PROPRIETĂȚI COMUNE FUNCȚIILOR ÎNCHISE ȘI CELOR CU PROPRIETATEA LUI DARBOUX

OCTAV CORNEA

Intuitiv, funcțiile reale, închise, de variabilă reală sînt în mod esențial diferite de cele cu proprietatea lui Darboux. Primul rezultat al lucrării de față subliniază această situație, următoarele, însă, pun în evidență o serie de proprietăți comune acestor două clase de funcții, ceea ce sugerează că ele ar putea avea o comportare similară față de fenomenul de continuitate.

Fie E și F două spații metrice. Spunem că funcția $f: E \to F$ este închisă dacă imaginea prin f a oricărei mulțimi închise din E este o mulțime închisă în F. Fie $A \subset R$. Vom nota prin $a(A)$ închiderea mulțimii A, prin $\mathrm{Int}(A)$ interiorul acestei mulțimi. Pentru o funcție $f: A \to R$ vom nota prin $\mathrm{Im}\, f$ mulțimea imagine a lui A prin f. Dacă $A = R$ sau A este un interval real închis vom nota prin D_f mulțimea discontinuităților de prima speță ale lui f. Prin $I(A)$, $C(A)$, $D(A)$ vom nota respectiv clasele funcțiilor $f: A - R$, închise, continue și a celor cu proprietatea lui Darboux. În fine, pentru un punct $x \in R$ vom nota prin $L(x, f)$ mulțimea $\cap \{f((x-t, x+t) \cap A) : t > 0\}$ (f este o funcție $f: A \to R$).

I

Dacă $f \in D(R)$ se poate verifica imediat că pentru orice punct $x \in R$ mulțimea $L(x, f)$ este un interval ce se reduce eventual la un singur punct acolo unde funcția f este continuă. Propoziția de mai jos ne arată că dacă $f \in I(R)$, mulțimea $L(x, f)$ are o cu totul altă formă. Ne este necesară următoarea lemă.

LEMA. *Fie $f: R \to R$, $x_0 \in R$ și $y_0 \in L(f, x_0)$. Dacă $f \in I(R)$ și $f(x_0) \neq y_0$, atunci $x_0 \in a(f^{-1}(y_0))$.*

Demonstrație. Întrucît $y_0 \in L(f, x_0)$ există un șir $\{x_n : n \geqslant 1\}$ cu $\lim (x_n) = x_0$ și $\lim (f(x_n)) = y_0$. Pentru orice $k \in \mathbf{N}^*$ mulțimea $\{x_n : n \geqslant k\} \cup \{x_0\}$ este închisă deci este închisă și mulțimea $\{f(x_n) : n \geqslant k\} \cup \{f(x_0)\}$. Rezultă că există $n_k > k$ cu $f(x_{n_k}) = y_0$.

Există prin urmare un subșir al lui $\{x_n : n \geqslant 1\}$, fie el $\{z_n : n \geqslant 1\}$ astfel încît $f(z_k) = y_0$, $k \geqslant 1$. Cum $\lim (z_n) = x_0$ rezultă $x_0 \in a(f^{-1})(y_0))$.

PROPOZIȚIA 1. *Fie $f: R \to R$ și $x_0 \in R$. Dacă $f \in I(R)$, atunci mulțimea $L(x_0, f) - \{f(x_0)\}$ este discretă.*

Demonstrație. Este suficient să arătăm ca singurul punct ce poate fi punct de acumulare al mulțimii $L(x_0, f)$ este $f(x_0)$. Să presupunem că $t \in L(x_0, f)$ este punct de acumulare pentru $L(x_0, f)$ și $t \neq f(x_0)$. Există deci un șir $\{y_n : n \geqslant 1\} \geqslant L(x_0, f)$ cu termeni doi cîte doi distincți și diferiți de 1 astfel încît $\lim (y_n) = 1$. Exista $m \in \mathbf{N}$ astfel încît pentru $k > m$ să avem $y_k \neq f(x_0)$. Din lema anterioară rezultă că pentru $k > m$ avem $x_0 \in a(f^{-1}(y_k))$. Obținem că există $x_k \in f^{-1}(y_k) \cap (x_0 - 1/k, x_0 + 1/k)$. Imaginea mulțimii închise $\{x_y : k > m\} \cup \{x_0\}$ este mulțimea $\{y_k : k > m\} \cup \{f(x_0)\}$ care nu este închisă întrucît $f(x_0) \neq t$. Contradicție.

