(23/3/2012, 10h25)

Densité des friables

Régis de la Bretèche et Andrew Granville

Résumé : Nous étudions l'asymptotique des fonctions sommatoires restreintes aux entiers friables de suites complexes en utilisant la méthode du cercle et des estimations précises sur les sommes d'exponentielles sur les friables. Les méthodes développées nous permettent d'obtenir une estimation du cardinal des couples de y-friables dont la somme est encore y-friable et, sous des hypothèses usuelles dans le crible, une estimation des fonctions sommatoires restreintes aux entiers friables.

Keywords : friable integers, circle method, sieves, exponential sums, diophantine equations.

1. Introduction

Un entier n est dit y-friable si son plus grand facteur premier, noté $P(n)$, est $\leqslant y$. Dans [10], Lagarias et Soundararajan étudient l'équation $a+b=c$ lorsque a, b, c sont y-friables. Dans l'article de survol [11], ils exposent les enjeux de cette étude et notamment les liens avec la conjecture *abc*.

En supposant l'hypothèse de Riemann généralisée aux fonctions L de Dirichlet, ils obtiennent une estimation de $N_\Phi(x,y)$ avec

$$N_\Phi(x,y) := \sum_{\substack{(a,b,c)\in\mathbb{N}^3\\ a+b=c\\ P(abc)\leqslant y}} \Phi\Big(\frac{a}{x}\Big)\Phi\Big(\frac{b}{x}\Big)\Phi\Big(\frac{c}{x}\Big)$$

lorsque $x\geqslant 2$, $(\log x)^{8+\varepsilon}<y\leqslant \exp\{(\log x)^{1/2-\varepsilon}\}$ où $\varepsilon>0$ et Φ est une fonction C^∞ à suppport compact inclus dans $]0,+\infty[$. Leur étude fournit ainsi une minoration du cardinal

$$N(x,y) := \mathrm{card}\{(a,b,c)\in S(x,y)^3 \ : \quad a+b=c\},$$

où $S(x,y)$ désigne l'ensemble des entiers $\leqslant x$ qui sont y-friables.

Dans [5], Drappeau complète leur étude en obtenant un équivalent de $N(x,y)$. Afin de citer son résultat, nous notons $\alpha=\alpha(x,y)$ le point-selle l'unique solution positive de l'équation

$$\sum_{p\leqslant y}\frac{\log p}{p^\alpha-1}=\log x.$$

Posant

$$\sigma_0(\alpha) := \alpha^3 \iint_{0<t_1,t_2,t_1+t_2<1} (t_1t_2(t_1+t_2))^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2$$
$$\sigma_1(\alpha) := \prod_p \Big(1+\frac{p-1}{p(p^{3\alpha-1}-1)}\Big(\frac{p-p^\alpha}{p-1}\Big)^3\Big),$$

il montre, conditionnellement à l'hypothèse de Riemann généralisée, lorsque (x,y) satisfait $(\log x)^{8+\varepsilon}\leqslant y\leqslant \exp\big\{(\log x)/(\log\log x)^{1+\varepsilon}\big\}$ et que x tend vers $+\infty$, l'équivalent

$$N(x,y)\sim \sigma_0(\alpha)\sigma_1(\alpha)\frac{\Psi(x,y)^3}{x},$$

2000 Mathematics Subject Classification: 11N25, 11N35, 11N36, 11P55, 11N56, 11D85.

où $\Psi(x,y) := \mathrm{card}\{S(x,y)\}$. En particulier, lorsque $\log\log x/\log y$ tend vers 0, il vient, sous l'hypothèse de Riemann généralisée,

$$N(x,y) \sim \frac{\Psi(x,y)^3}{2x}. \tag{1·1}$$

Ainsi, il est naturel de conjecturer que cet équivalent est valable si, et seulement si, $\log\log x/\log y$ tend vers 0.

Nous nous proposons d'estimer inconditionnellement $N(x,y)$ compte-tenu des connaissances actuelles sur la région sans zéro des fonctions L de Dirichlet. Nous notons systématiquement $u := (\log x)/(\log y)$. L'enjeu est d'établir (1·1) inconditionnellement dans un large domaine.

Théorème 1.1. *Lorsque* (x,y) *satisfaisant à*

$$x \geqslant 2, \quad \exp\{(\log x)^{2/3+\varepsilon}\} \leqslant y \leqslant x, \tag{1·2}$$

nous avons

$$N(x,y) = \frac{\Psi(x,y)^3}{2x}\Big(1 + O\Big(\frac{\log(u+1)}{\log y}\Big)\Big).$$

Remarques. 1– Le résultat obtenu est beaucoup plus précis mais nous avons préféré énoncer dans l'introduction ce résultat qualitatif. Dans la section 5, nous donnerons une estimation avec un terme d'erreur plus précis qui fera apparaître la contribution de l'éventuel zéro de Siegel (cf. le Lemme 5.6).

2– Le cardinal $N(x,y)$ peut être évalué asymptotiquement grâce à [4] avec un terme d'erreur

$$O\Big(\frac{\log(u+1)}{\varrho(u)\log y}\Big)$$

ce qui fournit un équivalent pour $N(x,y)$ uniquement dans un sous-domaine de la forme

$$x \geqslant x_0(\varepsilon), \qquad \exp\Big\{\frac{(\log x)(\log\log\log x)}{\varepsilon\log\log x}\Big\} \leqslant y \leqslant x, \tag{1·3}$$

relatif à $\varepsilon \in]0,1[$. L'estimation du Théorème 1.1 lorsque u est borné découle donc de [4].

Nous étendons notre étude à l'étude de la taille de

$$A(x,y) := \sum_{n\in S(x,y)} a_n,$$

où $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes. La méthode utilisée pour estimer $A(x,y)$ reprend celle développée par le premier auteur dans [4]. Elle emploie la méthode du cercle grâce à la formule

$$A(x,y) = \int_0^1 A_\vartheta(x)E(x,y;-\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta, \tag{1·4}$$

avec

$$A_\vartheta(x) := \sum_{n\leqslant x} a_n \mathrm{e}(n\vartheta), \quad E(x,y;\vartheta) := \sum_{n\in S(x,y)} \mathrm{e}(n\vartheta) \qquad \mathrm{e}(t) := \mathrm{e}^{2\pi i t}.$$

Nous utiliserons systématiquement la notation

$$\|A\|_1 := \int_0^1 |A_\vartheta(x)|\,\mathrm{d}\vartheta.$$

Nos résultats s'appliqueront essentiellement pour les sommes d'ensembles c'est-à-dire lorsque

$$a_n := \operatorname{card}\{(a,b) \in A \times B \ : \quad n = a+b\}, \tag{1·5}$$

avec A et B deux sous-ensembles d'entiers de $[1,x]$. Dans ce cas, l'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit $\|A\|_1 \leqslant \sqrt{|A||B|}$. Nous renvoyons le lecteur intéressé par la genèse de ce sujet d'étude à [1],[2].

Dans l'étude de la densité des entiers friables, un rôle crucial est joué par la fonction ϱ de Dickman définie comme l'unique fonction continue sur $]0,+\infty[$ solution de l'équation différentielle aux différences $u\varrho'(u) + \varrho(u-1) = 0$ $(u > 1)$ satisfaisant la condition initiale $\varrho(u) = 1 \quad (u \in [0,1])$. La fonction ϱ est une première approximation de la densité des entiers y-friables grâce à la formule de Hildebrand [8]

$$\Psi(x,y) = x\varrho(u)\Big\{1 + O_\varepsilon\Big(\frac{\log(u+1)}{\log y}\Big)\Big\} \tag{1·6}$$

valable dans le domaine

$$x \geqslant 3, \quad \exp\{(\log\log x)^{5/3+\varepsilon}\} \leqslant y \leqslant x, \tag{H_ε}$$

où ε est un paramètre positif arbitraire.

Nous utiliserons systématiquement les notations

$$Y = \exp\sqrt{\log y}, \qquad H(u) := \exp\Big\{\frac{u}{(\log(u+1))^2}\Big\} \qquad (u \geqslant 1). \tag{1·7}$$

Nous avons besoin d'exprimer nos résultats en fonction du *zéro de Siegel*. Il existe $b, c > 0$ tel que $L(s,\chi)$ n'admet pas de zéro dans la région

$$\Big\{s \in \mathbb{C} \ : \ \Re e\,(s) \geqslant 1 - \frac{b}{\sqrt{\log y} + \log(|\tau|+2)}\Big\}$$

pour tous les caractères non-principaux de module $q \leqslant Y^c$ sauf éventuellement pour des caractères tous associés à un même caractère primitif χ_1 de module noté q_1. Si ce caractère existe, il est quadratique et le zéro, noté β, est unique, simple et réel. Nous notons χ_r le caractère de module $q_1 r$ associé à χ_1. Nous notons aussi $\eta(q)$ la fonction caractéristique des entiers multiples de q_1 si β existe et la fonction nulle sinon. Nous avons $\eta(1) = 0$.

Nous montrons que, sous des hypothèses usuelles de crible, nous pouvons établir un développement précis de $A(x,y)$. Nous supposons que la suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait les conditions suivantes

(H) Il existe g une fonction C^1 de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, h une fonction arithmétique et enfin $r(x,d)$ tels que lorsque $d \geqslant 1$

$$S_d(x) := \sum_{\substack{n\leqslant x\\ d|n}} a_n = \frac{h(d)}{d} g(x) + r(x,d)$$

avec $|h(d)| \leqslant C^{\omega(d)}$. Nous noterons $r^*(x,d) = (d/x)\sup_{Q<t\leqslant x}|r(t,d)|$ avec $Q = [x/Y^c]$ où c est une constante suffisamment grande et nous imposons $h(1) = 1$.

Nous posons

$$S_q(t) := \frac{1}{t}\sum_{n\leqslant t} \frac{\mu(q/(n,q))}{\varphi(q/(n,q))} \qquad (t > 0),$$

et, lorsque $k \geqslant 0$,

$$(1{\cdot}8)\qquad \begin{aligned} b_k(q) &:= \frac{(-1)^k}{k!}\int_0^\infty v^k \,\mathrm{d}S_q(\mathrm{e}^v),\\ b_k'(q) &:= b_k(q)+b_{k-1}(q) = \frac{(-1)^k}{k!}\int_0^\infty (v^k-kv^{k-1})\,\mathrm{d}S_q(\mathrm{e}^v). \end{aligned}$$

Nous introduisons les quantités

$$X_j := \int_Q^x g'(t)\varrho^{(j)}(u(t))\,\mathrm{d}t, \qquad \alpha_j = \sum_{q=1}^\infty \frac{b_j'(q)}{\varphi(q)}\sum_{d\mid q}\mu\Big(\frac{q}{d}\Big)h(d).$$

avec $u(t) := (\log t)/(\log y)$ et

$$R_B := \sum_{q\leqslant B}\frac{r^*(x,q)}{\varphi(q)^2}.$$

Nous avons ainsi $\alpha_0 = 1$ et le Lemme 2.4 *infra* assure la convergence de α_j.

Posons aussi pour $z > 1$ et $k \geqslant 0$,

$$\varepsilon_{k,j}(z) := \min\Big\{1, (k+1-j)\frac{\log z}{z}\Big\} \qquad (0\leqslant j\leqslant k)$$

et

$$(1{\cdot}9)\qquad \mathcal{C}_k(z) := \bigcup_{j=0}^k [j+\varepsilon_{k,j}(z), j+1] \cup [k+1,+\infty).$$

Théorème 1.2. *Soient $\varepsilon > 0$, $\delta \in]0,\pi^2/2[$ et une suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant (H). Il existe des constantes positives c_1 et c_2 telles que pour tout couple (x,y) dans $(1{\cdot}2)$ satisfaisant à $u \in \mathcal{C}_{k+1}\big(6\sqrt{\log y}/c_1\big)$ et $1 \leqslant B \leqslant Y^{c_1}$, on a l'estimation asymptotique*

$$\begin{aligned} A(x,y) - \sum_{j=0}^k \alpha_j \frac{X_j}{(\log y)^j} \ll \Psi(x,y)\|A\|_1 k!\Big\{\Big(\frac{M_3\log(u+1)}{\log y}\Big)^{k+1} + \frac{1}{B^{1-\varepsilon}}\Big\} + \Psi(x,y)R_B \\ + \Psi(x,y)\|A\|_1\eta(q_1)\frac{\sqrt{q_1}(\log q_1)H(u)^{-\delta}}{\varphi(q_1)(\log y)x^{1-\beta}} \end{aligned}$$

valable uniformément pour $0 \leqslant k \leqslant c_2\sqrt{\log y}/(\log\log y)$.

Remarques. 1– On remarque qu'en général les techniques usuelles de crible ne sont pas efficaces dans des problèmes sur les entiers friables. C'est donc peut être surprenant à première vue que des hypothèses de type (H) apparaissent dans ce contexte. On pourra se convaincre qu'elles sont indispensables lorsque l'on choisit $k \geqslant 1$.[1] Il est à noter que le terme principal ne dépend pas de B. Il faut donc choisir B pour minimiser le majorant.

2– Il est divertissant de regarder le cas $a_n = 1$. Nous avons alors $h(d) = 1$ et donc $\alpha_j = b_j'(1)$. De plus comme $|r(x,d)| \leqslant 1$, on a $R_B \ll (\log 2B)/x$ ce qui est négligeable. Puisque $X_j = x\varrho^{(j)}(u) - X_{j+1} + O\big(\Psi(x,y)/Y^{c_1}\big)$ et $b_j'(1) = b_j(1) + b_{j-1}(1)$, nous pouvons approcher la somme en j par

$$x\sum_{j=0}^k b_j(1)\frac{\varrho^{(j)}(u)}{(\log y)^j}$$

1. En comparant par exemple la densité des entiers y-friables $\leqslant x$ avec celle des entiers pairs y-friables $\leqslant x$.

ce qui est le terme attendu. En fait, les seules différences par rapport au développement obtenu par Saias [13] provient du domaine en u et du terme d'erreur provenant de l'éventuel zéro de Siegel. En effet, d'après Saias (voir Notes du chapitre III.5 de [14]), on connait un développement avec un terme d'erreur $O(x((\log(u+1)/\log y)^{k+1})$ dans $\mathcal{C}_k(\log y)$ lorsque k est fixé.

3–Dans le domaine (1·2), une application immédiate de [4] fournit uniformément par rapport à la suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ l'estimation

$$A(x,y)=\varrho(u)A(x,x)+O\Big(\|A\|_1\Psi(x,y)\frac{\log(u+1)}{\log y}\Big). \tag{1·10}$$

La présence de $\|A\|_1$ est attendue puisqu'elle provient d'une estimation de $E(x,y;-\vartheta)$ dans la formule (1·4). L'estimation (1·10) s'applique principalement pour les sommes d'ensembles[2]. Nous obtenons donc dans (1·2)

$$\frac{1}{|A||B|}\operatorname{card}\{(a,b)\in A\times B\,:\,P(a+b)\leqslant y\}=\varrho(u)\Big\{1+O\Big(\frac{x\log(u+1)}{\sqrt{|A||B|}\log y}\Big)\Big\}. \tag{1·11}$$

Lorsque A et B sont des ensembles denses, autrement dit lorsque $|A|\gg x$ et $|B|\gg x$, le terme d'erreur est le même que celui donné par la formule (1·6).

Remerciements : Le deuxième auteur est partiellement soutenu par une bourse du Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada. Ce travail a été réalisé lors du séjour à Paris du deuxième auteur. Il a reçu à cette occasion le soutien de l'Université Paris–Diderot, de l'Université Pierre et Marie Curie, de l'Université d'Orsay et de la Fondation Sciences Mathématiques de Paris. Que toutes ces institutions soient ici remerciées. Le premier auteur est membre junior de l'IUF depuis octobre 2011. Les auteurs remercient Gérald Tenenbaum pour ses conseils avisés.

2. Estimation précise de $\Psi(x,y)$ et conséquence

2·1. Estimation précise de $\Psi(x,y)$

Afin d'améliorer ce résultat, nous considérons des estimations plus précises que celle de Hildebrand. L'estimation de Saias (cf. [14]) valable dans (H_ε) s'écrit

$$\Psi(x,y)=\Lambda(x,y)+O(\Psi(x,y)L_\varepsilon(y)^{-1}) \tag{2·1}$$

avec

$$\Lambda(x,y):=\begin{cases} x\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varrho(u-v)\,\mathrm{d}\big([y^v]/y^v\big) & (x\in\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Z}^+),\\ \Lambda(x+0,y) & (x\in\mathbb{Z}^+),\end{cases}$$

et $L_\varepsilon(y):=\exp\{(\log y)^{3/5-\varepsilon}\}$. Notons aussi que l'on peut obtenir un développement de $\Lambda(x,y)$ en puissance négative de $\log y$ avec une précision de l'ordre de

$$O\Big(x\varrho(u)\frac{(\log u+1)^n}{(\log y)^n}\Big)$$

pourvu que x ne soit pas proche en un certain sens de y^k avec $k\leqslant n+1$ (voir le corollaire de [13] pour un énoncé précis ou les notes du chapitre III.5 de [14]).

