3 Exercices du Chapitre 3

Exercice 10.1

Soient $x, y \in \mathbb{R}^k$. Établir que

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2.$$

Interpréter géométriquement ce résultat.

Solution. Par définition de la norme

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}.$$

Ceci donne donc

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= (x+y)\cdot(x+y) + (x-y)\cdot(x-y)\\ &= x\cdot x + y\cdot y + 2x\cdot y + x\cdot x + y\cdot y - 2x\cdot y\\ &= 2\,x\cdot x + 2\,y\cdot y = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2.\end{aligned}$$

La somme des carrés des côtés d'un parallèlogramme est égale à la somme des carrés de ses deux diagonales. □

Exercice 10.2

Soit $x \in \mathbb{R}^k$, $k \geq 2$. Démontrer qu'il existe $y \in \mathbb{R}^k$, $y \neq 0$, tel que $x \cdot y = 0$.

Solution. Si $x = 0$ on peut prendre n'importe quel $y \neq 0$. Si $x = (x_1, \ldots, x_k) \neq 0$, il existe i tel que $x_i \neq 0$. On considère deux cas :

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} x_j^2 = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} x_j^2 > 0.$$

Dans le premier cas $x_j = 0$ pour $j \neq i$ et on prend

$$y_i = 0 \quad \text{et} \quad y_j = 1 \text{ pour } j \neq i;$$

dans le second cas, on prend

$$y_j = x_j \text{ pour } j \neq i \quad \text{et} \quad y_i = -\frac{1}{x_i}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} x_j^2.$$

□

Exercice 10.3

Soit $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

(i) Montrer que, pour tout espace métrique (X, d) et pour toute constante $\alpha > 0$, la fonction

$$(x, y) \mapsto (\alpha d)(x, y) \stackrel{\text{déf}}{=} \alpha\, d(x, y)$$

est une métrique sur X.

(ii) Si d_1 et d_2 sont deux métriques sur X, montrer que la fonction

$$(x, y) \mapsto (d_! + d_2)(x, y) \stackrel{\text{déf}}{=} d_1(x, y) + d_2(x, y)$$

est une métrique sur X.

(iii) Montrer que, pour tout espace métrique (X, d), la fonction

$$(x, y) \mapsto \underline{d}(x, y) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

est une métrique sur X.

(iv) Soit $\{d_n : n \geq 1\}$ une suite de fonctions $d_n : X \times X \to \mathbb{R}_+$ tel que pour tout entier $n \geq 1$

$$\forall x, y \in X, \quad d_n(x, y) = d_n(y, x) \tag{3.1}$$

$$\forall x, y, z \in X, \quad d_n(x, z) \leq d_n(x, y) + d_n(y, z) \tag{3.2}$$

$$x = y \quad \Rightarrow d_n(x, y) = 0 \tag{3.3}$$

et, en plus,

$$d_1(x, y) = 0 \quad \Rightarrow x = y. \tag{3.4}$$

Montrer que la fonction

$$(x, y) \mapsto d_\infty(x, y) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x, y)}{1 + d_n(x, y)}$$

est bien définie et qu'elle est une métrique sur X.

Solution. On doit dans chaque cas vérifier les trois axiomes de la Définition 2.1 : une *métrique* dans un ensemble X est une fonction

$$(x, y) \mapsto d(x, y) : X \times X \to \mathbb{R}_+, \quad \mathbb{R}_+ \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

qui satisfait les trois axiomes suivants :

(M1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$;

(M3) $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$.

(i) Pour $\alpha > 0$, $\alpha\, d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ et

(M1) $\alpha\, d(x,y) = 0 \iff d(x,y) = 0 \iff x = y$;

(M2) $\alpha\, d(x,y) = \alpha\, d(y,x)$;

(M3) $\alpha\, d(x,y) \le \alpha\, d(x,z) + \alpha\, d(z,y)$.

