler certaines propriétés qualitatives des phénomènes de la dynamique. Aucune théorie n'illustre mieux la fécondité de cette dualité que la théorie de Floer (ou la théorie symplectique des champs qui en est issue). Par ailleurs, les techniques utilisées en géométrie symplectique – par exemple celles qui produisent les invariants associés à ses objets d'étude – suivent une autre dualité qui distingue les techniques "souples" des techniques "rigides". Les premières proviennent de la topologie algébrique ou différentielle ordinaire (le h-principe par exemple) alors que les secondes proviennent des méthodes pseudo-holomorphes (EDP elliptiques) ou de celles que l'on voit en théorie de jauge. Or ces deux dualités, la première concernant la nature même de la géométrie symplectique et la seconde, plus accidentelle, concernant le choix des techniques, sont dans une certaine mesure indépendantes. C'est pourquoi il est souvent difficile de prévoir si un nouveau problème de géométrie symplectique qui se présente à nous est souple ou rigide. Cette relative indépendance fait la diversité et la richesse de la géométrie symplectique. Voici un aperçu du cours:

1) Présentation des bases de la géométrie symplectique: définitions des objets, méthode de Moser, formes normales près des sous-variétés symplectiques et lagrangiennes, groupes de difféomorphismes, fibrés symplectiques, diverses notions d'indice tirées de la dynamique et de la géométrie des objets.

2) Souplesse et rigidité en géométrie symplectique: du h-principe de Smale-Gromov à la rigidité d'Eliashberg. Pourquoi la géométrie symplectique ne peut se réduire à de la topologie différentielle.

3) Éléments de la théorie de Floer et quelques-unes de ses applications: méthodes pseudo-holomorphes dans les cas les plus simples, relations entre théories de Floer et de Morse, homomorphismes de Seidel absolu et relatif, clusters linéaires (ou complexes de perles), aperçu des clusters généraux. Application au scindement homologique des fibrés hamiltoniens dont Deligne, Kirwan, Atiyah-Bott avaient aperçu les premières manifestations. Applications, aussi simples et directes que possible, à la dynamique.

Références:

Introduction to Symplectic Topology, McDuff and Salamon.

J-holomorphic curves and Quantum cohomology, McDuff and Salamon.

Prof.: François Lalonde, bureau 6143, tél: 6707, courriel: lalonde@dms.umontreal.ca