2. Dans le cas de $a_n=1$, on a $\|A\|_1\asymp\log x$ ce qui fournit un résultat trivial.

La mesure $\mathrm{d}\Lambda(t,y)$ peut se décomposer sous la forme d'une somme de deux mesures. Nous avons

$$\mathrm{d}\Lambda(t,y)=\lambda(t,y)\,\mathrm{d}t-t\,\mathrm{d}(\{t\}/t),$$

avec

$$\lambda(t,y):=\frac{\Lambda(t,y)}{t}+\frac{1}{\log y}\int_{-\infty}^{+\infty}\varrho'(u(t)-v)\,\mathrm{d}\Big(\frac{[y^v]}{y^v}\Big),$$

où $u(t):=(\log t)/(\log y)$.

Une intégration par parties (voir [4]) permet d'écrire lorsque $t\geqslant y$

$$\lambda(t,y)=\varrho(u(t))+\frac{\varrho'(u(t))}{\log y}+\frac{y\{t/y\}}{t\log y}-\int_0^{u(t)-1}\Big(\varrho'(u(t)-v)+\frac{\varrho''(u(t)-v)}{\log y}\Big)\frac{\{y^v\}}{y^v}\,\mathrm{d}v. \tag{2·2}$$

Ainsi la quantité $\lambda(n,y)$ peut être considérée comme une approximation précise de la probabilité qu'un entier n soit y-friable. Elle est plus précise que $\varrho(u(n),y)$ tout en vérifiant (voir corollaire III.5.18 de [14])

$$\lambda(x,y)=\varrho(u)\Big\{1+O_\varepsilon\Big(\frac{\log(u+1)}{\log y}\Big)\Big\} \tag{2·3}$$

lorsque $x\geqslant 2$ et $(\log x)^{1+\varepsilon}\leqslant y\leqslant x$.

Dans la section 3 de cet article, nous expliquerons que le terme asymptotique heuristique pour $A(x,y)$ est $A_B(x,y)$ avec

$$A_B(x,y)=\sum_{P(q)\leqslant B}J(q;x,y), \tag{2·4}$$

et

$$J(q;x,y):=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{d|q}\mu\Big(\frac{q}{d}\Big)d\sum_{\substack{n\leqslant x\\ d|n}}a_n\lambda_q(n,y), \tag{2·5}$$

où

$$\lambda_q(n,y):=\sum_{k|q}\mu\Big(\frac{q}{k}\Big)\lambda\Big(\frac{n}{k},y\Big). \tag{2·6}$$

Plus le paramètre B est grand, plus cette estimation est précise. La principale étape de la démonstration du Théorème 1.2 est de démontrer que $A(x,y)$ est effectivement bien approché par $A_B(x,y)$. À la Proposition 2.2, nous établirons un développement de $A_B(x,y)$ suivant les puissances de $1/\log y$ pourvu que x ne soit pas proche en un certain sens de y^k.

Proposition 2.1. *Soient $\varepsilon>0$ et $\delta\in]0,\pi^2/2[$ fixés, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes. Il existe des constantes $c_j>0$ telles que pour tout couple (x,y) satisfaisant à (1·2) et $x\geqslant yY^{c_3}$ on ait lorsque $1\leqslant B\leqslant Y^{c_1}$ l'estimation*

$$A(x,y)-A_B(x,y)\ll\|A\|_1\Psi(x,y)\Big(\frac{1}{B^{1-\varepsilon}}+\eta(q_1)\frac{\sqrt{q_1}(\log q_1)H(u)^{-\delta}}{\varphi(q_1)(\log y)x^{1-\beta}}\Big).$$

De plus, sous les mêmes conditions et pour ε fixé, nous avons

$$\begin{aligned}A_{Y^{c_1}}(x,y)&=A_B(x,y)+O\Big(\|A\|_1\frac{\Psi(x,y)}{B^{1-\varepsilon}}\Big)\\&=\sum_{q\leqslant B}J(q;x,y)+O\Big(\|A\|_1\frac{\Psi(x,y)}{B^{1-\varepsilon}}\Big).\end{aligned}$$

Remarques. (i) Le choix du domaine (1·2) vient du fait que nous avons dans celui-ci la majoration

$$\frac{x}{Y^c} \ll \frac{\Psi(x,y)}{Y^{c/2}}.$$

La condition $x \geqslant yY^{c_3}$ permet d'éviter les problèmes liés à la discontinuité de $\varrho'(u)$ en $u=1$. Elle simplifie de nombreuses étapes techniques. Cela permet dans de nombreuses situations de négliger le terme $y\{t/y\}/(t\log y)$ qui apparaît dans le développement (2·2).

(ii) L'estimation (1·10) correspond à l'approximation de $A(x,y)$ par $A_1(x,y)$ puisque, d'après (2·3), nous avons

$$A_1(x,y) = J(1;x,y) = \sum_{n\leqslant x} a_n\lambda(n,y) = \varrho(u)A(x,x)\Big\{1+O\Big(\frac{\log(u+1)}{\log y}\Big)\Big\}.$$

(iii) La Proposition 2.1 est particulièrement efficace pour les sommes d'ensembles. Soient A et B deux sous-ensembles d'entiers de $[1,x]$ et a_n défini par (1·5). Dans ce cas, nous avons $\|A\|_1 \leqslant \sqrt{|A||B|}$. Compte tenu de (1·11), le terme d'erreur donné par la Proposition 2.1 est donc négligeable par rapport au terme principal attendu lorsque la quantité

$$\frac{x}{\sqrt{|A||B|}}\Big(\frac{1}{Y^{c_1}} + \eta(q_1)\frac{\sqrt{q_1}(\log q_1)H(u)^{-\delta}}{\varphi(q_1)(\log y)x^{1-\beta}}\Big)$$

tend vers zéro. Cela permet par exemple de conclure lorsque A et B sont l'ensemble des nombres premiers inférieurs à x ce qui n'était pas possible avec seulement (1·10).

En revanche, les estimations fournies par la Proposition 2.1 ne sont pas satisfaisantes si $A=B=S(x,y)$ dans une large partie du domaine (1·2). Elles ne le sont que si la quantité

$$\eta(q_1)\frac{\sqrt{q_1}(\log q_1)H(u)^{-\delta}}{\varphi(q_1)(\log y)x^{1-\beta}\varrho(u)}$$

tend vers zéro ce qui, compte-tenu de nos connaissances sur le zéro de Siegel, ne peut être affirmé que dans un sous-domaine (1·3) lorsque ε est un paramètre strictement positif qui peut être choisi >1 contrairement à dans (1·3).

Nous démontrons la Proposition 2.1 grâce à des estimations de $E(x,y;\vartheta)$ développée section 4 qui découlent directement de [3] et [4].

La Proposition 2.1 doit être complétée par une estimation de $A_B(x,y)$. Grâce à la seconde partie de la Proposition 2.1, nous pouvons nous restreindre à une somme de $J(q;x,y)$ où q est de taille contrôlée. La proposition suivante permet d'en déduire le Théorème 1.2.

Proposition 2.2. *Soient $\varepsilon>0$ fixé et une suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant (H). Pour tout couple (x,y) dans (1·2) satisfaisant à $u\in\mathcal{C}_{k+1}\big(6\sqrt{\log y}/c_1\big)$ et $1\leqslant B\leqslant Y^{c_1}$, on a l'estimation asymptotique*

$$A_B(x,y) = \sum_{j=0}^{k}\alpha_j\frac{X_j}{(\log y)^j} + O\Big(\Psi(x,y)\|A\|_1 k!\Big\{\Big(\frac{M_3\log(u+1)}{\log y}\Big)^{k+1} + \frac{1}{B^{1-\varepsilon}}\Big\} + \Psi(x,y)R_B\Big)$$

valable uniformément pour $0\leqslant k\leqslant c_2\sqrt{\log y}/(\log\log y)$.

2·2. Estimations complémentaires

Nous avons

$$\lambda_q(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\varrho(u-v)+\frac{\varrho'(u-v)}{\log y}\Big)\,\mathrm{d}S_q(y^v)$$

lorsque $x\notin\mathbb{Z}$ et $\lambda_q(x,y)=\lambda_q(x+0,y)$ sinon.

Le théorème 1 et le lemme 7 de [3] fournissent immédiatement l'estimation de $\lambda_q(x,y)$ suivante (voir aussi [6]).

Lemme 2.3 ([3]). *Il existe des constantes $c_2>0$ et $M_1>0$ telles que pour tout couple (x,y) dans (1·2), q satisfaisant à $u\in\mathcal{C}_{k+1}\big(5\log y/(6+\log q)\big)$ et $1\leqslant q\leqslant Y^{c_1}$ l'estimation asymptotique*

$$\lambda_q(x,y)=\sum_{j=0}^{k}b_j'(q)\frac{\varrho^{(j)}(u)}{(\log y)^j}+O\Big(\varrho(u)\frac{2^{\omega(q)}}{\varphi(q)}\Big(M_1\frac{(\log 2q)\log(u+1)}{\log y}\Big)^{k+1}\Big)\tag{2·7}$$

soit valable uniformément pour $0\leqslant k\leqslant c_2\sqrt{\log y}/(\log\log y)$.
En particulier, lorsque $x/y\geqslant y^{\varepsilon_{1,1}(5\log y/(6+\log q))}$ dans (1·2) et $q\geqslant 2$, on a la majoration

$$\lambda_q(x,y)\ll\varrho(u)\frac{2^{\omega(q)}(\log q)\log(u+1)}{\varphi(q)\log y}.$$

Remarque. La dernière majoration correspond à $k=0$.

Puisque $b_j'(q)=0$ si $j\leqslant\omega(q)-1$ et $q\geqslant 2$ (cf. le lemme 1 de [3]), les premiers termes de ce développement sont nuls lorsque $\omega(q)$ est grand. La proposition suivante contient les résultats concernant les $b_j'(q)$ déduits de ceux relatifs aux $b_j(q)$ contenus dans le lemme 1 de [3].

Lemme 2.4 ([3]). (i) *Nous avons $b_0(q)=b_0'(q)=0$ lorsque $q\geqslant 2$ alors que $b_0(1)=b_0'(1)=1$.*

(ii) *Soit $q\geqslant 2$. (Pour tout $k\leqslant\ell$, $b_k'(q)=0$) $\Longleftrightarrow$ ($\ell\leqslant\omega(q)-1$).*

(iii) *Pour tout $q\geqslant 2$, on a $b'_{\omega(q)}(q)=(-1)^{\omega(q)}\big(\prod_{p\mid q}\log p\big)/\varphi(q)$.*

(iv) *Il existe une constante $M_2>0$ telle que l'on ait pour tout $q\geqslant 1$ et tout $k\in\mathbb{N}$,*

$$|b_k'(q)|\leqslant M_2^k|b_{\omega(q)}(q)|(\log 2q)^{k-\omega(q)}\leqslant M_2^k\frac{(\log 2q)^k}{\varphi(q)}.$$

3. Raisonnement probabiliste

3·1. Estimation heuristique de $A(x,y)$

Lorsque $B\geqslant 1$ et n est un entier générique, nous notons n_B le plus grand diviseur B-friable de n. Heuristiquement, la probabilité qu'un entier m vérifie $m_B=r$ est égale à

$$\frac{1}{r}\prod_{p\leqslant B}\Big(1-\frac{1}{p}\Big).$$

Heuristiquement, la probabilité qu'un entier m de la taille de n soit friable et tel que $m_B=r$ est égale à

$$\begin{aligned}&=\sum_{P(d)\leqslant B}\mu(d)\mathbb{P}(m\,:\,rd\mid m,P(m)\leqslant y)\\&=\sum_{P(d)\leqslant B}\frac{\mu(d)}{rd}\lambda\Big(\frac{n}{rd},y\Big).\end{aligned}$$

La valeur de la somme $A(x,y)$ est donc heuristiquement attendue égale à $A'_B(x,y)$ où

$$A'_B(x,y) := \prod_{p\leqslant B}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{-1}\sum_{P(r)\leqslant B}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n_B=r}}a_n\sum_{P(d)\leqslant B}\frac{\mu(d)}{d}\lambda\Big(\frac{n}{rd},y\Big).$$

Lemme 3.1. *Lorsque $B\geqslant 2$ et $x\geqslant y\geqslant 2$, nous avons*

$$A'_B(x,y) = A_B(x,y),$$

où $A_B(x,y)$ a été défini en (2·4).

Démonstration. Commençons par trier les entiers n en fonction de leur valeur de n_B. Il vient

$$A_B(x,y) = \sum_{P(r)\leqslant B}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n_B=r}}a_n\sum_{P(k)\leqslant B}\lambda\Big(\frac{n}{k},y\Big)c(r,k;B),$$

avec

$$c(r,k;B) := \sum_{d\mid r}d\sum_{\substack{P(q)\leqslant B\\ [d,k]\mid q}}\frac{\mu(q/d)\mu(q/k)}{\varphi(q)}.$$

Cette somme est multiplicative et s'écrit sous forme de produit eulérien

$$\prod_{\substack{p\leqslant B\\ p^\beta\| r,p^\kappa\| k}}c_p(\beta,\kappa;B),$$

avec

$$c_p(\beta,\kappa;B) = \sum_{0\leqslant\delta\leqslant\beta}p^\delta\sum_{\mu\geqslant\max\{\delta,\kappa\}}\frac{\mu(p^{\mu-\delta})\mu(p^{\mu-\kappa})}{\varphi(p^\mu)}.$$

Plaçons-nous dans le cas $p\leqslant B$. Nous avons

$$c_p(0,0;B) = 1+\frac{1}{p-1} = \frac{1}{1-1/p}.$$

Lorsque $\beta\geqslant 1$, nous avons

$$c_p(\beta,0;B) = 1+\frac{1}{p-1}-\frac{p}{p-1} = 0.$$

Lorsque $\kappa\geqslant 1$ et $\beta\geqslant\kappa+1$,

$$c_p(\beta,\kappa;B) = p^{\kappa-1}\frac{-1}{p^\kappa(1-1/p)}+p^\kappa\frac{1+1/p}{p^\kappa(1-1/p)}+p^{\kappa+1}\frac{-1}{p^{\kappa+1}(1-1/p)} = 0.$$

Ainsi $\beta\leqslant\kappa$ et donc $r\mid k$. On écrit $k=rs$ et il est clair aussi que cette quantité est nulle en dehors de $\mu^2(s)=1$. Lorsque $\beta\geqslant 1$,

$$c_p(\beta,\beta;B) = p^{\beta-1}\frac{-1}{p^\beta(1-1/p)}+p^\beta\frac{1+1/p}{p^\beta(1-1/p)} = \frac{1}{1-1/p}.$$

Lorsque $\beta\geqslant 0$, nous avons

$$c_p(\beta,\beta+1;B) = p^\beta\frac{-1}{p^{\beta+1}(1-1/p)} = \frac{-1}{p-1}.$$

En rassemblant ces résultats, nous obtenons que $k = sr$ et

$$c(r, sr; B) = \prod_{p \leqslant B} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{-1} \frac{\mu(s)}{s}$$

ce qui implique bien l'égalité $A_B(x, y) = A'_B(x, y)$. □

3·2. Estimation heuristique de sommes d'exponentielles

Nous cherchons l'heuristique concernant les sommes $E_f(x; a/q) := \sum_{n \leqslant x} f(n)\mathrm{e}(an/q)$ lorsque f est une fonction arithmétique. Soit

$$\begin{aligned} R_f(x; a/q) &:= \sum_{1 \leqslant b \leqslant q} \mathrm{e}\Big(\frac{ab}{q}\Big)\Big\{ \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \equiv b (\mathrm{mod}\, q)}} f(n) - \frac{1}{\varphi(q/(q,b))} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ (n,q)=(b,q)}} f(n)\Big\} \\ &= \sum_{m|q} \sum_{\substack{c=1 \\ (c,m)=1}}^{m} \mathrm{e}\Big(\frac{ac}{m}\Big)\Big(\sum_{\substack{n \leqslant xm/q \\ n \equiv c (\mathrm{mod}\, m)}} f\Big(\frac{nq}{m}\Big) - \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\substack{n \leqslant xm/q \\ (n,m)=1}} f\Big(\frac{nq}{m}\Big)\Big). \end{aligned}$$

Si f est bien répartie sur les petites progressions arithmétiques, alors $R_f(x; a/q)$ sera un terme d'erreur.

Un calcul fournit la formule suivante.