(ii) Par définition des métriques d_1 et d_2, $d_1 + d_2 : X \times X \to \mathbb{R}_+$ et

(M1) $(d_1 + d_2)(x,y) = 0 \iff d_1(x,y) = 0$ et $d_2(x,y) = 0 \iff x = y$;

(M2) $d_1(x,y) + d_2(x,y) = d_1(y,x) + d_2(y,x)$;

(M3) $d_1(x,y) \le d_1(x,z) + d_1(z,y)$ et $d_2(x,y) \le d_2(x,z) + d_2(z,y)$ entraîne $d_1(x,y) + d_2(x,y) \le d_1(x,z) + d_2(x,z) + d_1(z,y) + +d_2(z,y))$.

(iii) Par définition, $\underline{d} : X \times X \to \mathbb{R}_+$ et

(M1) $\underline{d}(x,y) = 0 \iff d(x,y) = 0 \iff x = y$;

Pour (M2)

$$\underline{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1 + d(y,x)} = \underline{d}(y,x)$$

Pour (M3), on réécrit

$$\underline{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} = 1 - \frac{1}{1 + d(x,y)}$$

Maintenant, puisque $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$, il vient

$$1 + d(x,y) \le 1 + d(x,z) + d(z,y)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 + d(x,y)} \ge \frac{1}{1 + d(x,z) + d(z,y)} &\ge \frac{1}{1 + d(x,z) + d(z,y) + d(x,z)\, d(z,y)} \\ &= \frac{1}{(1 + d(x,z))\,(1 + d(z,y))}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} = 1 - \frac{1}{1 + d(x,y)} &\le 1 - \frac{1}{(1 + d(x,z))\,(1 + d(z,y))} \\ &= \frac{d(x,z) + d(z,y) + d(x,z)\, d(z,y)}{(1 + d(x,z))\,(1 + d(z,y))} \\ &\le \frac{d(x,z) + d(z,y) + 2\, d(x,z)\, d(z,y)}{(1 + d(x,z))\,(1 + d(z,y))} \\ &= \frac{d(x,z)}{1 + d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1 + d(z,y)}.\end{aligned}$$

(iv) Pour (M1), si $x = y$ alors pour chaque $n \ge 0$, $d_n(x,y) = 0$ et

$$d_\infty(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x,y)}{1 + d_n(x,y)} = 0.$$

Réciproquement, si $d_\infty(x,y)=0$, alors pour chaque $n \geq 0$, $d_n(x,y)=0$. En particulier, $d_0(x,y)=0$ et, par hypothèse sur d_0, $x=y$.

Comme chaque d_n vérifie (M2), alors, par définition de d_∞, d_∞ vérifie (M2). Enfin (M3) est une conéquence directe de la partie (iii). □

Exercice 10.4 (page 102)

Soient (X_i, d_i), $1 \leq i \leq n$, des espaces métriques et

$$X_1 \times \cdots \times X_n \stackrel{\text{déf}}{=} \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in X_i\} \tag{3.5}$$

l'*espace produit* des X_i. Alors la fonction

$$\begin{aligned} &(x,y) = ((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) \mapsto d_\infty(x,y) \stackrel{\text{déf}}{=} \max_{1\leq i\leq n} d_i(x_i,y_i) \\ &: (X_1\times\cdots\times X_n)\times(X_1\times\cdots\times X_n) \to \mathbb{R}_+ \end{aligned} \tag{3.6}$$

est une métrique sur $X_1 \times \cdots \times X_n$. De la même façon, pour tout p, $1 \leq p < \infty$, la fonction

$$d_p(x,y) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i,y_i)^p \right\}^{1/p} \tag{3.7}$$

est une métrique sur $X_1 \times \cdots \times X_n$.

Solution. À compléter en suivant la démonstration du Théorème 1.2 page 51. □

Exercice 10.5

Soit E un espace vectoriel normé au sens des Définitions 1.1 et 1.4 du Chapitre 2. Montrer que

$$d(x,y) \stackrel{\text{déf}}{=} \|x-y\|$$

est une métrique sur E.