O consecinţă imediată a acestei propoziţii o constituie un rezultat pe care îl întîlnim în [1], unde este demonstrat pe o cale mai puţin directă.

COROLAR. *Cu notaţiile de mai înainte avem* $D(R) \cap I(R) = C(R)$.

Într-adevăr, fie $f \in D(R) \cap I(R)$. Din $f \in D(R)$ rezultă că $L(x, f)$ este un interval pentru orice $x \in R$. Aplicînd propoziţia anterioară obţinem că $L(x, f)$ este numărabilă. În concluzie $L(x, f)$ se reduce la un singur punct adică f este continuă.

Observaţie. Propoziţia 1 rămîne valabilă dacă funcţia închisă f este definită şi are valori într-un spaţiu metric.

II

Trecem acum la studiul unor proprietăţi comune claselor de funcţii $I(A)$ şi $D(A)$, unde A este un interval real închis sau $A = R$. Vom nota $H(A) = I(A) \cup D(A)$.

Prima noastră observaţie de acest gen este o consecinţă simplă a lemei de mai înainte.

Dacă $f \in H(R)$ *şi pentru orice* $x \in R$ *mulţimea* $f^{-1}(x)$ *este închisă, atunci* $f \in C(R)$.

Demonstraţie. Pentru $f \in D(R)$ rezultatul este cunoscut (vezi de exemplu [2]). Să presupunem că $f \in I(R)$. Dacă f nu este continuă în $x_0 \in R$, atunci există $x_1 \in L(x_0, f)$ astfel încît $x_1 \neq f(x_0)$. Lema anterioară ne asigura că $x_0 \in a(f^{-1}(x_1))$. Fireşte însă că $x_0 \notin f^{-1}(x_1)$. Reiese că mulţimea $f^{-1}(x_1)$ nu este închisă.

Fie $[a, b]$ un interval închis. În cele ce urmează vom arăta că pentru două funcţii $f \in H([a, b])$ şi $g \in C([a, b])$ ce coincid pe o mulţime densă $[a, b]$, mulţimea Im g nu poate să difere prea mult de Im f.

1. Fie $f \in D([a, b])$ şi $g \in C([a, b])$ astfel încît f şi g coincid pe mulţimea A densă în $[a, b]$. Dacă $y_0 \notin \mathrm{Im}\ f$, atunci avem pentru orice x, $f(x) > y_0$ sau $f(x) < y_0$. Reiese de aici că funcţia g are proprietatea că pentru orice $x \in [a, b]$ avem $g(x) \geqslant y_0$ sau respectiv $g(x) \leqslant y_0$. În caz contrar ar exista două intervale I, $J \subset [a, b]$ astfel încît dacă $x \in I$, atunci $g(x) > y_0$ iar dacă $x \in J$, atunci $g(x) < y_0$. Pe de altă parte, $A \cap I \neq \emptyset$ şi $A \cap I \neq \emptyset$ deci ar exista $x_1 \in I$, $x_2 \in J$ astfel încît $g(x_1) = f(x_1) > y_0$ şi $g(x_2) = f(x_2) < y_0$. Prin urmare dacă valoarea y_0 este luată de g, atunci ea este atinsă într-un punct de minim sau maxim global. Obţinem că Im g — Im f conţine cel mult două puncte şi anume cele ce corespund extremelor globale atinse de g.

2. Fie $f \in I([a, b])$ şi $g \in C([a, b])$ dacă f coincide cu g pe o mulţime A densă în $[a, b]$, atunci Im $g \subset$ Im f.

Presupunem ca Im g—Im f nu este vidă. Fie $y_0 \in \mathrm{Im}\ g - \mathrm{Im}\ f$. Există deci $x_0 \in [a, b]$ pentru care $g(x_0) = y_0 \neq f(x_0)$. Întrucît A este densă în $[a, b]$ reiese că există un şir $\{x_n : n \geqslant 1\} \subset A$ cu $\lim (x_n) = y_0$. Prin urmare avem $\lim (f(x_n)) = y_0 \neq f(x_0)$. Imaginea prin f a mulţimii închise $\{x_n : n \geqslant 1\} \cup \{x_0\}$ trebuie să fie închisă. Rezultă că există $k \in N$ pentru care $f(x_k) = y_0$, Contradicţie.

Sintetizînd ultimele două rezultate obţinem :

PROPOZIŢIA 2. *Dacă* $f \in H([a, b])$ *şi* f *coincide pe o mulţime densă în* $[a, b]$ *cu* $g \in C([a, b])$, *atunci* Img — Imf *conţine cel mult două puncte*.