Lemme 3.2. *Lorsque* $(a, q) = 1$, *on a*

$$E_f(x; a/q) = \sum_{k|q} \frac{\mu(q/k)k}{\varphi(q)} \sum_{n \leqslant x/k} f(nk) + R_f\Big(x; \frac{a}{q}\Big).$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned} E_f\Big(x; \frac{a}{q}\Big) &= \sum_{b=1}^{q} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \equiv b (\mathrm{mod}\, q)}} f(n)\mathrm{e}\Big(\frac{an}{q}\Big) \\ &= \sum_{m|q} \sum_{\substack{c=1 \\ (c,m)=1}}^{m} \mathrm{e}\Big(\frac{ac}{m}\Big) \sum_{\substack{n \leqslant x \\ q/m|n \\ nm/q \equiv c (\mathrm{mod}\, m)}} f(n) \\ &= \sum_{m|q} \sum_{\substack{c=1 \\ (c,m)=1}}^{m} \mathrm{e}\Big(\frac{ac}{m}\Big) \sum_{\substack{n \leqslant xm/q \\ n \equiv c (\mathrm{mod}\, m)}} f\Big(\frac{nq}{m}\Big). \end{aligned}$$

Nous pouvons donc écrire

$$E_f\Big(x; \frac{a}{q}\Big) = M_f\Big(x; \frac{a}{q}\Big) + R_f\Big(x; \frac{a}{q}\Big)$$

avec

$$M_f\Big(x; \frac{a}{q}\Big) := \sum_{m|q} \frac{\mu(m)}{\varphi(m)} \sum_{\substack{n \leqslant xm/q \\ (n,m)=1}} f\Big(\frac{nq}{m}\Big).$$

Une inversion de Möbius fournit alors

$$\begin{aligned} M_f(x;a/q) &= \sum_{m|q} \frac{\mu(m)}{\varphi(m)} \sum_{r|m} \mu(r) \sum_{n\leqslant xm/rq} f\Big(\frac{nqr}{m}\Big) \\ &= \sum_{k|q} w(k,q) \sum_{n\leqslant x/k} f(nk), \end{aligned}$$

avec

$$w(k,q) := \sum_{m|q} \frac{\mu(m)}{\varphi(m)} \sum_{\substack{r|m\\ qr=mk}} \mu(r).$$

Nous obtenons facilement

$$w(k,q) = \sum_{r|q} \frac{\mu(qr/k)\mu(r)}{\varphi(qr/k)} = \frac{\mu(q/k)k}{\varphi(q)},$$

ce qui implique bien

$$M_f\Big(x;\frac{a}{q}\Big) = \sum_{k|q} \frac{\mu(q/k)k}{\varphi(q)} \sum_{n\leqslant x/k} f(nk).$$

□

4. Estimation de sommes d'exponentielles

Dans l'étude de la densité des entiers friables, un rôle crucial est joué par la fonction ϱ de Dickman mais aussi par la fonction de Buchstab ω l'unique solution continue pour $u > 1$ de l'équation différentielle aux différences $(u\omega(u))' = \omega(u-1)$ $(u > 2)$ avec la condition initiale $u\omega(u) = 1$ $(u \in [1,2])$ et $\omega(u) = 0$ $(u < 1)$.

Au vu du Lemme 3.2 appliqué lorsque $f(n)$ est la fonction caractéristique des entiers friables, la somme $E(x,y;a/q)$ est approchée heuristiquement lorsque $(a,q) = 1$ et $P(q) \leqslant y$ par

$$V_q(x,y) := \sum_{k|q} \frac{\mu(q/k)k}{\varphi(q)} \Lambda\Big(\frac{x}{k},y\Big), \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{4·1}$$

Nous utiliserons aussi les notations

$$K(x,\chi) := \sum_{n\leqslant x} \chi(n)$$

et $\tau(\chi) := \sum_{n=1}^{q} \chi(n)\mathrm{e}(n/q)$ la somme de Gauss associée à un caractère de module q. De plus, si $\eta(q_1) \neq 0$, nous introduisons

$$K'(t,q) := \sum_{r|q/q_1} \frac{\mu(r)\chi_1(r)}{\varphi(r)} K\Big(\frac{trq_1}{q},\, \chi_r\Big). \tag{4·2}$$

La Bretèche [3], précisant les résultats de Fouvry et Tenenbaum [6], a montré l'estimation suivante.

Théorème 4.1 ([3]). *Il existe des constantes $c_4 > 0$ et $c_5 > 0$ telles que pour tout couple (x, y) satisfaisant à (1·2) et pour tout couple d'entiers (a, q) tel que $(a, q) = 1$ et $2 \leqslant q \leqslant Y^{c_4}$, on ait*

$$E(x, y; a/q) = V_q(x, y) + \eta(q)\chi_1(a)W_q(x, y) + O\Big(\frac{\Psi(x, y)}{Y^{c_5}}\Big) \tag{4·3}$$

avec

$$W_q(x, y) := \frac{\tau(\chi_1)}{\varphi(q_1)}x^{\beta}\int_0^{\infty} y^{-\beta v}(\omega(u-v) - \mathrm{e}^{-\gamma})K'(y^v, q)\,\mathrm{d}v.$$

On a de plus pour toute constante $\delta \in]0, \frac{1}{2}\pi^2[$

$$W_q(x, y) \ll \Psi(x, y)x^{\beta-1}\frac{2^{\omega(q/q_1)}\sqrt{q_1}\log q}{\varphi(q)\log y}H(u)^{-\delta}.$$

Remarque. La définition du zéro de Siegel dans [3] est légèrement différente puisqu'il doit appartenir à une région de la forme $\{s \in \mathbb{C} : \sigma \geqslant 1 - b/(\log(q(|\tau| + 2))\}$. Il n'est pas difficile de changer la démonstration pour obtenir notre résultat. De plus, le facteur $2^{\omega(q)}$ intervenant dans le majorant de $W_q(x, y)$ a été changé en $2^{\omega(q/q_1)}$.

Une intégration par parties permet d'obtenir une estimation de $E(x, y; \vartheta)$ pour ϑ irrationnel. Nous notons

$$V_q(x, y; \eta) := \sum_{k|q}\frac{\mu(q/k)k}{\varphi(q)}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ k|n}}\mathrm{e}(\eta n)\lambda\Big(\frac{n}{k}, y\Big) \tag{4·4}$$

et

$$W_q(x, y; \eta) := \frac{\tau(\chi_1)}{\varphi(q_1)}\sum_{n\leqslant x}\mathrm{e}(\eta n)\frac{w_q(n, y)}{n^{1-\beta}}, \tag{4·5}$$

avec

$$w_q(t, y) := \int_0^{\infty} y^{-\beta v}f(u(t) - v)K'(y^v, q)\,\mathrm{d}v, \tag{4·6}$$

et

$$f(u) := \beta\big(\omega(u) - \mathrm{e}^{-\gamma}\big) + \frac{\omega'(u)}{\log y}. \tag{4·7}$$

Un développement asymptotique de $w_q(x, y)$ est donné au Lemme 6.5.

Nous rappelons certains résultats classiques. Nous définissons $\xi(u)$ l'unique solution de

$$1 + u\xi = \mathrm{e}^{\xi}. \tag{4·8}$$

Nous avons par exemple (cf. lemme III.5.8.1 de [14]) lorsque u tend vers l'infini

$$\xi(u) = \log(u\log u) + O\Big(\frac{\log\log u}{\log u}\Big).$$

Nous aurons besoin (voir corollaire III.5.8.4 de [14]) de la majoration

$$\varrho(u - v) \ll \varrho(u)\mathrm{e}^{v\xi(u)} \qquad (0 \leqslant v \leqslant u), \tag{4·9}$$

et de la majoration valable pour tout $\delta \in]0, \frac{1}{2}\pi[$ et $k \in \mathbb{N}$ fixés

$$|\omega(u) - \mathrm{e}^{-\gamma}| + |\omega^{(k)}(u)| \ll \varrho(u)H(u)^{-\delta} \qquad (u \geqslant 1). \tag{4·10}$$

Théorème 4.2. *Soit $\varepsilon > 0$. Il existe des constantes positives c_6, c_7 et c_8 telles que pour tout couple (x, y) satisfaisant à (1·2) avec de plus $x \geqslant yY^{(1+\varepsilon)c_6}$, $Q = [x/Y^{c_7}]$, $\vartheta = a/q+\eta$ avec $(a, q) = 1$, $|\eta| \leqslant 1/qQ$ et $1 \leqslant q \leqslant Y^{c_8}$, on ait*

$$E(x, y; \vartheta) = V_q(x, y; \eta) + \eta(q)\chi_1(a)W_q(x, y; \eta) + O\Big(\frac{\Psi(x, y)}{Y^{c_6}}\Big). \tag{4·11}$$

Pour toute constante $\delta \in]0, \frac{1}{2}\pi^2[$ fixée, $\eta \in \mathbb{R}$, (x, y) satisfaisant à (1·2), $1 \leqslant q \leqslant Y^{c_8}$, on a

$$W_q(x, y; \eta) \ll \Psi(x, y)\frac{x^{\beta-1}}{x\|\eta\| + 1}\,\frac{2^{\omega(q/q_1)}\sqrt{q_1}\log q}{\varphi(q)\log y}H(u)^{-\delta} + \frac{\Psi(x, y)}{Y^{c_6}}. \tag{4·12}$$

Pour tout couple (x, y) satisfaisant à (1·2), lorsque $\vartheta = a/q+\eta$ avec $(a, q) = 1$, $|\eta| \leqslant 1/qQ$ et $q \geqslant Y^{c_8}$, on a

$$E(x, y; \vartheta) \ll \frac{\Psi(x, y)}{Y^{c_6}}. \tag{4·13}$$

Démonstration. La majoration (4·13) découle directement du corollaire 3 de [3]. Lorsque $q \leqslant Y^{c_8}$, nous procédons de la même manière que dans la démonstration du théorème 2 de [3] sans chercher à estimer la contribution de chaque terme. Par souci de complétude, nous rappelons certaines étapes déjà rédigées dans [3] ou [4]. La condition $x \geqslant yY^{(1+\varepsilon)c_6}$ est là pour simplifier certains calculs et éviter les problèmes résultant des discontinuités des fonctions ϱ et ω.

Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned} E(x, y; \vartheta) &= \int_0^x \mathrm{e}(\eta t)\,\mathrm{d}E\Big(t, y; \frac{a}{q}\Big) \\ &= \int_Q^x \mathrm{e}(\eta t)\,\mathrm{d}E\Big(t, y; \frac{a}{q}\Big) + O\Big(\frac{\Psi(x, y)}{Y^{c_7}}\Big), \end{aligned} \tag{4·14}$$

puisque, lorsque (x, y) satisfait à (1·2), on a $\Psi(x/Y^{c_7}, y) \ll \Psi(x, y)Y^{-c_7/2}$.

Nous utilisons l'estimation (4·3) de $E(t, y; a/q)$ lorsque $Q \leqslant t \leqslant x$) pour évaluer l'intégrale. La contribution du terme d'erreur de l'estimation (4·3) vaut

$$\begin{aligned} \int_Q^x \mathrm{e}(\eta t)\,\mathrm{d}\{O(\Psi(t, y)Y^{-c_5})\} &\ll Y^{-c_5}\Big(\Psi(x, y) + |\eta|\int_0^x \Psi(t, y)\,\mathrm{d}t\Big) \\ &\ll \frac{\Psi(x, y)}{Y^{c_5}}(1 + |\eta|x) \ll \frac{\Psi(x, y)}{Y^{c_6}} \end{aligned} \tag{4·15}$$

quitte à supposer $4c_6 \leqslant 2c_7 \leqslant c_5$ puisque $|\eta|x \leqslant Y^{c_7}$. Nous avons donc

$$E(x, y; \vartheta) = \int_Q^x \mathrm{e}(\eta t)\,\mathrm{d}V_q(t, y) + \eta(q)\chi_1(a)\int_Q^x \mathrm{e}(\eta t)\,\mathrm{d}W_q(t, y) + O\Big(\frac{\Psi(x, y)}{Y^{c_6}}\Big).$$

Comme dans [3] (page 65), en utilisant de plus l'écriture (4·1), nous avons

$$\begin{aligned} \int_Q^x \mathrm{e}(\eta t)\,\mathrm{d}V_q(t, y) &= \sum_{k|q}\frac{\mu(q/k)k}{\varphi(q)}\int_Q^x \mathrm{e}(\eta t)\lambda\Big(\frac{t}{k}, y\Big)\frac{\mathrm{d}t}{k} + O\Big(\frac{q^2}{\varphi(q)^2}(\log x)(1 + |\eta|x)\Big) \\ &= \sum_{k|q}\frac{\mu(q/k)k}{\varphi(q)}\int_{Q/k}^{x/k} \mathrm{e}(k\eta t)\lambda(t, y)\,\mathrm{d}t + O\Big(\frac{\Psi(x, y)}{Y^{c_6}}\Big). \end{aligned}$$

Nous estimons maintenant l'intégrale pour $k = 1$ lorsque $|\eta| \leqslant 1/Q$ en faisant une intégration par parties. Un simple calcul analogue à ceux de [4] permet d'écrire

$$\mathrm{d}\Big(\lambda(t,y) - \frac{y\{t/y\}}{t\log y}\Big) = \lambda'(t,y)\,\mathrm{d}t \tag{4·16}$$

avec

$$\lambda'(t,y) \ll \varrho(u)\frac{\log(u+1)}{t\log y} \qquad (t\in[Q,x]).$$

La contribution du terme $\frac{y\{t/y\}}{t\log y}$ est d'après [4]

$$\int_Q^x \mathrm{e}(\eta t)\frac{y\{t/y\}}{t\log y}\,\mathrm{d}t \ll \frac{y\log(2x/y)}{\log y} \ll \frac{\Psi(x,y)}{Y^{c_6}},$$

puisque $x \geqslant yY^{c_6(1+\varepsilon)}$.

Après intégration par parties et l'approximation

$$\int_0^t \mathrm{e}(\eta v)\,\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{e}(\eta t)-1}{2\pi i\eta} = E(t,t;\eta) + O(1), \tag{4·17}$$

nous obtenons donc

$$\int_Q^x \mathrm{e}(\eta t)\lambda(t,y)\,\mathrm{d}t = E(x,x;\eta)\lambda(x,y) - \int_1^x E(t,t;\eta)\lambda'(t,y)\,\mathrm{d}t + O\Big(\frac{\Psi(x,y)}{Y^{c_6}}\Big).$$

Or, une interversion de sommation et des calculs analogues à ceux de [4] fournissent

$$\begin{aligned}
E(x,x;\eta)&\lambda(x,y) - \int_1^x E(t,t;\eta)\lambda'(t,y)\,\mathrm{d}t\\
&= \sum_{n\leqslant x}\mathrm{e}(\eta n)\Big(\lambda(x,y) - \int_n^x \lambda'(t,y)\,\mathrm{d}t\Big)\\
&= \sum_{n\leqslant x}\mathrm{e}(\eta n)\lambda(n,y) + \sum_{n\leqslant x}\mathrm{e}(\eta n)\int_{\max\{n,y\}}^x \mathrm{d}\Big(\frac{y\{t/y\}}{t\log y}\Big)\\
&= \sum_{n\leqslant x}\mathrm{e}(\eta n)\lambda(n,y) + \frac{y}{\log y}\sum_{y<n\leqslant x}\mathrm{e}(\eta n)\Big(\frac{\{x/y\}}{x} - \frac{\{n/y\}}{n}\Big),
\end{aligned}$$

avec

$$\frac{y}{\log y}\sum_{y<n\leqslant x}\mathrm{e}(\eta n)\Big(\frac{\{x/y\}}{x} - \frac{\{n/y\}}{n}\Big) \ll \frac{y\log(2x/y)}{\log y} \ll \frac{\Psi(x,y)}{Y^{c_6}}.$$

Nous aurons besoin de la majoration suivante

$$\begin{aligned}
\frac{y}{\log y}&\sum_{y<n\leqslant x}\mathrm{e}(\eta n)\Big(\frac{\{x/y\}}{x} - \frac{\{n/y\}}{n}\Big)\\
&\ll \frac{y}{\log y}\Big(\frac{1}{\|\eta\|x} + \sum_{1\leqslant k\leqslant x/y}\ \sum_{ky<n\leqslant\max\{(k+1)y,x\}}\frac{\mathrm{e}(\eta n)(n-ky)}{ny}\Big)\\
&\ll \frac{y}{\log y}\Big(\frac{1}{\|\eta\|x} + \sum_{1\leqslant k\leqslant 1/(\|\eta\|y)}\frac{1}{k} + \sum_{1/\|\eta\|y<k\leqslant x/y}\frac{1}{k\|\eta\|y}\Big)\\
&\ll \frac{\log(\|\eta\|x+2)}{\|\eta\|\log y}.
\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\int_Q^x \mathrm{e}(\eta t)\lambda(t,y)\,\mathrm{d}t = \sum_{n\leqslant x} \mathrm{e}(n\eta)\lambda(n,y) + O\Big(\frac{\Psi(x,y)}{Y^{c_6}}\Big). \tag{4·18}$$

De plus, nous avons pour tout $\eta \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n\leqslant x} \mathrm{e}(n\eta)\lambda(n,y) \ll \frac{\varrho(u)}{\|\eta\|} + \frac{\log(\|\eta\|x+2)}{\|\eta\|}. \tag{4·19}$$

En utilisant la majoration

$$\sum_{k\mid q} \frac{\mu(q/k)^2 k}{\varphi(q)} \leqslant \frac{q^2}{\varphi(q)^2}, \tag{4·20}$$

nous en déduisons après sommation sur k l'estimation lorsque $|\eta| \leqslant 1/(qQ)$

$$\begin{aligned}\int_Q^x \mathrm{e}(\eta t)\,\mathrm{d}V_q(t,y) &= \sum_{k\mid q} \frac{\mu(q/k)k}{\varphi(q)} \sum_{n\leqslant x/k} \mathrm{e}(kn\eta)\lambda(n,y) + O\Big(\frac{q^2\Psi(x,y)}{\varphi(q)^2 Y^{c_6}}\Big)\\ &= V_q(x,y;\eta) + O\Big(\frac{q^2\Psi(x,y)}{\varphi(q)^2 Y^{c_6}}\Big),\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la relation (4·4). Quitte à altérer la valeur de c_6, nous pouvons supprimer la dépendance en q dans le premier membre du terme d'erreur. De plus, les majorations (4·19) et (4·9) fournissent aussi lorsque $1/(qQ) \leqslant |\eta| \leqslant 1/(2k)$ et $q \leqslant Y^{c_6}$

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ k\mid n}} \mathrm{e}(\eta n)\lambda\Big(\frac{n}{k},y\Big) &\ll \frac{1}{k\|\eta\|}\varrho(u(x/k)) + \frac{\log(\|\eta\|x+2)}{k\|\eta\|}\\ &\ll k^{\xi(u)/\log y}\frac{qQ}{k}\varrho(u) + \frac{\log(\|\eta\|x+2)}{k\|\eta\|} \ll \frac{\Psi(x,y)}{Y^{c_6}},\end{aligned} \tag{4·21}$$

et donc lorsque $1/(qQ) \leqslant |\eta| \leqslant 1/(2q)$ et $q \leqslant y$

$$V_q(x,y;\eta) \ll \frac{\Psi(x,y)}{Y^{c_6}}. \tag{4·22}$$

Il reste à estimer la contribution de $W_q(x,y)$. Pour cela, nous avons besoin de majorations de $K'(t,q)$.