Solution. À partir des propriétés de la norme (Définition 1.4 page 50). □

Exercice 10.6 (page 103)

Soient A_1, A_2, ... des sous-ensembles d'un espace métrique. On pose

$$B_n = \cup_{i=1}^n A_i \quad \text{et} \quad B = \cup_{i=1}^\infty A_i.$$

Démontrer que

$$\forall n \geq 1, \quad \overline{B_n} = \cup_{i=1}^n \overline{A_i} \quad \text{et} \quad \overline{B} \supset \cup_{i=1}^\infty \overline{A_i}.$$

Donner un exemple où l'inclusion est stricte.

Solution. (i) On a clairement $A_i \subset \overline{A_i}$ et donc

$$B_n = \cup_{i=1}^n A_i \subset \cup_{i=1}^n \overline{A_i} \quad \Rightarrow \overline{B_n} \subset \cup_{i=1}^n \overline{A_i}.$$

Dans l'autre sens,

$$A_i \subset \cup_{i=1}^n A_i \quad \Rightarrow \overline{A_i} \subset \overline{\cup_{i=1}^n A_i} = \overline{B_n} \quad \Rightarrow \cup_{i=1}^n \overline{A_i} \subset \overline{B_n}.$$

(ii) On reprend le dernier argument avec $n = \infty$:

$$A_i \subset \cup_{i=1}^\infty A_i \quad \Rightarrow \overline{A_i} \subset \overline{\cup_{i=1}^\infty A_i} = \overline{B} \quad \Rightarrow \cup_{i=1}^\infty \overline{A_i} \subset \overline{B}.$$

En général, on n'a pas l'égalité. Il suffit de considérer l'exemple

$$\forall i \geq 1, \quad A_i = \{1/i\} \quad \Rightarrow B = \{1/i : i \geq 1\} \text{ et } \overline{B} = B \cup \{0\}$$

ce qui donne $A_i = \overline{A_i}$ et

$$\cup_{i=1}^\infty \overline{A_i} = B \subsetneqq B \cup \{0\} = \overline{B}.$$

□

Exercice 10.7

Donner un exemple d'un ensemble borné de $\mathbb{R}$ ayant exactement trois points d'accumulation.

Solution. L'ensemble

$$\left\{\frac{1}{n} : n \geq 1\right\} \cup \left\{1 + \frac{1}{n} : n \geq 1\right\} \cup \left\{2 + \frac{1}{n} : n \geq 1\right\}$$

a pour points d'accumulation exactement 0,1 et 2. □

Exercice 10.8

On désigne par E' l'ensemble des points d'accumulation d'un sous-ensemble d'un espace métrique (X, d). Établir que E' est fermé et que E et $\overline{E}$ ont les mêmes points d'accumulation. E et E' ont-ils toujours les mêmes points d'accumulation ?

Solution. Soit (X, d) l'espace métrique sousjacent et $E \subset X$.

(i) $(E')' \subset E'$. Pour montrer que E' est fermé dans (X, d), il suffit d'établir que $(E')' \subset E'$, c'est-à-dire, tout point d'accumulation $x' \in X$ de E' est un point d'accumulation de E ce qui revient à démontrer que

$$\forall r > 0, \quad B'_r(x') \cap E \neq \varnothing.$$

On fixe $r > 0$. Par définition du point d'accumulation $x' \in (E')'$,

$$B'_{r/2}(x') \cap E' \neq \varnothing.$$

Il existe donc $x_1' \in E'$, $x_1' \neq x'$, tel que $d(x_1', x') < r/2$. Comme $x_1' \in E'$,

$$B'_{d(x_1',x')/3}(x_1') \cap E \neq \varnothing$$

et il existe $x_1 \in E$, $x_1 \neq x_1'$, tel que $d(x_1', x_1) < d(x_1', x')/3$. Donc, par l'inégalité du triangle,