Este binecunoscut faptul că o funcţie $f \in D(R)$ nu poate avea discontinuităţi de prima speţă. Propoziţia ce urmează ne va asigura că şi atunci cînd $f \in I(R)$ mulţimea discontinuităţilor de prima speţă ale lui f este destul de săracă.

PROPOZIŢIA 3. *Dacă $f \in I(R)$, atunci mulţimea D_f este rară.*

Demonstraţie. Să presupunem că D_f este densă pe un interval $I \subset R$. Fie $x_0 \in \operatorname{Int} I$ astfel încît $x_0 \in D_f$. Avem $\lim\ (f(x): x \to x_0,\ x < x_0) = l_1 \neq f(x_0)$ sau $\lim\ (f(x): x \to x_0, x > x_0) = l_2 \neq f(x_0)$. Să presupunem $l_1 \neq f(x_0)$. Să arătăm, pentru început, că mulţimea $B = f^{-1}(l_1) \cap D_f$ nu poate fi rară. Dacă B este rară, atunci D_f fiind densă în I reiese că $D_f - f^{-1}(l_1)$ este densă în I. Există deci un şir $\{x_n : n \geqslant 1\} \subset (D_f - f^{-1}(l_1)) \cap (-\infty, x_0]$ astfel încît $\lim\ (x_n) = x_0$. Evident $\lim\ (f(x_n)) = l_1$. Mulţimea $\{x_n : n \geqslant 1\} \cup \{x_0\}$ este închisă şi întrucît $l_1 \notin \{f(x_n) : n \geqslant 1\} \cup f(x_0)\}$ ajungem la o contradicţie. Am obţinut deci că mulţimea B este densă pe un interval J. Fie $y_0 \in \operatorname{Int} J$ astfel încît $y_0 \in f^{-1}(l_1) \cap D_f$. Există în B două şiruri: $\{z_n : n \geqslant 1\}$ crescător şi convergent la y_0 şi $\{y_n : n \geqslant 1\}$ descrescător şi convergent la y_0. Punctul y_0 se găseşte în D_f deci f are limite laterale în y_0. În acelaşi timp $z_k \in f^{-1}(l_1)$, $y_k \in f^{-1}(l_1)$ pentru $k \geqslant 1$. Obţinem $\lim\ (f(x): x \to y_0, x < y_0) = l_1$ şi $\lim(f(x): x \to y_0,\ x > y_0) = l_1$. Întrucît $y_0 \in f^{-1}(l_1)$ putem conchide că f este continuă în y_0. Această constatare ce contrazice $y_0 \in D_f$ încheie demonstraţia. Evident dacă $l_1 = f(x_0)$ iar $l_2 \neq f(x_0)$ procedăm analog.

În legătură cu această ultimă propoziţie profesorul Solomon Marcus ne-a pus intrebarea dacă pentru orice mulţime $A \subset R$ rară şi numărabilă există o funcţie închisă $f: R \to R$ astfel încît $A \subset D_f$. Propoziţia următoare va arăta că răspunsul la această întrebare este negativ.

PROPOZIŢIA 4. *Fie $f \in I(R)$. Dacă $x_0 \in D_f$, atunci există $t > 0$ astfel încît una dintre mulţimile $(x_0,\ x_0 + t) \cap D_f$ sau $(x_0 - t, x_0) \cap D_f$ să fie vidă.*

Demonstraţie. Trebuie să arătăm de fapt că dacă x_0 este punct de acumulare pentru mulţimea D_f, atunci nu există şi un şir crescător $\{x_n : n \geqslant 1\}$ şi unul descrescător $\{y_n : n \geqslant 1\}$ amîndouă avînd limita x_0 şi amîndouă incluse în D_f. Să presupunem că această situaţie ar avea loc. Din $x_0 \in D_f$ rezultă că limitele laterale ale lui f în x_0 există. Cel puţin una dintre ele, fie aceasta l_1, nu este egală cu $f(x_0)$. Rezultă că unul dintre şirurile $\{x_n : n \geqslant 1\}$ sau $\{y_n : n \geqslant 1\}$ are proprietatea că imaginea sa prin f are ca punct de acumulare pe l_1. Să zicem $\lim\ (f(x_n)) = l_1 = f(x_0)$. Întrucît imaginea prin f a mulţimii $\{x_n : n \geqslant k\} \cup \{x_0\}$ este închisă pentru orice $k \in \mathbf{N}'$ rezultă că există un subşir $\{z_n : n \geqslant 1\} \subset \{x_n : n \geqslant 1\}$ pentru care $f(z_k) = l_1$, $k \geqslant 1$. Pentru orice $k \in \mathbf{N}^*$ există $r_k > 0$ astfel încît $(z_k - r_k, z_k + r_k) \cap \{z_n : n \geqslant 1,\ n \neq k\} = \emptyset$. Punctul z_k se găseşte în D_f deci există $t_k \in (z_k - r_k, z_k + r_k)$ astfel încît $f(z_k) \neq f(t_k)$. Se constată rapid că şirul $\{t_n : n \geqslant 1\}$ converge la x_0. Avem $\lim\ (f(t_n)) = l_1$ dar pentru orice $k \in \mathbf{N}^*$, $f(t_k) \neq l_1$. Reiese că imaginea prin f a mulţimii $\{t_n : n \geqslant 1\} \cup \{x_0\}$ nu este închisă. Contradicţie.