Lemme 4.3. *Lorsque $q \geqslant 2$, $q_1 \mid q$ et $t \geqslant 1$, on a*

$$K'(t,q) \ll \min\Big\{t^{1-1/(3\log q)}\frac{2^{\omega(q/q_1)}\varphi(q_1)}{\varphi(q)}, \sqrt{q_1}\log q \prod_{\substack{p\mid q\\ p\nmid q_1}}\Big(1+\frac{1}{\sqrt{p}}\Big)\Big\}.$$

De plus, pour tout couple (x,y) satisfaisant à (1·2), $1 \leqslant q \leqslant Y^{c_8}$, et $\delta \in]0, \frac12\pi[$ fixé, on a

$$w_q(x,y) \ll \varrho(u)H(u)^{-\delta}\frac{2^{\omega(q/q_1)}\varphi(q_1)\log q}{\varphi(q)\log y}, \tag{4·23}$$

où $w_q(x,y)$ a été défini par (4·6).

Démonstration. Cette majoration a été implicitement démontrée dans [3]. Par souci de complétude, nous donnons les détails. Nous avons

$$\sum_{r|q/q_1} \frac{\mu(r)^2\chi_1(r)^2 r}{\varphi(r)} = \prod_{\substack{p|q\\ p\nmid q_1}} \frac{2-1/p}{1-1/p} \leqslant \frac{2^{\omega(q/q_1)}\varphi(q_1)q}{\varphi(q)q_1}. \tag{4·24}$$

En distinguant le cas $t \leqslant q^4$ (majoration triviale) et $t > q^4$ (utilisation de l'inégalité de Pólya–Vinogradov) nous obtenons uniformément lorsque $r \mid q/q_1$

$$K\Big(\frac{trq_1}{q}, \chi_r\Big) \ll \frac{rq_1}{q} t^{1-1/(3\log q)}.$$

En sommant sur r et en utilisant l'inégalité (4·24), nous obtenons la majoration par le premier terme du minimum. La majoration par le second terme est obtenue par application de l'inégalité de Pólya–Vinogradov. Nous reportons la démonstration de (4·23) à la fin de la preuve du Théorème 4.2. □

D'après la formule (69) de [3], on a

$$\frac{\mathrm{d}W_q(t,y)}{\mathrm{d}t} = \frac{\tau(\chi_1)}{\varphi(q_1)} t^{\beta-1} w_q(t,y) + \frac{\tau(\chi_1)y^\beta}{\varphi(q_1)t\log y} K'\Big(\frac{t}{y}, q\Big). \tag{4·25}$$

D'après le Lemme 4.3, nous avons

$$\int_Q^x \mathrm{e}(\eta t)\frac{\tau(\chi_1)y^\beta}{\varphi(q_1)t\log y} K'\Big(\frac{t}{y}, q\Big)\,\mathrm{d}t \ll \frac{y^\beta}{\sqrt{\log y}}(\log q)\prod_{p|q}\Big(1+\frac{1}{\sqrt{p}}\Big) \ll \frac{\Psi(x,y)}{Y^{c_6}},$$

lorsque $x \geqslant yY^{(1+\varepsilon)c_6}$.

Il vient

$$\int_Q^x \mathrm{e}(\eta t)\,\mathrm{d}W_q(t,y) = \frac{\tau(\chi_1)}{\varphi(q_1)}\int_0^\infty y^{-\beta v} g(\eta, v; x, y)K'(y^v, q)\,\mathrm{d}v + O\Big(\frac{\Psi(x,y)}{Y^{c_6}}\Big),$$

avec

$$g(\eta, v; x, y) := \int_Q^x \mathrm{e}(\eta t)t^{\beta-1}f(u(t)-v)\,\mathrm{d}t.$$

Pour estimer précisément $g(\eta, v; x, y)$, nous faisons une intégration par parties qui est rendue délicate par les discontinuités de f en 1 et 2. Nous notons φ_1 et φ_2 les discontinuités en ces points qui sont clairement bornées.

Grâce à (4·10) et (4·9), nous avons lorsque $0 \leqslant v \leqslant u(t)$, $k \geqslant 0$ et $t \in [Q, x]$

$$|f^{(k)}(u(t)-v)| \ll \varrho(u(t))\mathrm{e}^{v(\xi(u)+2\delta)}H(u)^{-\delta}. \tag{4·26}$$

Nous obtenons après une sommation par parties grâce à (4·17)

$$g(\eta, v; x, y) = g_1(\eta, v; x, y) + g_2(\eta, v; x, y)$$

avec

$$\begin{aligned} g_1(\eta, v; x, y) &:= \Big[\frac{\mathrm{e}(\eta t)-1}{2\pi i\eta}t^{\beta-1}f(u(t)-v)\Big]_Q^x \\ &\quad - \int_Q^x \frac{\mathrm{e}(\eta t)-1}{2\pi i\eta}t^{\beta-2}\Big((\beta-1)f+\frac{f'}{\log y}\Big)(u(t)-v)\,\mathrm{d}t \\ g_2(\eta, v; x, y) &:= -\varphi_1\frac{y^{(\beta-1)(v+1)}}{\log y}\frac{\mathrm{e}(\eta y^{v+1})-1}{2\pi i\eta}\delta_{y^{v+1}\in[Q,x]} \\ &\quad - \varphi_2\frac{y^{(\beta-1)(v+2)}}{\log y}\frac{\mathrm{e}(\eta y^{v+2})-1}{2\pi i\eta}\delta_{y^{v+2}\in[Q,x]} \\ &\ll \frac{y^{\beta(v+1)}}{\log y}\big(\delta_{y^{v+1}\in[Q,x]} + y^\beta\delta_{y^{v+2}\in[Q,x]}\big), \end{aligned}$$

où $\delta_{y^{v+1}\in[Q,x]}$ vaut 1 si $y^{v+1}\in[Q,x]$ et 0 sinon. Grâce à (4·17), nous avons

$$\begin{aligned}g_1(\eta,v;x,y)&=\Big[E(t,t;\eta)t^{\beta-1}f(u(t)-v)\Big]_Q^x\\&\quad-\int_Q^x E(t,t;\eta)t^{\beta-2}\Big((\beta-1)f+\frac{f'}{\log y}\Big)(u(t)-v)\,\mathrm{d}t\\&\quad+O\Big(x^{\beta-1}\varrho(u)\mathrm{e}^{v(\xi(u)+2\delta)}H(u)^{-\delta}\Big)\\&=\sum_{n\leqslant x}\mathrm{e}(\eta n)n^{\beta-1}f(u(n)-v)+O\Big(x^{\beta-1}\varrho(u)\mathrm{e}^{v(\xi(u)+2\delta)}H(u)^{-\delta}\Big)\\&\quad+O\Big(\frac{y^{\beta(v+1)}}{\log y}\big(\delta_{y^{v+1}\in[Q,x]}+y^\beta\delta_{y^{v+2}\in[Q,x]}\big)\Big).\end{aligned}$$

Majorons la contribution du dernier terme d'erreur et celle de g_2. Grâce au Lemme 4.3, elles sont

$$\begin{aligned}&\ll\frac{2^{\omega(q/q_1)}\sqrt{q_1}}{\varphi(q)}\frac{y^\beta}{\log y}\Big(\int_{y^v\leqslant x/y}y^{v(1-1/(3\log q))}\,\mathrm{d}v+\int_{y^v\leqslant x/y^2}y^{v(1-1/(3\log q))+1}\,\mathrm{d}v\Big)\\&\ll\frac{2^{\omega(q/q_1)}\sqrt{q_1}}{\varphi(q)}\frac{y^\beta}{\log y}(x/y)^{1-1/(3\log q)}\ll\frac{\Psi(x,y)}{Y^{c_6}},\end{aligned}$$

lorsque $x\geqslant y^2$ par exemple. Lorsque $yY^{(1+\varepsilon)c_6}\leqslant x\leqslant y^2$, nous utilisons la deuxième majoration du Lemme 4.3 ce qui fournit mais aussi

$$\begin{aligned}&\ll\frac{q_1\log q}{\varphi(q_1)}\prod_{\substack{p\mid q\\ p\nmid q_1}}\Big(1+\frac{1}{\sqrt p}\Big)\frac{y^\beta}{\log y}\int_{Q/y<y^v\leqslant x/y}\mathrm{d}v\\&\ll\log q\prod_{p\mid q}\Big(1+\frac{1}{\sqrt p}\Big)\frac{y^\beta}{\sqrt{\log y}}\ll q^{o(1)}\frac{y^\beta}{\sqrt{\log y}}\ll\frac{\Psi(x,y)}{Y^{c_6}}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_Q^x\mathrm{e}(\eta t)\,\mathrm{d}W_q(t,y)=W_q(x,y;\eta)+O\Big(\frac{\Psi(x,y)}{Y^{c_6}}\Big).$$

De plus, lorsque $\eta\in[-\frac12,\frac12]$, nous avons la majoration

$$g(\eta,v;x,y)\ll\frac{x^\beta}{x|\eta|+1}\varrho(u)\mathrm{e}^{v(\xi(u)+2\delta)}H(u)^{-\delta}+\frac{y^{\beta(v+1)}}{\log y}\big(\delta_{y^{v+1}\in[Q,x]}+y^\beta\delta_{y^{v+2}\in[Q,x]}\big),$$

ce qui fournit grâce au Lemme 4.3

$$\begin{aligned}W_q(x,y;\eta)&\ll\frac{2^{\omega(q/q_1)}\sqrt{q_1}}{\varphi(q)}\frac{x^\beta}{x|\eta|+1}\varrho(u)H(u)^{-\delta}\int_0^\infty y^{-v\alpha}\,\mathrm{d}v+\frac{\Psi(x,y)}{Y^{c_6}}\\&\ll\frac{2^{\omega(q/q_1)}\sqrt{q_1}\log q}{\varphi(q)\log y}\frac{x^\beta}{x|\eta|+1}\varrho(u)H(u)^{-\delta}+\frac{\Psi(x,y)}{Y^{c_6}},\end{aligned}$$

où nous avons

$$\alpha:=-(1-\beta)-((\xi(u)+2\delta)/\log y)+1/(3\log q)\gg 1/\log q. \tag{4·27}$$

La démonstration de (4·23) s'obtient de la même manière. Grâce à (4·26) et au Lemme 4.3, nous obtenons

$$\begin{aligned}w_q(x,y)&\ll\varrho(u)H(u)^{-\delta}\frac{2^{\omega(q/q_1)}\varphi(q_1)}{\varphi(q)}\int_0^\infty y^{-v\alpha}\,\mathrm{d}v\\&\ll\varrho(u)H(u)^{-\delta}\frac{2^{\omega(q/q_1)}\varphi(q_1)\log q}{\varphi(q)\log y}.\end{aligned}$$

□

5. Friabilité des sommes de deux entiers friables

5·1. Un lemme auxiliaire

Dans ce paragraphe, nous estimons la quantité intervenant naturellement dans nos calculs

$$\sigma(k,n';x,y):=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ k|n}}\lambda\Big(\frac{n}{k},y\Big)\int_{-1/(2k)}^{1/(2k)}\mathrm{e}((n'-n)\eta)\,\mathrm{d}\eta. \tag{5·1}$$

Nous montrons le résultat suivant qui pourrait être un exemple utile dans d'autres applications liées à la méthode du cercle.

Lemme 5.1. *Lorsque* (x,y) *satisfait* (1·2), $n'\in\mathbb{N}$ *et* $k\leqslant Y^{c_1}$, *nous avons*

$$\sigma(k,n';x,y)=\frac{\lambda(n'/k,y)}{k}\mathbf{1}(n'\leqslant x)+O\Big(\frac{ky/(\log y)}{\min\{|x-n'|+1,|n'-k|,n'\}}\Big). \tag{5·2}$$

où $n'\mapsto\mathbf{1}(n'\leqslant x)$ *est la fonction caractéristique de l'intervalle* $[1,x]$.

Démonstration. Lorsque $k\mid n'$, on a

$$\sigma(k,n';x,y)=\frac{1}{k}\lambda\Big(\frac{n'}{k},y\Big)\mathbf{1}(n'\leqslant x). \tag{5·3}$$

Le cas $k\nmid n'$ demande un traitement plus subtil qui à la connaissance des auteurs est nouveau dans le cadre de la méthode du cercle. Nous avons

$$\sigma(k,n';x,y)=\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\ k|n}}\lambda\Big(\frac{n}{k},y\Big)\frac{\sin(\pi n'/k)(-1)^{n/k}}{\pi(n'-n)},$$

puisque dans ce cas $k\nmid n'$ nous avons toujours $n\neq n'$.

Nous avons

$$\begin{aligned}\sigma(k,n';x,y)&=\frac{\sin(\pi n'/k)}{\pi}\sum_{1\leqslant n\leqslant x/k}\frac{\lambda(n,y)(-1)^n}{n'-kn}\\&=\frac{\sin(\pi n'/k)}{\pi}\sum_{1\leqslant n\leqslant x/(2k)}\frac{-k\lambda(2n,y)+(n'-2kn)(\lambda(2n,y)-\lambda(2n+1,y))}{(n'-2kn)(n'-2kn-k)}\\&\quad+O\Big(\frac{k}{|x-n'|+1}\Big).\end{aligned}$$

Observons que, posant $\|\alpha\|:=\min_{n\in\mathbb{Z}}\{|\alpha-n|\}$, on a

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n|n-\alpha|}\ll\frac{\log x}{\alpha}+\frac{1}{\alpha\|\alpha\|}. \tag{5·4}$$

D'une part, d'après (4·16), nous avons

$$\begin{aligned}&\sum_{1\leqslant n\leqslant x/(2k)}\frac{(\lambda(2n,y)-\lambda(2n+1,y))}{(n'-2kn-k)}\\&\qquad\ll\sum_{1\leqslant n\leqslant x/(2k)}\frac{1}{|n'-2kn-k|n}+\frac{y}{\log y}\sum_{1\leqslant \ell\leqslant x/(2ky)}\frac{1}{\ell y|n'-2k[\ell y]-k|}\\&\qquad\ll\frac{k\log x}{|n'-k|}+\frac{ky/(\log y)}{|n'-k|}\ll\frac{ky/(\log y)}{|n'-k|},\end{aligned}$$

où nous avons appliqué (5·4) avec $\alpha = (n' - k)/(2k)$ (resp. $\alpha = (n' - k)/(2ky)$) et utilisé $\|\alpha\| \geqslant 1/(2k)$ (resp. $\|\alpha\| \geqslant 1/(2ky)$).