$$d(x_1, x') \leq d(x_1', x_1') + d(x_1', x') < \frac{d(x_1', x')}{3} + d(x_1', x') < r \quad \Rightarrow x_1 \in B_r(x') \cap E$$
$$d(x_1, x') \geq d(x_1', x') - d(x_1' x_1) > d(x_1', x') - \frac{d(x_1', x')}{3} > 0 \quad \Rightarrow x_1 \neq x'$$
$$\Rightarrow B_r'(x') \cap E \supset \{x_1\} \neq \varnothing.$$

Comme ceci est vrai pour tout $r > 0$, $x' \in E'$ et $(E')' \subset E'$. Comme E' contient tous ses points d'accumulation, il est fermé.

(ii) $E' = (\overline{E})'$. Comme $E \subset \overline{E}$, si $x' \in E'$, alors, par définition,

$$\forall r > 0, \quad B_r'(x') \cap E \neq \varnothing \quad \Rightarrow \forall r > 0, \quad B_r'(x') \cap \overline{E} \neq \varnothing$$

et $E' \subset (\overline{E})'$.

Dans l'autre sens, on veut montrer que pour $x' \in (\overline{E})'$, on a $x' \in E'$, c-à-d.,

$$\forall r > 0, \quad B_r'(x') \cap E \neq \varnothing. \tag{3.8}$$

On fixe $r > 0$. Comme $B'_{r/2}(x') \cap \overline{E} \neq \varnothing$, soit $\bar{x} \in B'_{r/2}(x') \cap \overline{E}$. Comme $\bar{x} \in \overline{E}$ est un point d'adhérence de E et que $d(\bar{x}, x') > 0$, il vient

$$B_{d(\bar{x},x')/3}(\bar{x}) \cap E \neq \varnothing.$$

Soit un point $y \in B_{d(\bar{x},x')/3}(\bar{x}) \cap E$. Par l'inégalité du triangle

$$d(y, x') \leq d(y, \bar{x}) + d(\bar{x}, x') < \frac{d(\bar{x}, x')}{3} + d(\bar{x}, x') < \frac{r}{6} + \frac{r}{2} < r$$
$$d(y, x') \geq d(\bar{x}, x') - d(y, \bar{x}) > d(\bar{x}, x') - \frac{d(\bar{x}, x')}{3} = \frac{2}{3} d(\bar{x}, x') > 0$$
$$\Rightarrow y \in B_r(x') \cap E \quad \Rightarrow x' \in E'$$

puisque, pour tout $r > 0$, $B_r(x') \cap E \neq \varnothing$.

(iii) $(E')' = E'$? De la partie (i), on sait que $(E')' \subset E'$. Cependant, en général, l'égalité n'est pas vérifiée. On considère, par exemple, l'ensemble

$$E = \left\{ \frac{1}{n} : n \geq 1 \right\} \cup \left\{ 1 + \frac{1}{n} : n \geq 1 \right\} \cup \left\{ 2 + \frac{1}{n} : n \geq 1 \right\}$$

qui a pour points d'accumulation exactement $E' = \{0, 1, 2\}$. Comme E' n'a que des points isolés, $(E')' = \varnothing$. Donc, en général, $(E')' \subsetneq E'$. □

Exercice 10.9

Tout point d'un ensemble fermé $E \subset \mathbb{R}^2$ est-il point d'accumulation de E ? Reprendre le problème en supposant E ouvert.

Solution. (i) Tout point d'un ensemble fermé n'est pas un point d'accumulation. Il suffit de prendre $E = \{0\}$ dans $\mathbb{R}$.