Exemplu. Mulţimea $\{1/k : k \geqslant 1\} \cup \{-1/k : k \geqslant 1\} \cup \{O\}$ nu poate fi inclusă într-o mulţime de tipul D_f cu $f \in I(R)$.

În [3] profesorul Solomon Marcus discutînd unele extensii ale teoremei lui Froda referitoare la discontinuităţile de prima speţă introduce noţiunea de spaţiu Froda:

Un spaţiu topologic M este spaţiu Froda dacă pentru orice funcţie $f: R \to M$ mulţimea discontinuităţilor de speţa I-a ale lui f este numărabilă.

În mod analog putem spune că un spaţiu topologic M este un e-spaţiu dacă pentru orice funcţie închisă $f: R \to M$ mulţimea discontinuităţilor de prima speţă ale lui f este rară. Demonstraţia propoziţiei 3 poate fi aplicată întocmai şi dacă funcţia închisă f ia valori într-un spaţiu metric, deci orice spaţiu metric este un k-spaţiu.

Rezultatele de mai înainte pot crea senzaţia că afirmaţia de început a lucrării după care funcţiile din $I(R)$ şi cele din $D(R)$ sînt esenţial diferite ar fi nefondată.. Există însă numeroase proprietăţi ale funcţiilor Darboux pe care funcţiile închise nu le verifică. Spre exemplu teorema lui Sierpinski ce afirmă că orice funcţie $f: [0, 1] \to R$ poate fi scrisă ca suma a două funcţii din $D([0, 1])$ nu are un analog valabil pentru funcţiile din $I([0, 1])$. Într-adevăr, propoziţia 1 ne arată că dacă există $x_0 \in [0, 1]$ astfel încît $L(x_0, f)$ să fie nenumărabilă, atunci f nu se poate scrie ca suma a două funcţii din $I([0, 1])$. Alte asemenea trăsături ale funcţiilor Darboux pe care nu le au funcţiile închise pot fi întîlnite în [4], unde se studiază o serie de dezvoltări ale teoremei lui Sierpinski.

Primită la redacţie în 7 aprilie 1986

Facultatea de matematică
Universitatea Bucureşti
Bucureşti, România

BIBLIOGRAFIE

1. Helena Pawlak, *On some conditions equivalent to the continuity of closed functions*, Demonstratio Mathematica, *XVII*, *3* (1984) 723—732.
2. M. Rădulescu şi S. Rădulescu, *Teoreme şi probleme de analiză matematică*, Edit. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.
3. Solomon Marcus, *Alexandru Froda un gînditor al fundamentelor*, Gazeta Matematică A, *3—4* (1985), 175—177.
4. Alexandru Zaharescu, *Reprezentarea funcţiilor arbitrare prin funcţii Darboux grafic continue*, Stud. Cerc. Mat., *35*, 2(1983) 161—168.
5. John L. Kelley, *General topology*, Princeton. New Jersey Van Nostrand, 1955.

COMMON PROPERTIES OF DARBOUX FUNCTIONS AND OF CLOSED FUNCTIONS

ABSTRACT

The present paper is related to some results concerning the closed functions $f: R \to R$, which are presented in [1].

We are proving that each closed function $f: R \to R$ has a nowhere dense set of discontinuities of the first species.

Let $H = \{f: [a, b] \to R : f$ be a Darboux function or f be a closed function$\}$. Let $g: [a, b] \to R$ be a continuous function. We are proving that if $f \in H$ and there exists a set A dense in $[a, b]$ such that $f(x) = g(x)$ for each $x \in A$, then the set Im f — Im g contains less than three points.

Our study suggests that Darboux functions and closed functions have a similar behaviour from the view-point of continuity.