D'autre part, nous avons

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x/(2k)} \frac{-k(\lambda(2n,y) - \lambda(n'/k,y))}{(n'-2kn)(n'-2kn-k)} \ll \frac{ky/(\log y)}{n'}.$$

Enfin, nous avons l'estimation

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant n\leqslant x/(2k)} \frac{-k}{(n'-2kn)(n'-2kn-k)} &= \mathbf{1}(n' \leqslant x)\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{-k}{(n'-2kn)(n'-2kn-k)} \\ &\quad + O\Big(\frac{k}{\min\{|x-n'|+1, |n'-k|, n'\}}\Big).\end{aligned}$$

L'identité

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{z-n} \qquad (z \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{Z}),$$

fournit

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{-k}{(n'-2kn)(n'-2kn-k)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{(n'-kn)} = \frac{\pi}{\sin(\pi n'/k)k}.$$

En rassemblant ces résultats, nous obtenons lorsque $k \nmid n'$

$$\sigma(k,n';x,y) = \frac{\lambda(n'/k,y)}{k}\mathbf{1}(n' \leqslant x) + O\Big(\frac{ky/(\log y)}{\min\{|x-n'|+1, |n'-k|, n'\}}\Big).$$

□

5·2. Majoration de moments d'ordre 2

Nous aurons besoin d'une majoration de la norme L^2 de $V_q(x,y;\eta)$ et de $W_q(x,y;\eta)$. Les lemmes suivants fournissent des résultats suffisants pour nos besoins.

Lemme 5.2. *Pour tout couple (x,y) satisfaisant à (1·2) et $q \leqslant Y^{c_8}$, on a*

$$\int_0^1 |V_q(x,y;\eta)|^2 \,\mathrm{d}\eta \ll \Psi(x,y)\frac{\varrho(u)}{\varphi(q)}\Big(\frac{q}{\varphi(q)}\Big)^4.$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^1 |V_q(x,y;\eta)|^2 \,\mathrm{d}\eta &= \frac{1}{\varphi(q)^2}\sum_{n\leqslant x}\sum_{\substack{k_1|(n,q)\\k_2|(n,q)}} (k_1k_2)\mu(q/k_1)\mu(q/k_2)\lambda\Big(\frac{n}{k_1},y\Big)\lambda\Big(\frac{n}{k_2},y\Big) \\ &= \frac{1}{\varphi(q)^2}\sum_{\substack{k_1|q\\k_2|q}}(k_1k_2)\mu(q/k_1)\mu(q/k_2)\sum_{\substack{n\leqslant x\\ [k_1,k_2]|n}} \lambda\Big(\frac{n}{k_1},y\Big)\lambda\Big(\frac{n}{k_2},y\Big) \\ &\ll \frac{\Psi(x,y)\varrho(u)}{\varphi(q)^2}\sum_{\substack{k_1|q\\k_2|q}} \frac{k_1k_2}{[k_1,k_2]}\mu(q/k_1)^2\mu(q/k_2)^2.\end{aligned}$$

Le calcul

$$\sum_{\substack{k_1|q\\k_2|q}} \frac{k_1k_2}{[k_1,k_2]}\mu(q/k_1)^2\mu(q/k_2)^2 = \prod_{p^\nu\|q} p^\nu(1+3/p) \leqslant q(q/\varphi(q))^3$$

fournit alors le résultat. □

Lemme 5.3. *Soit $\delta \in]0, \frac{1}{2}\pi^2[$. Pour tout couple (x,y) satisfaisant à (1·2) et $q \leqslant Y^{c_8}$, si $\eta(q_1) \neq 0$ et $q_1 \mid q$, on a*

$$\int_0^1 |W_q(x,y;\eta)|^2 \,\mathrm{d}\eta \ll \frac{q_1 4^{\omega(q/q_1)}}{\varphi(q)^2}\Big(\frac{\log q}{\log y}\Big)^2 x^{2(\beta-1)}\Psi(x,y)\varrho(u)H(u)^{-2\delta}.$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^1 |W_q(x,y;\eta)|^2 \,\mathrm{d}\eta &= \frac{q_1}{\varphi(q_1)^2}\sum_{n\leqslant x}\frac{|w_q(n,y)|^2}{n^{2(1-\beta)}}\\ &\ll \frac{q_1 4^{\omega(q/q_1)}}{\varphi(q)^2}\Big(\frac{\log q}{\log y}\Big)^2 x^{2(\beta-1)}\Psi(x,y)\varrho(u)H(u)^{-2\delta},\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le Lemme 4.3. □

5·3. Démontration du Théorème 1.1

La première étape de l'estimation de $N(x,y)$ est résumée dans le lemme suivant.

Lemme 5.4. *Lorsque (x,y) satisfaisant à (1·2), nous avons*

$$N(x,y) = NV(x,y) + NW(x,y) + O\Big(\frac{\Psi(x,y)^2\varrho(u)}{Y^{c_6/2}}\Big), \tag{5·5}$$

avec

$$NV(x,y) := \sum_{q\leqslant Y^{c_8}} \varphi(q)\int_{-1/qQ}^{1/qQ} V_q(x,y;\eta)^2 V_q(x,y;-\eta)\,\mathrm{d}\eta,$$

$$NW(x,y) := \sum_{\substack{q\leqslant Y^{c_8}\\ \eta(q)=1}} \varphi(q)\int_{-1/qQ}^{1/qQ} \big(W_q(x,y;\eta)^2 V_q(x,y;-\eta) + 2|W_q(x,y;\eta)|^2 V_q(x,y;\eta)\big)\,\mathrm{d}\eta.$$

Remarque. Après la lecture de la démonstration qui suit et de celle de la Proposition 2.1, le lecteur se convaincra facilement que $AV(x,y)$ intervenant dans la formule (6·6) de la démonstration de la Proposition 2.1 n'est pas forcément approché par $NV(x,y)$ mais par $NV(x,y)$ auquel on ajouterait la contribution du premier terme de l'intégrale intervenant dans la définition de $NW(x,y)$. S'il n'y a pas de zéro de Siegel, alors $NW(x,y) = 0$ et $AV(x,y)$ et $NV(x,y)$ sont proches.

Démonstration. Nous écrivons

$$N(x,y) = \int_0^1 E(x,y;\vartheta)^2 E(x,y;-\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta.$$

Posons

$$\mathfrak{M}(q,Q) := \bigcup_{\substack{a=1\\ (a,q)=1}}^{q} \Big] -\frac{1}{qQ}+\frac{a}{q}, \frac{a}{q}+\frac{1}{qQ}\Big[\tag{5·6}$$

et $\mathfrak{M}'$ l'ensemble de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tel que, modulo 1, nous ayons

$$[0,1] = \cup_{q\leqslant Y^{c_8}}\mathfrak{M}(q,Q)\bigcup \mathfrak{M}'_1 \tag{5·7}$$

soit une réunion disjointe.

Nous appliquons le Théorème 4.2 pour les arcs majeurs c'est-à-dire pour $\vartheta \in \cup_{q\leqslant Y^{c_8}}\mathfrak{M}(q,Q)$. Appelons $R(x,y;\vartheta)$ le terme résiduel et $M(x,y;\vartheta)$ le terme principal de sorte que, lorsque $\vartheta = a/q+\eta$ avec $(a,q)=1$, $|\eta|\leqslant 1/qQ$ et $1\leqslant q\leqslant Y^{c_8}$, nous ayons

$$M(x,y;\vartheta) = V_q(x,y;\eta) + \eta(q)\chi_1(a)W_q(x,y;\eta).$$

Par commodité, nous posons $M(x,y;\vartheta)=0$ pour $\vartheta\in\mathfrak{M}_1'$ avec $\mathfrak{M}_1'$ défini par (5·7) de sorte que pour tout $\vartheta\in[0,1]$ nous ayons d'après le Théorème 4.2 la majoration $R(x,y;\vartheta)\ll \Psi(x,y)/Y^{c_6}$.

Posant

$$N_1(x,y) = \int_0^1 M(x,y;\vartheta)^2 M(x,y;-\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta,$$

nous avons

$$\begin{aligned} N(x,y)-N_1(x,y) &\ll \int_0^1 (|E(x,y;\vartheta)|^2+|M(x,y;\vartheta)|^2)|R(x,y;\vartheta)|\,\mathrm{d}\vartheta \\ &\ll \frac{\Psi(x,y)}{Y^{c_6}}(\Psi(x,y)+\|M\|_2^2), \end{aligned}$$

avec

$$\|M\|_2 := \Big(\int_0^1 |M(x,y;\vartheta)|^2\,\mathrm{d}\vartheta\Big)^{1/2}.$$

Nous utilisons les relations

$$\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}\chi_1(a)=0, \qquad \sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}\chi_1(a)^2=\varphi(q). \tag{5·8}$$

Il vient

$$\|M\|_2^2 = \sum_{q\leqslant Y^{c_8}}\varphi(q)\int_{-1/qQ}^{1/qQ}(|V_q(x,y;\eta)|^2+\eta(q)|W_q(x,y;\eta)|^2)\,\mathrm{d}\eta.$$

D'après le Lemme 5.2, nous avons

$$\sum_{q\leqslant Y^{c_8}}\varphi(q)\int_{-1/qQ}^{1/qQ}|V_q(x,y;\eta)|^2\,\mathrm{d}\eta \ll \Psi(x,y)\varrho(u)\sum_{q\leqslant Y^{c_8}}\Big(\frac{q}{\varphi(q)}\Big)^4 \ll \Psi(x,y)\varrho(u)Y^{c_8}.$$

D'après le Lemme 5.3, nous avons

$$\begin{aligned} &\sum_{q\leqslant Y^{c_8}}\eta(q)\varphi(q)\int_{-1/qQ}^{1/qQ}|W_q(x,y;\eta)|^2\,\mathrm{d}\eta \\ &\qquad\ll \Psi(x,y)\varrho(u)x^{2(\beta-1)}H(u)^{-2\delta}\sum_{\substack{q\leqslant Y^{c_8}\\ q_1|q}}\frac{q_1 4^{\omega(q/q_1)}}{\varphi(q)}\Big(\frac{\log q}{\log y}\Big)^2 \\ &\qquad\ll \Psi(x,y)\varrho(u)x^{2(\beta-1)}H(u)^{-2\delta}\frac{q_1}{\varphi(q_1)}\log y. \end{aligned}$$

En rassemblant ces résultats, nous obtenons

$$N(x,y) = N_1(x,y) + O\Big(\frac{\Psi(x,y)^2\varrho(u)}{Y^{c_6/2}}\Big)$$

pourvu que $c_8\leqslant \frac12 c_6$. En réutilisant encore les relations (5·8), nous obtenons

$$\begin{aligned} N_1(x,y) &= \sum_{q\leqslant Y^{c_8}}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}\int_{-1/qQ}^{1/qQ}M_q(x,y;a/q+\eta)^2M_q(x,y;a/q-\eta)\,\mathrm{d}\eta \\ &= NV(x,y)+NW(x,y), \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration de (5·5). □

La deuxième étape consiste à établir l'estimation de $NV(x,y)$ suivante. Pour cela, nous introduisons la fonction g définie par $g(k_1,k_2,k_3)=0$ si $2\nmid k_1k_2k_3$ et

$$g(k_1,k_2,k_3):=C\frac{k_1k_2}{[k_1,k_2,k_3]^2}\prod_{i=1}^3\mu\Big(\frac{[k_1,k_2,k_3]}{k_i}\Big)\prod_{\substack{p\mid k_1k_2k_3\\ p\nmid 2}}\frac{1}{1-2/p}\prod_{\substack{p\mid(k_1,k_2,k_3)\\ p\nmid k_1k_2k_3/(k_1,k_2,k_3)^3}}\Big(1-\frac{1}{p^2}\Big),$$

avec

$$C:=\prod_{p>2}\frac{1-2/p}{(1-1/p)^2}.$$

Lemme 5.5. *Il existe des constantes positives c_9 et c_{10} telles que lorsque (x,y) satisfait à (1·2) et $x\geqslant yY^{c_9}$, il existe $c_{10}>0$ tel que nous avons*

$$NV(x,y)=NV_1(x,y)+O\Big(\frac{\Psi(x,y)^2\varrho(u)}{Y^{c_{10}}}\Big),$$

avec

$$NV_1(x,y)=\sum_{(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{N}^3}g(k_1,k_2,k_3)\sum_{\substack{(n_1,n_2)\in\mathbb{N}^2\\ n_1+n_2\leqslant x\\ k_i\mid n_i}}\lambda\Big(\frac{n_1}{k_1},y\Big)\lambda\Big(\frac{n_2}{k_2},y\Big)\lambda\Big(\frac{n_1+n_2}{k_3},y\Big).$$

En particulier, lorsque (x,y) satisfait à (1·2) et $x\geqslant yY^{c_9}$, nous avons

$$NV(x,y)=\frac{\Psi(x,y)^3}{2x}\Big(1+O\Big(\frac{\log(u+1)}{\log y}\Big)\Big).$$

Remarque. À la manière de Saias [13], il est possible d'obtenir un développement de $NV(x,y)$ suivant les puissances négatives de $\log y$.

Démonstration. Pour estimer $NV(x,y)$, nous développons les sommes $V_q(x,y;-\eta)$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}NV(x,y)&=\sum_{q\leqslant Y^{c_8}}\sum_{k_3\mid q}\mu(q/k_3)k_3\int_{-1/qQ}^{1/qQ}V_q(x,y;\eta)^2\sum_{\substack{n_3\leqslant x\\ k_3\mid n_3}}\mathrm{e}(-n_3\eta)\lambda\Big(\frac{n_3}{k_3},y\Big)\,\mathrm{d}\eta\\ &=\sum_{q\leqslant Y^{c_8}}\sum_{k_3\mid q}\mu(q/k_3)k_3\int_{-1/(2k_3)}^{1/(2k_3)}V_q(x,y;\eta)^2\sum_{\substack{n_3\leqslant x\\ k_3\mid n_3}}\mathrm{e}(-n_3\eta)\lambda\Big(\frac{n_3}{k_3},y\Big)\,\mathrm{d}\eta\\ &\quad+O\Big(\frac{\Psi(x,y)^2\varrho(u)}{Y^{c_6/2}}\Big),\end{aligned}$$

où la somme en n_3 lorsque $|\eta|\ \in]1/qQ,1/(2k_3)]$ a été majorée grâce à (4·21) par $O(\Psi(x,y)/Y^{c_6})$ et l'intégrale a été majorée grâce au Lemme 5.2. En utilisant la notation (5·1) et en développant les sommes $V_q(x,y;\eta)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}NV(x,y)=\sum_{q\leqslant Y^{c_8}}&\sum_{\substack{(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{N}^3\\ k_i\mid q}}\mu(q/k_1)\mu(q/k_2)\mu(q/k_3)\frac{k_1k_2k_3}{\varphi(q)^2}\\ &\sum_{\substack{(n_1,n_2)\in\mathbb{N}^2\\ \max\{n_1,n_2\}\leqslant x\\ k_i\mid n_i}}\sigma(k_3,n_1+n_2;x,y)\lambda\Big(\frac{n_1}{k_1},y\Big)\lambda\Big(\frac{n_2}{k_2},y\Big)\\ &+O\Big(\frac{\Psi(x,y)^2\varrho(u)}{Y^{c_6/2}}\Big).\end{aligned}$$

Grâce à (5·2), nous pouvons remplacer $\sigma(k_3, n_1+n_2; x, y)$ par

$$\frac{1}{k_3}\lambda\Big(\frac{n_1+n_2}{k_3}, y\Big)\mathbf{1}(n_1+n_2 \leqslant x)$$

au prix d'un terme d'erreur majoré par

$$\ll xyuY^{2c_8} \ll \frac{\Psi(x,y)^2\varrho(u)}{Y^{c_6/2}},$$

pourvu que c_6 soit choisie suffisamment grande. Nous avons donc

$$NV(x,y) = \sum_{q\leqslant Y^{c_8}} \mathrm{nv}(x,y;q) + O\Big(\frac{\Psi(x,y)^2\varrho(u)}{Y^{c_6/2}}\Big),$$

$$\mathrm{nv}(x,y;q) := \sum_{\substack{(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{N}^3\\ k_i\mid q}} \mu(q/k_1)\mu(q/k_2)\mu(q/k_3)\frac{k_1k_2}{\varphi(q)^2} \sum_{\substack{(n_1,n_2)\in\mathbb{N}^2\\ n_1+n_2\leqslant x\\ k_i\mid n_i}} \lambda\Big(\frac{n_1}{k_1}, y\Big)\lambda\Big(\frac{n_2}{k_2}, y\Big)\lambda\Big(\frac{n_1+n_2}{k_3}, y\Big).$$

La majoration

$$\lambda\Big(\frac{n}{k}, y\Big) \ll \varrho(u(n/k)) \ll \varrho(u(n))k^{\xi(u)/\log y} \qquad (x/Y^{O(1)} < n \leqslant x)$$

fournit

$$\begin{aligned}\mathrm{nv}(x,y;q) &\ll \sum_{\substack{(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{N}^3\\ k_i\mid q}} \mu(q/k_1)^2\mu(q/k_2)^2\mu(q/k_3)^2\frac{(k_1k_2k_3)^{\xi(u)/\log y}}{\varphi(q)^2}x^2\varrho(u)^3\\ &\ll \Psi(x,y)^2\varrho(u)\frac{8^{\omega(q)}q^{3\xi(u)/\log y}}{\varphi(q)^2}.\end{aligned}$$

La somme en q de terme général $\mathrm{nv}(x,y;q)$ est donc convergente et lorsque $c_{10} \leqslant \frac{1}{2}\min\{c_8, c_6\}$ nous avons

$$NV(x,y) = \sum_{q=1}^{\infty}\mathrm{nv}(x,y;q) + O\Big(\frac{\Psi(x,y)^2\varrho(u)}{Y^{c_{10}}}\Big).$$

Une interversion de sommation fournit alors

$$\sum_{q=1}^{\infty}\mathrm{nv}(x,y;q) = \sum_{(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{N}^3} g(k_1,k_2,k_3) \sum_{\substack{(n_1,n_2)\in\mathbb{N}^2\\ n_1+n_2\leqslant x\\ k_i\mid n_i}} \lambda\Big(\frac{n_1}{k_1}, y\Big)\lambda\Big(\frac{n_2}{k_2}, y\Big)\lambda\Big(\frac{n_1+n_2}{k_3}, y\Big).$$

avec

$$\begin{aligned}g(k_1,k_2,k_3) &= \sum_{\substack{q\geqslant 1\\ [k_1,k_2,k_3]\mid q}} \mu(q/k_1)\mu(q/k_2)\mu(q/k_3)\frac{k_1k_2}{\varphi(q)^2}\\ &= \frac{k_1k_2}{\varphi([k_1,k_2,k_3])^2}\prod_{i=1}^{3}\mu\Big(\frac{[k_1,k_2,k_3]}{k_i}\Big)\prod_{p\nmid k_1k_2k_3}\frac{1-2/p}{(1-1/p)^2}\prod_{\substack{p\mid(k_1,k_2,k_3)\\ p\nmid k_1k_2k_3/(k_1,k_2,k_3)^3}}\Big(1-\frac{1}{p^2}\Big),\end{aligned}$$

qui est bien la valeur annoncée dans l'énoncé du Lemme 5.5.