(ii) Cependant, pour tout point x d'un ensemble ouvert E, il existe $r > 0$ tel que $B_r(x) \subset E$ et pour tout ρ, $0 < \rho \le r$, $B_\rho(x) \subset E$, Donc

$$\begin{aligned} &\forall \rho,\ 0 < \rho \le r, \quad B'_\rho(x) \cap E = B'_\rho(x) \neq \varnothing \\ &\Rightarrow \forall \rho > 0, \quad B'_\rho(x) \cap E \neq \varnothing \end{aligned}$$

et $x \in E'$. Pour un ouvert E, on a donc $E \subset E'$. □

Exercice 10.10

Soit (E, d) un espace métrique et E un sous-ensemble de X. Montrer que

(a) $\complement \operatorname{int} E = \overline{\complement E}$.

(b) Est-ce que E et $\operatorname{int} E$ ont le même intérieur ?

(c) Est-ce que E et $\operatorname{int} E$ ont la même adhérence ?

Solution. (a) $\complement \operatorname{int} E = \overline{\complement E}$. Comme $\operatorname{int} E \subset E$, on a $\complement E \subset \complement \operatorname{int} E$. De plus, comme $\operatorname{int} E$ est ouvert, $\complement \operatorname{int} E$ est fermé et

$$\overline{\complement E} \subset \complement \operatorname{int} E.$$

Dans l'autre sens, on montre que $\complement\overline{\complement E} \subset \operatorname{int} E$ ce qui implique $\complement \operatorname{int} E \subset \overline{\complement E}$. Comme $\complement\overline{\complement E}$ est ouvert, pour tout $x \in \complement\overline{\complement E}$, il existe $r > 0$ tel que

$$B_r(x) \subset \complement\overline{\complement E} \quad \Rightarrow B_r(x) \cap \overline{\complement E} = \varnothing \quad \Rightarrow B_r(x) \cap \complement E = \varnothing \quad \Rightarrow B_r(x) \subset E$$

et $x \in \operatorname{int} E$.

(b) Est-ce que E et $\operatorname{int} E$ ont le même intérieur ? Oui car, par le Théorème 3.1 (ii) et (iii) du Chapitre 3, $\operatorname{int} E$ est ouvert et, si E est ouvert, alors $E = \operatorname{int} E$. On a donc $\operatorname{int}(\operatorname{int} E) = \operatorname{int} E$.

(c) Est-ce que E et $\operatorname{int} E$ ont la même adhérence ? Par définition, $\operatorname{int} E \subset E$ entraîne $\overline{\operatorname{int} E} \subset \overline{E}$. En général, on n'a pas l'égalité. Par exemple,

$$E \stackrel{\text{déf}}{=} \{0\} \cup [1,2], \quad \overline{E} = E, \quad \operatorname{int} E =]1,2[\,, \quad \overline{\operatorname{int} E} = [1,2].$$

Donc, $\overline{\operatorname{int} E} = [1,2] \subsetneqq \{0\} \cup [1,2], = \overline{E}$. □

Exercice 10.11

Donner un exemple d'un recouvrement ouvert de l'intervalle $]0,1[$ dont on ne peut extraire de sous-recouvrement fini.

Solution. On prend

$$G_n \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\frac{1}{n}, 1\right), \quad n \geq 1 \quad \text{ou} \quad G_n \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right), \quad n \geq 1.$$

□

Exercice 10.12

Si X est un ensemble infini, on pose pour tout $x, y \in X$

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq y \\ 0, & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Montrer que d est une métrique sur X. Quels en sont les ouverts ? les fermés ? les compacts ?

Solution. (i) d est une métrique. On voit que $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$. Par définition $d(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$ et (M1) est vérifié. L'axiome (M2) de symétrie l'est aussi par définition. Pour l'axiome (M3), si $x = y$, alors $d(x,y) = 0 \leq d(x,z) + d(z,y)$ pour tout $z \in X$. Si $x \neq y$, alors pour tout $z \in X$, ou bien $x \neq z$ et $d(x,z) = 1$ ou bien $y \neq z$ et $d(y,z) = 1$:

$$d(x,y) = 1 \leq d(x,z) + d(y,z).$$

(ii) Soit $x \in X$. En prenant $r = 1/2$, il vient $B_{1/2}(x) = \{x\}$. Par définition tout singleton $\{x\}$ de X est un ouvert. Comme les unions arbitraires d'ouverts sont ouvertes, alors tout sous-ensemble de X est ouvert.