De plus, nous pouvons vérifier les relations

$$\sum_{(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{N}^3} \frac{g(k_1,k_2,k_3)}{k_1k_2} = 1, \qquad \sum_{(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{N}^3} \frac{|g(k_1,k_2,k_3)|(k_1k_2k_3)^{1/4}}{k_1k_2} \ll 1.$$

En utilisant trois fois la formule (2·3) et l'estimation

$$\varrho(u(n)/k) = \varrho(u) + O\Big(\varrho(u)\frac{\log(u+1)\log(2kx/n)}{\log y}\Big),$$

valable lorsque $k \leqslant (\log y)^{O(1)}$ et (x,y) dans le domaine (1·2), nous obtenons

$$\sum_{\substack{(n_1,n_2)\in\mathbb{N}^2\\ n_1+n_2\leqslant x\\ k_i|n_i}} \lambda\Big(\frac{n_1}{k_1},y\Big)\lambda\Big(\frac{n_2}{k_2},y\Big)\lambda\Big(\frac{n_1+n_2}{k_3},y\Big) = \frac{\Psi(x,y)^3}{2k_1k_2x}\Big(1+O\Big(\frac{\log(u+1)\log(2k_1k_2k_3)}{\log y}\Big)\Big)$$

valable lorsque $k_1k_2 \leqslant (\log y)^8$ et (x,y) dans le domaine (1·2). Nous en déduisons l'estimation

$$NV(x,y) = \frac{\Psi(x,y)^3}{2x}\Big(1+O\Big(\frac{\log(u+1)}{\log y}\Big)\Big)$$

dans le domaine du Lemme 5.5 □

Enfin, il reste à majorer $NW(x,y)$.

Lemme 5.6. *Soit $\delta\in\,]0,\pi^2/2[$ fixé. Lorsque (x,y) satisfait à (1·2), nous avons*

$$NW(x,y) \ll \Psi(x,y)^2\varrho(u)\Big(\frac{q_1 2^{\omega(q_1)}(\log q_1)^2 H(u)^{-2\delta}}{\varphi(q_1)^2(\log y)^2x^{2(1-\beta)}} + \frac{1}{Y^{c_6/2}}\Big).$$

Démonstration. Pour estimer $NW(x,y)$, nous supposons $\eta(q_1)=1$ et nous développons les sommes $V_q(x,y;-\eta)$ et $V_q(x,y;\eta)$. Nous obtenons

$$NW(x,y) = NW_1(x,y) + 2NW_2(x,y),$$

avec

$$NW_1(x,y) := \sum_{\substack{q\leqslant Y^{c_8}\\ q_1|q}} \sum_{k_3|q} \mu(q/k_3)k_3 \int_{-1/qQ}^{1/qQ} \sum_{\substack{n_3\leqslant x\\ k_3|n_3}} \lambda\Big(\frac{n_3}{k_3},y\Big) W_q(x,y;\eta)^2 \mathrm{e}(-n_3\eta)\,\mathrm{d}\eta,$$

$$NW_2(x,y) := \frac{\tau(\chi_1)}{\varphi(q_1)} \sum_{\substack{q\leqslant Y^{c_8}\\ q_1|q}} \int_{-1/qQ}^{1/qQ} \sum_{n_3\leqslant x} V_q(x,y;\eta)W_q(x,y;\eta)\mathrm{e}(-n_3\eta)\frac{w_q(n_3,y)}{n_3^{1-\beta}}\,\mathrm{d}\eta.$$

Nous avons

$$NW_1(x,y) = \sum_{\substack{q\leqslant Y^{c_8}\\ q_1|q}} \sum_{k_3|q} \mu(q/k_3)k_3 \int_{-1/(2k_3)}^{1/(2k_3)} \sum_{\substack{n_3\leqslant x\\ k_3|n_3}} \lambda\Big(\frac{n_3}{k_3},y\Big) W_q(x,y;\eta)^2 \mathrm{e}(-n_3\eta)\,\mathrm{d}\eta$$
$$+ O\Big(\frac{\Psi(x,y)^2\varrho(u)}{Y^{c_6/2}}\Big).$$

Nous développons les sommes W_q. De la même manière que pour l'estimation de $NV(x,y)$, il vient

$$\begin{aligned}NW_1(x,y) &= \frac{\tau(\chi_1)^2}{\varphi(q_1)^2}\sum_{\substack{q\leqslant Y^{c_8}\\ q_1|q}}\sum_{k_3|q}\mu(q/k_3)k_3\sum_{\substack{n_1\leqslant x\\ n_2\leqslant x}}\frac{w_q(n_1,y)w_q(n_2,y)}{(n_1n_2)^{1-\beta}}\sigma(n_1+n_2,k_3;x,y)\\ &\quad+O\Big(\frac{\Psi(x,y)^2\varrho(u)}{Y^{c_6/2}}\Big)\\ &= \frac{\tau(\chi_1)^2}{\varphi(q_1)^2}\sum_{\substack{q\leqslant Y^{c_8}\\ q_1|q}}\sum_{k_3|q}\mu(q/k_3)\sum_{\substack{(n_1,n_2)\in\mathbb{N}^2\\ n_1+n_2\leqslant x}}\frac{w_q(n_1,y)w_q(n_2,y)}{(n_1n_2)^{1-\beta}}\lambda\Big(\frac{n_1+n_2}{k_3},y\Big)\\ &\quad+O\Big(\frac{\Psi(x,y)^2\varrho(u)}{Y^{c_6/2}}\Big).\end{aligned}$$

La majoration (4·23) fournit aisément

$$NW_1(x,y)\ll\Psi(x,y)^2\varrho(u)\Big(\frac{q_1 2^{\omega(q_1)}(\log q_1)^2H(u)^{-2\delta}}{\varphi(q_1)^2(\log y)^2x^{2(1-\beta)}}+\frac{1}{Y^{c_6/2}}\Big).$$

Grâce à (4·12) et aux Lemmes 5.2 et 5.3, nous avons

$$\begin{aligned}NW_2(x,y) &= \frac{\tau(\chi_1)}{\varphi(q_1)}\sum_{\substack{q\leqslant Y^{c_8}\\ q_1|q}}\varphi(q)\int_{-1/2}^{1/2}\sum_{n_3\leqslant x}V_q(x,y;\eta)W_q(x,y;\eta)\mathrm{e}(-n_3\eta)\frac{w_q(n_3,y)}{n_3^{1-\beta}}\,\mathrm{d}\eta\\ &\quad+O\Big(\frac{\Psi(x,y)^2\varrho(u)}{Y^{c_6/2}}\Big)\\ &= \frac{\tau(\chi_1)^2}{\varphi(q_1)^2}\sum_{\substack{q\leqslant Y^{c_8}\\ q_1|q}}\sum_{k_1|q}\mu(q/k_1)k_1\sum_{\substack{n_1+n_2\leqslant x\\ k_1|n_1}}\lambda\Big(\frac{n_1}{k_1},y\Big)\frac{w_q(n_2,y)w_q(n_1+n_2,y)}{(n_2(n_1+n_2))^{1-\beta}}\\ &\quad+O\Big(\frac{\Psi(x,y)^2\varrho(u)}{Y^{c_6/2}}\Big).\end{aligned}$$

La majoration (4·23) fournit aussi

$$NW_2(x,y)\ll\Psi(x,y)^2\varrho(u)\Big(\frac{q_1 2^{\omega(q_1)}(\log q_1)^2H(u)^{-2\delta}}{\varphi(q_1)^2(\log y)^2x^{2(1-\beta)}}+\frac{1}{Y^{c_6/2}}\Big).$$

□

En rassemblant les résultats contenus dans les Lemmes 5.4, 5.5, 5.6, nous obtenons largement le Théorème 1.1 compte tenu de la seconde remarque du Théorème 1.1.

6. Application de la méthode du cercle : preuve de la Proposition 2.1.

6·1. Préliminaires

Le lemme suivant est trivial mais sera très utile.

Lemme 6.1. *Soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes. On a*

$$a_n=\int_0^1 A_{-\eta}(x)\mathrm{e}(n\eta)\,\mathrm{d}\eta,\qquad |a_n|\leqslant\|A\|_1. \tag{6·1}$$

Nous énonçons le résultat préliminaire suivant (voir [12]).

Lemme 6.2. *Lorsque $q \geqslant 1$, χ_1 est primitif de module q_1 où $q_1 \mid q$, $m \mid q$ et c tel que $(c,m)=1$, nous avons*

$$\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}} \chi_1(a)\mathrm{e}\Big(\frac{ac}{m}\Big) = \begin{cases} \overline{\chi}_1(c)\mu\Big(\dfrac{m}{q_1}\Big)\chi_1\Big(\dfrac{m}{q_1}\Big)\tau(\chi_1)\dfrac{\varphi(q)}{\varphi(m)} & \text{si } q_1 \mid m\\ 0 & \text{si } q_1 \nmid m.\end{cases}$$

Remarque. Ce lemme s'applique aussi pour $q_1 = 1$.

Nous utiliserons aussi le résultat suivant.

Lemme 6.3. *Soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes. On a*

$$S_q(x;\eta) := \sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}} A_{a/q+\eta}(x) = \sum_{d\mid q} \frac{\varphi(q)\mu(q/d)}{\varphi(q/d)} \sum_{\substack{n\leqslant x\\ d=(q,n)}} a_n \mathrm{e}(\eta n).$$

De plus, lorsque $k \mid q$, on a

$$\int_{-1/(2k)}^{1/(2k)} |S_q(x;\eta)|\,\mathrm{d}\eta \leqslant \frac{3q}{k}\|A\|_1$$

Démonstration. On a

$$S_q(x;\eta) = \sum_{d\mid q}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ d=(q,n)}} a_n\mathrm{e}(\eta n) \sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}} \mathrm{e}\Big(\frac{an}{q}\Big). \tag{6·2}$$

Lorsque $(c,m)=1$ et $m \mid q$, le Lemme 6.2 appliqué à $q_1 = 1$ fournit

$$\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}} \mathrm{e}\Big(\frac{ac}{m}\Big) = \frac{\varphi(q)\mu(m)}{\varphi(m)}$$

que nous reportons dans (6·2) lorsque $m = q/d$ ce qui achève la démonstration de la première formule.

Majorons l'intégrale. Nous avons

$$\int_{-1/(2k)}^{1/(2k)} |S_q(x;\eta)| \leqslant \int_0^1 h(\vartheta,k)|A_\vartheta(x)|\,\mathrm{d}\vartheta$$

où

$$h(\vartheta,k) := \mathrm{card}\Big\{1\leqslant a\leqslant q : (a,q)=1, \quad \vartheta \in \bigcup_{(a,q)=1} \Big]-\frac{1}{2k}+\frac{a}{q}, \frac{a}{q}+\frac{1}{2k}\Big[\Big\}.$$

S'il existe un tel a, les autres solutions a' satisfont $|a-a'| \leqslant q/k$. On a donc

$$h(\vartheta,k) \leqslant 2q/k + 1 \leqslant 3q/k,$$

ce qui fournit la majoration recherchée. □

Le lemme suivant fournit une majoration de $V_q(x,y;\eta)$ utile notamment lorsque q est grand. Nous rappelons la définition de ξ en (4·8).

Lemme 6.4. *Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout couple (x,y) satisfaisant à (1·2), $q \leqslant y$ et $\eta \in \mathbb{R}$, on a*

$$V_q(x,y;\eta) \ll \Psi(x,y)\frac{2^{\omega(q)}q^{\xi(u)/\log y}}{\varphi(q)} \ll_\varepsilon \frac{\Psi(x,y)}{q^{1-\varepsilon}}.$$

De plus, pour tout couple (x,y) satisfaisant à (1·2), $q \leqslant y$ et $|\eta| \leqslant 1/(2q)$ on a

$$V_q(x,y;\eta) \ll x\frac{2^{\omega(q)}}{x|\eta|\varphi(q)}(q^{\xi(u)/\log y} + \log(x|\eta|+2)).$$

Démonstration. Notons la majoration

$$\lambda(t,y) \ll \varrho(u(t)) \ll \varrho(u) \qquad (t \in [Q,x]). \tag{6·3}$$

D'après (4·4) et (6·3), nous avons

$$V_q(x,y;\eta) \ll \sum_{k|q} \frac{\mu(q/k)^2 k}{\varphi(q)} \sum_{n \leqslant x/k} \varrho(u(n)) \ll x \sum_{k|q} \frac{\mu(q/k)^2}{\varphi(q)} \varrho(u(x/k)).$$

La majoration (4·9) appliquée pour $v = \log k/\log y$ fournit

$$\begin{aligned} V_q(x,y;\eta) &\ll \Psi(x,y)\frac{q^{\xi(u)/\log y}}{\varphi(q)} \sum_{k|q} \mu(q/k)^2 \Big(\frac{k}{q}\Big)^{\xi(u)/\log y} \\ &\ll \Psi(x,y) q^{\xi(u)/\log y} \frac{2^{\omega(q)}}{\varphi(q)} \ll \frac{\Psi(x,y)}{q^{1-\varepsilon}}. \end{aligned}$$

La deuxième majoration est alors immédiate.

Les majorations (4·20) et (4·21) fournissent

$$\begin{aligned} V_q(x,y;\eta) &\ll \frac{1}{|\eta|} \sum_{k|q} \frac{\mu(q/k)^2}{\varphi(q)} \Big(\varrho(u(x/k)) + \log(x|\eta|+2)\Big) \\ &\ll x\frac{2^{\omega(q)}}{x|\eta|\varphi(q)}(q^{\xi(u)/\log y} + \log(x|\eta|+2)), \end{aligned} \tag{6·4}$$

ce qui fournit la majoration recherchée. □

6·2. Démonstration de la Proposition 2.1

L'objet de ce paragraphe est de montrer la Proposition 2.1 à partir du Théorème 4.2 en partant de la formule (1·4). Nous choisissons $c_1 \leqslant c_8$. Rappelons (5·6) et désignons par $\mathfrak{M}'$ l'ensemble de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tel que

$$[0,1] = \cup_{q \leqslant Y^{c_1}} \mathfrak{M}(q,Q) \bigcup \mathfrak{M}' \tag{6·5}$$

soit une réunion disjointe.

Nous appliquons le Théorème 4.2. La contribution de $\mathfrak{M}'$ à l'intégrale (1·4) est clairement

$$\ll \|A\|_1 \frac{\Psi(x,y)}{Y^{c_6}}.$$

Lorsque $\vartheta \in \mathfrak{M}(q,Q)$ et $q \leqslant Y^{c_1}$, la contribution dans (1·4) du terme d'erreur $O(\Psi(x,y)Y^{-c_6})$ de (4·11) est majorée aussi par

$$\ll \|A\|_1 \frac{\Psi(x,y)}{Y^{c_6}}.$$

Nous avons donc

$$A(x,y) = AV(x,y) + AW(x,y) + O\Big(\|A\|_1 \frac{\Psi(x,y)}{Y^{c_6}}\Big) \tag{6·6}$$

avec

$$AV(x,y) := \sum_{q\leqslant Y^{c_1}} \mathrm{av}(q,qQ), \quad AW(x,y) := \sum_{q\leqslant Y^{c_1}} \mathrm{aw}(q,qQ)$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{av}(q,N) &:= \sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}} \int_{-1/N}^{1/N} A_{a/q+\eta}(x)V_q(x,y;-\eta)\,\mathrm{d}\eta \\ &= \int_{-1/N}^{1/N} S_q(x;\eta)V_q(x,y;-\eta)\,\mathrm{d}\eta, \qquad (6·7)\\ \mathrm{aw}(q,N) &:= \eta(q) \sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}} \chi_1(a) \int_{-1/N}^{1/N} A_{a/q+\eta}(x)W_q(x,y;-\eta)\,\mathrm{d}\eta. \end{aligned}$$

Estimons la contribution notée $AW(x,y)$ du *zéro de Siegel*. Le terme d'erreur lié au zéro de Siegel lorsque $q_1 \mid q$ est toujours

$$W_q(x,y;\eta) \ll \eta(q_1)\Psi(x,y)x^{\beta-1}\frac{\sqrt{q_1}\log q_1}{\varphi(q_1)\log y}H(u)^{-\delta} + \frac{\Psi(x,y)}{Y^{c_6}}.$$

Sa contribution est donc bien englobée par le terme d'erreur autrement dit

$$AW(x,y) \ll \|A\|_1\eta(q_1)\Psi(x,y)x^{\beta-1}\frac{\sqrt{q_1}\log q_1}{\varphi(q_1)\log y}H(u)^{-\delta} + \|A\|_1\frac{\Psi(x,y)}{Y^{c_6}}. \tag{6·8}$$

Estimons plus précisément $AW(x,y)$ en vue d'applications ultérieures. Nous étendons l'intégrale intervenant dans $\mathrm{aw}(q,qQ)$ à l'intervalle $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ en utilisant (4·12). Dans l'ensemble

$$]-1/(2q),1/(qQ)] \cup [1/(qQ),1/(2q)[,$$

on a $W_q(x,y;-\eta) \ll \Psi(x,y)Y^{-c_6}$ et les intervalles $]a/q-1/(2q),a/q+1/(2q)[$ sont disjoints. Il vient

$$AW(x,y) = \sum_{q\leqslant Y^{c_1}} \mathrm{aw}(q,2q) + O\Big(\|A\|_1\frac{\Psi(x,y)}{Y^{c_6}}\Big).$$

Dans l'ensemble $[-1/2,-1/(2q)] \cup [1/(2q),1/2]$, d'après le Théorème 4.2, nous avons $W_q(x,y;-\eta) \ll \Psi(x,y)/Y^{c_6}$. La contribution de cet ensemble à l'intégrale est donc $\leqslant q\Psi(x,y)/Y^{c_6}$. Il vient

$$AW(x,y) = \sum_{q\leqslant Y^{c_1}} \mathrm{aw}(q,2) + O\Big(\|A\|_1\frac{\Psi(x,y)}{Y^{c_1}}\Big).$$

pourvu que $c_6 \geqslant 3c_1$.

Lorsque $q_1 \mid q$ et $\eta(q_1) \neq 0$, on a

$$\mathrm{aw}(q,2) = \int_0^1 \sum_{n \leqslant x} a_n \mathrm{e}(n\eta) W_q(x,y;-\eta) \sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant q \\ (a,q)=1}} \chi_1(a) \mathrm{e}\Big(\frac{an}{q}\Big)\,\mathrm{d}\eta.$$

En utilisant le Lemme 6.2 pour estimer la somme en a et en utilisant l'écriture (4·5), nous obtenons

$$\mathrm{aw}(q,2) = \sum_{q_1 \mid m \mid q} \mu\Big(\frac{m}{q_1}\Big)\chi_1\Big(\frac{m}{q_1}\Big)\frac{\tau(\chi_1)^2}{\varphi(q_1)}\frac{\varphi(q)}{\varphi(m)} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ (n,q)=q/m}} a_n \chi_1\Big(\frac{nm}{q}\Big)\frac{w_q(n,y)}{n^{1-\beta}}.$$

Grâce au Lemme 4.3, nous obtenons

$$\mathrm{aw}(q,2) \ll \frac{q_1 4^{\omega(q/q_1)}}{\varphi(q)}\frac{\log q}{\log y}\|A\|_1 x^{\beta-1}\Psi(x,y)H(u)^{-\delta}.$$

Il est clair que cette majoration ne permet pas de retrouver la majoration (6·8) mais l'expression explicite de $\mathrm{aw}(q,2)$ pourrait être utile pour certaines applications.

Des techniques développées dans [3] et [6] permettent d'établir un développement de $w_q(x,y)$. Pour cela nous introduisons de nouvelles notations. Soit

$$D_q(s) = \sum_{r \mid q/q_1} \frac{\mu(r)\chi_1(r)}{\varphi(r)}\Big(\frac{rq_1}{q}\Big)^s L(s,\chi_r)$$

de sorte que

$$\frac{D_q(s)}{s} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-sv} K'(\mathrm{e}^v,q)\,\mathrm{d}v.$$

Nous écrivons

$$\frac{D_q(s)}{s} := \sum_{k=0}^\infty d_k(q)(s-\beta)^k = \frac{1}{s}\sum_{k=0}^\infty d_k'(q)(s-\beta)^k$$

dans un voisinage de β. L'hypothèse sur β fournit $d_0(q) = d_0'(q) = 0$ et nous avons

$$d_k(q) = \frac{(-1)^k}{k!}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\beta v} v^k K'(\mathrm{e}^v,q)\,\mathrm{d}v \tag{6·9}$$

et

$$d_k'(q) = \beta d_k(q) + \frac{d_{k-1}(q)}{\log y} = \frac{(-1)^k}{k!}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\beta v} v^{k-1}(\beta v - k/\log y) K'(\mathrm{e}^v,q)\,\mathrm{d}v.$$

Nous pouvons maintenant montrer un développement précis pour estimer $w_q(x,y)$.

Lemme 6.5. *Soient $k \geqslant 0$ et $\delta \in]0,\tfrac12\pi^2[$ fixés. Pour tout couple (x,y) satisfaisant à (1·2), $q \leqslant Y^{c_4}$ et $u \in \mathcal{C}_{k+1}(6(\log y)/\log q)$, on a*

$$w_q(x,y) = \sum_{j=1}^k d_j'(q)\frac{\omega^{(j)}(u)}{(\log y)^{j+1}} + O\Big(\frac{2^{\omega(q/q_1)}\varphi(q_1)}{\varphi(q)}\frac{(\log q)^{k+2}}{(\log y)^{k+2}}\varrho(u)H(u)^{-\delta}\Big).$$

Remarques. 1– Ici nous n'avons pas pris la peine d'obtenir un résultat uniforme en k. Cette uniformité peut être obtenue par les méthodes développées en [3].

2– Un calcul élémentaire fournit

$$d_1'(q) = \beta L'(\beta,\chi_1)\frac{q_1^\beta}{q^\beta}\prod_{p|q/q_1}\Big(\frac{p}{p-1}\big(1-\chi_1(p)p^{\beta-1}\big)\Big).$$

Notons alors que si q/q_1 a un facteur premier p tel que $\chi_1(p)=1$, ce coefficient $d_1'(q)$ a tendance à être petit alors que sinon on peut le minorer.

Démonstration. Le lemme 12 de [3] fournit tout d'abord le développement suivant : pour chaque entier $k\geqslant 0$ et tous réels $u\geqslant 0$ et $v\geqslant 0$, on a

(6·10)

$$\begin{aligned} f(u-v) = &\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j}{j!}\omega^{(j)}(u)v^{j-1}\big(\beta v - j/\log y\big)\\ &+\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^{j+1}}{j!}\sum_{\substack{1\leqslant m\leqslant j+1\\ u-v\leqslant m\leqslant u}}\omega_{m,j}(v+m-u)^{j-1}(\beta(v+m-u)-j/\log y)\\ &+\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^v (v-t)^{k-1}(\beta(v-t)+1/\log y)\omega^{(k+1)}(u-t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\omega_{m,j} := \omega^{(j)}(m)-\omega^{(j)}(m-0).$$

Nous sommes maintenant en mesure d'estimer $w_q(x,y)$. La méthode utilisée est celle de la démonstration du théorème 1 de [3]. Par souci de complétude, nous donnons les détails. Nous rappellons que $d_0(q)=0$ lorsque $q\geqslant 2$. Compte-tenu de (4·6), (6·9) et de (6·10), nous obtenons

$$w_q(x,y) = \sum_{j=1}^{k}\frac{\omega^{(j)}(u)}{(\log y)^{j+1}}\Big(\beta d_j(q)+\frac{d_{j-1}(q)}{\log y}\Big)+R_1+R_2$$

avec

$$\begin{aligned} R_1 = &\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^{j+1}}{j!}\sum_{\substack{1\leqslant m\leqslant j+1\\ m\leqslant u}}\\ &\int_{u-m}^{+\infty}\omega_{m,j}(v+m-u)^{j-1}\Big(\beta(v+m-u)-\frac{j}{\log y}\Big)K'(y^v,q)\frac{\mathrm{d}v}{y^{\beta v}},\\ R_2 = &\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^{+\infty}\omega^{(k+1)}(u-t)\int_t^{+\infty}(v-t)^{k-1}\Big(\beta(v-t)+\frac{1}{\log y}\Big)K'(y^v,q)y^{-\beta v}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Pour majorer R_2, nous n'avons pas besoin de la restriction $u\in\mathcal{C}_{k+1}(6(\log y)/\log q)$. Grâce au Lemme 4.3 et à la majoration (4·26), nous obtenons

$$\begin{aligned} R_2 &\ll \frac{2^{\omega(q/q_1)}\varphi(q_1)}{\varphi(q)}\int_0^{+\infty}|\omega^{(k+1)}(u-t)|\int_t^{+\infty}z^{k-1}(z+1/\log y)y^{(1-1/(3\log q)-\beta)z}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t\\ &\ll \frac{2^{\omega(q/q_1)}\varphi(q_1)}{\varphi(q)}\varrho(u)H(u)^{-\delta}\frac{\log q}{\log y}\int_0^{+\infty}t^{k-1}(t+1/\log y)y^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t\\ &\ll \varrho(u)H(u)^{-\delta}\frac{2^{\omega(q/q_1)}\varphi(q_1)}{\varphi(q)}\frac{(\log q)^{k+2}}{(\log y)^{k+2}},\end{aligned}$$

où nous avons utilisé (4·27).

Majorons maintenant la quantité R_1. Du Lemme 4.3, il vient

$$\begin{aligned} R_1 &\ll \frac{2^{\omega(q/q_1)}\varphi(q_1)}{\varphi(q)} \sum_{j=0}^{k} \sum_{\substack{1\leqslant m\leqslant j+1\\ m\leqslant u}} \int_{u-m}^{+\infty} v^{j-1}(v+1/\log y)y^{(1-1/(3\log q)-\beta)v}\,\mathrm{d}v \\ &\ll \frac{2^{\omega(q/q_1)}\varphi(q_1)}{\varphi(q)} \Big(\frac{\log q}{\log y}\Big)^{\ell} y^{(1-1/(3\log q)-\beta)(u-\ell-1)}, \end{aligned}$$

où l'on a posé $\ell := \min(k+2,[u])$.

Lorsque (1·2) et $q\leqslant Y^{c_4}$, nous avons

$$\frac{\log y}{\log q} \geqslant (1/c_4)\sqrt{\log y}, \qquad u\leqslant (\log y)^{(1-\varepsilon)/(2+\varepsilon)},$$

ce qui permet de majorer convenablement R_1 lorsque $u\geqslant k+3$.

Si $u\leqslant k+3$, l'hypothèse $u\in \mathcal{C}_{k+1}(6(\log y)/\log q)$ et le choix de la constante b dans la définition du zéro de Siegel impliquent

$$(u-\ell-1)(\log y)(\beta-1+1/(3\log q)) \geqslant (u-\ell)\frac{\log y}{6\log q} \geqslant (k+2-\ell-1)\log\Big(\frac{\log y}{\log q}\Big)$$

ce qui en le reportant dans la majoration de R_1 fournit le résultat requis. □

Il reste à estimer $AV(x,y)$. Soit $Q' := 2y^{1/4}$. Du Lemme 6.4, nous déduisons que lorsque $\eta\in\mathfrak{M}(q,Q')\smallsetminus\mathfrak{M}(q,Q)$ et $q\leqslant Y^{c_1}$ nous avons

$$V_q(x,y;-\eta) \ll \frac{\Psi(x,y)}{Y^{c_1}},$$

pourvu que c_1 soit choisie suffisamment petit par rapport à c_7. De plus, lorsque $q\leqslant Y^{c_1}$, les ensembles $\mathfrak{M}(q,Q')$ sont disjoints. Il vient

$$AV(x,y) = \sum_{q\leqslant Y^{c_1}} \mathrm{av}(q,qQ') + O\Big(\|A\|_1\frac{\Psi(x,y)}{Y^{c_1}}\Big).$$

Grâce au Lemme 6.4, nous étendons l'intégrale définissant $\mathrm{av}(q,qQ')$ à un intervalle de longueur $1/q$ en majorant la contribution de la réunion d'intervalles

$$U_1 =]-1/qQ',-1/(2q)]\cup[1/qQ',1/(2q)[.$$

Lorsque $q\leqslant Y^{c_1}$ et $\eta\in U_1$, on a

$$V_q(x,y;\eta) \ll \frac{2^{\omega(q)}q}{\varphi(q)}\frac{y^{1/4}\log x}{x},$$

de sorte que la deuxième majoration du Lemme 6.3 implique

$$\mathrm{av}(q,2q)-\mathrm{av}(q,qQ) \ll \|A\|_1 y^{1/4}\log x\frac{2^{\omega(q)}q}{\varphi(q)}.$$

Il vient

$$\begin{aligned} AV(x,y) &= \sum_{q\leqslant Y^{c_1}} \mathrm{av}(q,2q) + O\Big(\|A\|_1 y^{1/4}\log x \sum_{q\leqslant Y^{c_1}}\frac{2^{\omega(q)}q}{\varphi(q)}\Big) \\ &= \sum_{q\leqslant Y^{c_1}} \mathrm{av}(q,2q) + O\Big(\|A\|_1 y^{1/4}Y^{c_1}(\log y)\log x\Big) \\ &= \sum_{q\leqslant Y^{c_1}} \mathrm{av}(q,2q) + O\Big(\|A\|_1\frac{\Psi(x,y)}{Y^{c_1}}\Big). \end{aligned}$$

Notons aussi que le Lemme 6.4 fournit aussi

$$\sum_{q\geqslant B}\mathrm{av}(q,2q)\ll \|A\|_1\frac{\Psi(x,y)}{B^{1-\varepsilon}}$$

lorsque $B\leqslant Y^{c_1}$.

D'après (6·7), (4·4) et le Lemme 6.3, nous avons

$$\mathrm{av}(q,2q)=\sum_{k|q}\frac{\mu(q/k)k}{\varphi(q)}\int_{-1/(2q)}^{1/(2q)}S_q(x;\eta)\sum_{\substack{n\leqslant x\\ k|n}}\mathrm{e}(\eta n)\lambda\Big(\frac{n}{k},y\Big)\,\mathrm{d}\eta. \tag{6·11}$$

Nous introduisons

$$\mathrm{av}'(q;x,y):=\sum_{k|q}\frac{\mu(q/k)k}{\varphi(q)}\sum_{d|q}\frac{\varphi(q)\mu(q/d)}{\varphi(q/d)}\sum_{\substack{n'\leqslant x\\ d=(q,n')}}a_{n'}\sigma(k,n';x,y), \tag{6·12}$$

où $\sigma(k,n';x,y)$ est défini en (5·1).