De même, pour tout sous-ensemble E de X, $\complement E$ est un ouvert ce qui entraîne $E = \complement(\complement E)$ est fermé.

Pour un compact $K \subset X$, pour tout recouvrement ouvert G_α de K, il existe un sous-recouvrement fini :

$$K \subset \cup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}.$$

En particulier, la famille $\{G_x : x \in X\}$, $G_x = \{x\}$, est un recouvrement ouvert de K. Donc

$$K \subset \cup_{i=1}^{n} G_{x_i} = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

et K ne contient qu'un nombre fini de point. Réciproquement si K est fini, il a la propriété et K est compact. On en conclut que tous les singletons sont ouvert, fermé et compact. □

Exercice 10.13

On considère l'ensemble à deux éléments $\{0, 1\}$ dans $\mathbb{R}$ équipé d'une métrique arbitraire d (il en existe au moins une : $d(x, y) = |x - y|$).

(i) Énumérer tous les ouverts de $(\{0, 1\}, d)$. Justifier.

(ii) Énumérer tous les compacts de $(\{0, 1\}, d)$. Justifier.

(iii) Est-ce que $(\{0, 1\}, d)$ est complet ? Justifier.

(iv) Énumérer tous les fermés de $X = \{0, 1, 2\}$ pour une métrique arbitraire d_X sur X. Justifier.

Démonstration. (i) Les ensembles $\varnothing$ et X sont ouverts. Par définition de la métrique, $d(1, 0) > 0$. Les ensembles $\{0\}$ et $\{1\}$ sont des ouverts. En effet, la boule $B_{d(1,0)/2}(0) = \{0\}$ et trivialement $B_{d(1,0)/2}(0) \subset \{0\}$. De même pour $\{1\}$.

(ii) Comme tous les sous-ensembles de X n'ont qu'un nombre fini d'éléments, ils sont recouvrables par un sous-recouvrement fini de n'importe quel recouvrement ouvert. Donc ils sont tous compacts et fermés.

(iii) Comme X est compact, il est complet.

(iv) Tous les sous-ensembles de X n'ont qu'un nombre fini d'éléments, ils sont recouvrables par un sous-recouvrement fini de n'importe quel recouvrement ouvert. Donc ils sont tous compacts et fermés. □

Exercice 10.14

Soit $\{x_n\}$ une suite de Cauchy d'une espace métrique (X, d) ayant une valeur d'adhérence $x \in X$. Montrer que $x_n \to x$.

Solution. Soit $\{x_{n_k}\}$ la sous-suite telle que $x_{n_k} \to x$. Par l'inégalité du triangle

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x). \tag{3.9}$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe N tel que

$$\forall m, n > N, \quad d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

et il existe $K > N$ tel que

$$\forall k > K, \quad d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme, par définition d'une sous-suite,

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \ldots,$$

$n_k \geq k$ et $\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty$, on a pour $k > K$ et $n > N$

$$n_k \geq k > K > N \quad \Rightarrow d(x_n, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par l'inégalité du triangle (3.9)

$$d(x_n, x) \le d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.10}$$

$$\Rightarrow \forall n > N, \quad d(x_n, x) < \varepsilon \tag{3.11}$$

et toute la suite converge vers x. □

Exercice 10.15

Soit $X = \mathbb{R}$ muni de la métrique $d(x, y) = |x - y|$.

(i) Montrer que l'application

$$x \mapsto \varphi(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{x}{1 + |x|} : \mathbb{R} \to]-1, 1[\tag{3.12}$$

est une bijection.