Grâce à (6·4), nous étendons l'intégrale intervenant dans l'écriture (6·11) de $\mathrm{av}(q,2q)$ à un intervalle de longueur $1/k$ pour chaque indice k de la sommation ci-dessus en utilisant dans la réunion d'intervalles $U_2=[-1/(2k),-1/(2q)]\cup[1/(2q),1/(2k)]$ la majoration

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ k|n}}\mathrm{e}(\eta n)\lambda\Big(\frac{n}{k},y\Big)\ll\frac{1}{k|\eta|}\log x.$$

Le terme d'erreur lié à cette extension est d'après (6·4)

$$\begin{aligned}&\leqslant\sum_{q\leqslant Y^{c_1}}|\mathrm{av}(q,2q)-\mathrm{av}'(q;x,y)|\\ &\qquad\ll\log x\sum_{q\leqslant Y^{c_1}}\sum_{k|q}\frac{\mu(q/k)^2q}{\varphi(q)}\int_{-1/(2k)}^{1/(2k)}|S_q(x;\eta)|\,\mathrm{d}\eta\\ &\qquad\ll\log x\sum_{q\leqslant Y^{c_1}}\sum_{k|q}\frac{\mu(q/k)^2q^2}{\varphi(q)k}\|A\|_1\\ &\qquad\ll(\log x)Y^{2c_1}\|A\|_1\ll\frac{\Psi(x,y)}{Y^{c_1}}\|A\|_1.\end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$AV(x,y)=\sum_{q\leqslant Y^{c_1}}\mathrm{av}'(q;x,y)+O\Big(\frac{\Psi(x,y)}{Y^{c_1}}\|A\|_1\Big). \tag{6·13}$$

Nous utiliserons (6·1) et la majoration

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{k|q\\ d|q}}\frac{\mu(q/k)^2k^2}{\varphi(q)}\frac{\varphi(q)\mu(q/d)^2}{\varphi(q/d)}\sum_{\substack{n'\leqslant x\\ d=(q,n')}}\frac{|a_{n'}|}{\min\{x-n'+1,|n'-k|,n'\}}\\ &\ll\sum_{\substack{k|q\\ d|q}}\frac{\mu(q/k)^2k^2}{\varphi(q)}\frac{\varphi(q)\mu(q/d)^2}{\varphi(q/d)}\sum_{\substack{n'\leqslant x\\ d=(q,n')}}\frac{\|A\|_1}{\min\{x-n'+1,|n'-k|,n'\}}\\ &\ll\|A\|_1(\log x)2^{\omega(q)}q\Big(\frac{q}{\varphi(q)}\Big)^2\end{aligned} \tag{6·14}$$

conséquence de la majoration

$$\sum_{k|q}\frac{\mu(q/k)^2k^2}{\varphi(q)}\sum_{d|q}\frac{\varphi(q)\mu(q/d)^2}{\varphi(q/d)d}\ll 2^{\omega(q)}q\Big(\frac{q}{\varphi(q)}\Big)^2.$$

En reportant (5·2) dans (6·12), nous obtenons grâce à (6·14)

$$\begin{aligned}\mathrm{av}'(q;x,y)=&\sum_{k|q}\frac{\mu(q/k)}{\varphi(q)}\sum_{d|q}\frac{\varphi(q)\mu(q/d)}{\varphi(q/d)}\sum_{\substack{n'\leqslant x\\ d=(q,n')}}a_{n'}\lambda\Big(\frac{n'}{k},y\Big)\\ &+O\Big(\|A\|_1yu^2 2^{\omega(q)}q\Big(\frac{q}{\varphi(q)}\Big)^2\Big).\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\sum_{d|q}\frac{\varphi(q)\mu(q/d)}{\varphi(q/d)}\sum_{\substack{n'\leqslant x\\ d=(q,n')}}a_{n'}\lambda\Big(\frac{n'}{k},y\Big)&=\sum_{d|q}\frac{\varphi(q)\mu(q/d)}{\varphi(q/d)}\sum_{e|q/d}\mu(e)\sum_{\substack{n\leqslant x\\ de|n}}a_n\lambda\Big(\frac{n}{k},y\Big)\\ &=\sum_{\ell|q}\sum_{d|\ell}\frac{\varphi(q)\mu(q/d)}{\varphi(q/d)}\mu(\ell/d)\sum_{\substack{n\leqslant x\\ \ell|n}}a_n\lambda\Big(\frac{n}{k},y\Big)\\ &=\sum_{\ell|q}\ell\mu(q/\ell)\sum_{\substack{n\leqslant x\\ \ell|n}}a_n\lambda\Big(\frac{n}{k},y\Big),\end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{av}'(q;x,y)=J(q;x,y)+O\Big(\|A\|_1yu^2 2^{\omega(q)}q\Big(\frac{q}{\varphi(q)}\Big)^2\Big),$$

avec $J(q;x,y)$ défini en (2·5). En reportant dans (6·13) et en utilisant la condition $x\geqslant yY^{c_3}$ avec c_3 suffisamment grand, nous obtenons donc

$$\begin{aligned}AV(x,y)&=\sum_{q\leqslant Y^{c_1}}J(q;x,y)+O\Big(\|A\|_1\frac{\Psi(x,y)}{Y^{c_6}}+\|A\|_1yY^{c_1}(\log y)^{3/2}\Big)\\ &=\sum_{q\leqslant Y^{c_1}}J(q;x,y)+O\Big(\|A\|_1\frac{\Psi(x,y)}{Y^{c_6}}\Big).\end{aligned}\tag{6·15}$$

En utilisant la formule (6·1), nous obtenons

$$J(q;x,y)=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{d|q}\mu\Big(\frac{q}{d}\Big)d\int_0^1A(-\eta)\sum_{\substack{n\leqslant x\\ d|n}}\mathrm{e}(n\eta)\,\mathrm{d}\eta\sum_{k|q}\mu\Big(\frac{q}{k}\Big)\lambda\Big(\frac{n}{k},y\Big).$$

Nous en déduisons la majoration

$$\begin{aligned}J(q;x,y)&\ll\|A\|_1\sum_{k|q}\frac{\mu(q/k)^2}{\varphi(q)}\sum_{\ell|q}\mu\Big(\frac{q}{\ell}\Big)^2x\varrho\Big(u\Big(\frac{x}{k}\Big)\Big)\\ &\ll\frac{4^{\omega(q)}q^{\xi(u)/\log y}}{\varphi(q)}\|A\|_1\Psi(x,y).\end{aligned}$$

Cela permet de rajouter à la sommation de (6·15) les $q > y^{1/4}$ tel que $P(q) \leqslant Y^{c_1}$ puisque dans le domaine (1·2), grâce à une majoration à la Rankin, nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{q>y^{1/4}\\ P(q)\leqslant Y^{c_1}}} \frac{4^{\omega(q)}q^{\xi(u)/\log y}}{\varphi(q)} &\leqslant y^{-1/4\sqrt{\log y}} \sum_{P(q)\leqslant Y^{c_1}} \frac{4^{\omega(q)}q^{1/\sqrt{\log y}+\xi(u)/\log y}}{\varphi(q)}\\ &\ll Y^{-1/4}\prod_{p\leqslant Y^{c_1}}\Big(1+\frac{4p^{1/\sqrt{\log y}+\xi(u)/\log y}}{p}\Big)\\ &\ll Y^{-1/4}(\log y)^{O(1)},\end{aligned}$$

ce qui suffit pourvu que $c_1 < \frac{1}{4}$. Il reste à majorer $J(q;x,y)$ lorsque $Y^{c_1} < q \leqslant y^{1/4}$. Nous notons $J_1(q;x,y)$ la contribution des arcs majeurs et $J_2(q;x,y)$ la contribution complémentaire autrement dit $J(q;x,y) = J_1(q;x,y)) + J_2(q;x,y)$ et

$$J_1(q;x,y)) := \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{d|q}\mu\Big(\frac{q}{d}\Big)d\sum_{\ell|d}\int_{\mathfrak{M}(\ell,Q')} A(-\eta)\sum_{\substack{n\leqslant x\\ d|n}} \mathrm{e}(n\eta)\,\mathrm{d}\eta\lambda_q(n,y).$$

La majoration (4·19) implique pour $\eta\in\mathbb{R}$, $q\leqslant y^{1/4}$ et (x,y) dans (1·2) la majoration

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ d|n}} \mathrm{e}(n\eta)\lambda_q(n,y) \ll q^{\xi(u)/(\log y)}\frac{2^{\omega(q)}}{\|d\eta\|} + 2^{\omega(q)}\frac{\log(\|d\eta\|x+2)}{\|d\eta\|}.$$

Après calculs, cette majoration fournit

$$J_2(q;x,y) \ll q^{\xi(u)/\log y+\varepsilon}y^{1/2}\log x\|A\|_1$$

de sorte que

$$\sum_{Y^{c_1}<q\leqslant y^{1/4}} J_2(q;x,y) \ll y^{3/4+2\varepsilon}\|A\|_1 \ll \|A\|_1\frac{\Psi(x,y)}{Y^{c_1}}.$$

Pour majorer $J_1(q;x,y))$, grâce au Lemme 2.3, nous obtenons lorsque (x,y) satisfait (1·2) et $x/y\geqslant Y^{c_3}$

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ d|n}} |\lambda_q(n,y)| \ll x\varrho(u)\frac{2^{\omega(q)}}{\varphi(q)}\frac{\log(u+1)\log q}{\log y} \ll \frac{\Psi(x,y)}{q^{1-\varepsilon}}$$

et donc

$$J_1(q;x,y)) \ll \frac{\Psi(x,y)}{q^{1-2\varepsilon}}\sum_{\ell|q}\int_{\mathfrak{M}(\ell,Q')} |A(\eta)|\,\mathrm{d}\eta.$$

Puisque ces intervalles sont disjoints lorsque $Y^{c_1} < q \leqslant y^{1/4}$, nous obtenons

$$\sum_{Y^{c_1}<q\leqslant y^{1/4}} J_1(q;x,y)) \ll \|A\|_1\frac{\Psi(x,y)}{Y^{c_1(1-2\varepsilon)}}.$$

Nous avons donc lorsque $B \leqslant Y^{c_1}$

$$
(6\cdot16)\qquad \begin{aligned} AV(x,y) &= \sum_{q\leqslant Y^{c_1}} J(q;x,y) + O\Big(\|A\|_1 \frac{\Psi(x,y)}{Y^{c_1(1-2\varepsilon)}}\Big) \\ &= \sum_{P(q)\leqslant B} J(q;x,y) + O\Big(\|A\|_1 \Psi(x,y)\big(Y^{-c_1(1-2\varepsilon)} + B^{-(1-\varepsilon)}\big)\Big). \end{aligned}
$$

En reportant cette estimation dans (6·6) et en utilisant la majoration (6·8) et le Lemme 3.1, nous achèvons la démonstration de la Proposition 2.1. □

6·3. Démonstration de la Proposition 2.2

Nous démontrons la Proposition 2.2 à partir de la Proposition 2.1. Compte-tenu de la Proposition 2.1, il suffit de considérer $\sum_{q\leqslant B} J(q;x,y)$. Nous estimons $\lambda_q(n,y)$ intervenant dans l'écriture de $J(q;x,y)$ grâce au Lemme 2.3 lorsque $n \in [x/Y^{c_1}, x]$, la contribution des $n \leqslant x/Y^{c_1}$ dans $A_B(x,y)$ étant négligeable. Lorsque $n \in [x/Y^{c_1}, x]$ et $1 \leqslant q \leqslant Y^{c_1}$, nous utilisons (2·7). Grâce à $S_d(x) \leqslant x\|A\|_1/d$ et à la majoration

$$
\sum_{q=1}^{\infty} \frac{4^{\omega(q)}}{\varphi(q)} (\log 2q)^{k+1} \ll k!,
$$

nous pouvons montrer que la contribution de ce terme d'erreur est

$$
\ll k!\Psi(x,y)\|A\|_1 \Big(\frac{M_3 \log(u+1)}{\log y}\Big)^{k+1}.
$$

Compte-tenu de (2·4) et (2·5), il reste à estimer

$$
(6\cdot17)\qquad \sum_{j=0}^{k} \sum_{1\leqslant q\leqslant B} \frac{b'_j(q)}{\varphi(q)} \sum_{d|q} \mu\Big(\frac{q}{d}\Big) d \sum_{\substack{n\leqslant x\\ d|n}} a_n \frac{\varrho^{(j)}(u(n))}{(\log y)^j}.
$$

Une intégration par parties fournit

$$
\sum_{\substack{n\leqslant x\\ d|n}} a_n \varrho^{(j)}(u(n)) = S_d(x)\varrho^{(j)}(u) - \int_Q^x S_d(t) \frac{\varrho^{(j+1)}(u(t))}{t\log y}\,\mathrm{d}t + O\Big(\frac{\Psi(x,y)\|A\|_1}{B^{1-\varepsilon}}\Big).
$$

Nous utilisons maintenant l'hypothèse portant sur $S_d(x)$. Après calculs, il vient

$$
(6\cdot18)\qquad \sum_{\substack{n\leqslant x\\ d|n}} a_n \varrho^{(j)}(u(n)) = \frac{h(d)}{d} X_j + O\Big(\frac{\Psi(x,y)\|A\|_1}{B^{1-\varepsilon}} + r^*(x,d)\varrho(u)(\log(u+1))^j\Big).
$$

Un calcul aisé fournit

$$
\sum_{q>B} \frac{b'_j(q)}{\varphi(q)} \sum_{d|q} \mu\Big(\frac{q}{d}\Big) h(d) \ll \sum_{q>B} \frac{M_2^j (\log q)^j (1+C)^{\omega(q)}}{\varphi(q)^2} \ll \frac{j! M_2^j}{B^{1-\varepsilon}}.
$$

En reportant (6·18) dans (6·17), il vient

$$
A_B(x,y) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \frac{X_j}{(\log y)^j} + O\Big(\Psi(x,y)\|A\|_1 \Big\{\Big(\frac{M_3 \log(u+1)}{\log y}\Big)^{k+1} + \frac{1}{B^{1-\varepsilon}}\Big\} + R'\Big)
$$

avec, grâce au Lemme 2.4,

$$\begin{aligned} R' &\ll \sum_{j=0}^{k} \sum_{q \leqslant B} \frac{|b_j'(q)|}{\varphi(q)} \sum_{d|q} \mu^2\Big(\frac{q}{d}\Big) \frac{r^*(x,d) x \varrho(u) (\log(u+1))^j}{(\log y)^j} \\ &\ll \Psi(x,y) \sum_{q \leqslant B} \frac{1}{\varphi(q)^2} \sum_{d|q} \mu^2\Big(\frac{q}{d}\Big) r^*(x,d) \sum_{j=0}^{k} \frac{(M_2 \log(u+1) \log q)^j}{(\log y)^j} \\ &\ll \Psi(x,y) \sum_{q \leqslant B} \frac{1}{\varphi(q)^2} \sum_{d|q} \mu^2\Big(\frac{q}{d}\Big) r^*(x,d) \ll \Psi(x,y) R_B, \end{aligned}$$

puisque lorsque $d \in \mathbb{N}$

$$\sum_{\substack{q \in \mathbb{N} \\ d|q}} \frac{\mu^2(q/d)}{\varphi(q)^2} \ll \frac{1}{\varphi(d)^2}.$$

□

Bibliographie

[1] A. Balog & A. Sárkőzy, On sums of integers having small prime factors, I, *Studia Sci. Math. Hung.* **19** (1984), 35-47.
[2] A. Balog & A. Sárkőzy, On sums of sequences of integers, II, *Acta Math. Hung.* **44** (1984), 169-179.
[3] R. de la Bretèche, Sommes d'exponentielles et entiers sans grand facteur premier, *Proc. London. Math. Soc.*, **77**, (3), (1998), 39-78.
[4] R. de la Bretèche, Sommes sans grand facteur premier, *Acta Arith.* **88**, no. 1, (1999), 1–14.
[5] S. Drappeau, Sur les solutions friables de l'équation $a+b=c$, prépublication, (2012), disponible sur http ://arxiv.org/abs/1203.1742.
[6] E. Fouvry & G. Tenenbaum, Entiers sans grand facteur premier en progressions arithmétiques, *Proc. London Math. Soc.* (3) **63** (1991), 449-494.
[7] A. Granville & K. Soundararajan, Large character sums : Pretentious characters and the Pólya-Vinogradov theorem, *J. Amer. Math. Soc*, **20**, (2007), 357-384.
[8] A. Hildebrand, On the number of the positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$, *J. Number Theory*, **22** (1986), 289-307.
[9] A. Hildebrand & G. Tenenbaum, Integers without large prime factors, *J. Théorie des nombres de Bordeaux,* 5, (1993), 411-484.
[10] J.C. Lagarias & K. Soundararajan, Counting smooth solutions to the equations A+B=C, à paraître aux Proc. London Math. Soc., disponible sur http ://arxiv.org/abs/1102.4911v2.
[11] J.C. Lagarias & K. Soundararajan, Smooth solutions to the *abc* equation : the *xyz* conjecture, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **23**, (2011), no. 1, 209–234.
[12] H.L. Montgomery & R.C. Vaughan, The exceptional set in Goldbach's problem, *Acta Arith.*, **27**, (1975), 353–370.
[13] E. Saias, Sur le nombre d'entiers sans grand facteur premier. *J. Number Theory*, **32**, (1989), 78-99.
[14] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, troisième édition, coll. Échelles, Belin, 2008, 592 pp.

Régis de la Bretèche
IMJ, UMR 7586
Université Paris Diderot
UFR de Mathématiques, Case 7012
Bâtiment Chevaleret
75205 Paris cedex 13,
France

Andrew Granville
Département de Mathématiques et Statistique,
Université de Montréal,
CP 6128 succ Centre-Ville,
Montréal, QC H3C 3J7,
Canada