(ii) Vérifier que

$$d_\varphi(x, y) \stackrel{\text{déf}}{=} d(\varphi(x), \varphi(y)) = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right| \tag{3.13}$$

est une métrique sur $\mathbb{R}$.

(iii) Vérifier que la suite $\{n\}$, $n \ge 1$, est d_φ-Cauchy, mais pas d-Cauchy.

Démonstration. (i) La fonction φ est bien définie. Pour $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x) = \varphi(y)$, on a

$$\frac{x}{1 + |x|} = \frac{y}{1 + |y|}$$

ce qui veut dire que x et y ont le même signe. Si $x \ge 0$

$$\frac{x}{1 + x} = \frac{y}{1 + y} \quad \Rightarrow x = y;$$

si $x < 0$

$$\frac{x}{1 - x} = \frac{y}{1 - y} \quad \Rightarrow x = y.$$

La fonction φ est injective. Pour la surjectivité, on se donne $y \in]-1, 1[$ et on cherche $s \in \mathbb{R}$ tel que $x/(1 + |x|) = y$. On voit que x doit être du même signe que y. Il y a de nouveau deux cas. Si $x \ge 0$

$$\frac{x}{1 + x} = y \quad \Rightarrow x = \frac{y}{1 - y} = \frac{y}{1 - |y|};$$

si $x < 0$

$$\frac{x}{1 - x} = y \quad \Rightarrow x = \frac{y}{1 + y} = \frac{y}{1 - |y|}.$$

La fonction inverse

$$\varphi^{-1}(y) = \frac{y}{1 - |y|}$$

est donc bien définie et φ est bijective.

(ii) Par définition, $d_\varphi(x, y) = d(\varphi(x), \varphi(y)) \geq 0$ puisque d est une métrique. Comme φ est une bijection, on a M1

$$d_\varphi(x, y) = d(\varphi(x), \varphi(y)) = 0 \quad \iff \quad \varphi(x) = \varphi(y) \quad \iff \quad x = y.$$

Pour M2

$$d_\varphi(x, y) = d(\varphi(x), \varphi(y)) = d(\varphi(y), \varphi(x)) = d_\varphi(y, x).$$

Pour M3

$$\begin{aligned} d(\varphi(x), \varphi(z)) &\leq d(\varphi(x), \varphi(y)) + d(\varphi(y), \varphi(z)) \\ &\Rightarrow d_\varphi(x, z) \leq d_\varphi(x, y) + d_\varphi(y, z). \end{aligned}$$

(iii) On considère la suite d'entiers naturels $\{n\}$ pour laquelle

$$d_\varphi(n + m, n) = \left| \frac{n + m}{1 + n + m} - \frac{n}{1 + n} \right| = \frac{m}{(1 + n + m)(1 + n)} < \frac{1}{1 + n}.$$

Pour $\varepsilon > 0$, soit N un entier naturel plus grand que $1/\varepsilon - 1$, Alors, pour tout $n > N$ et tout $m \geq 1$

$$d_\varphi(n + m, n) < \frac{1}{1 + n} < \frac{1}{1 + N} < \varepsilon$$

et $\{n\}$ est d_φ-Cauchy. □

Exercice 10.16

Soient (X, d) un espace métrique complet et $\{E_n\}$ une suite décroissante de fermés bornés non-vides tel que

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{diam}(E_n) = 0.$$

Montrer que $\cap_{n=1}^{\infty} E_n$ est un singleton.

Solution. Comme $\lim_{n \to \infty} \operatorname{diam}(E_n) = 0$, il existe une sous-suite $\{E_{n_k}\}$ telle que

$$\forall k \geq 1, \quad \operatorname{diam}(E_{n_k}) < \frac{1}{2^k}.$$

Pour chaque k on choisit un point $x_k \in E_{n_k}$. Comme $E_{n_{k+1}} \subset E_{n_k}$, on a

$$\forall k \geq 1, \quad d(x_{k+1}, x_k) \leq \operatorname{diam}(E_{n_k}) < \frac{1}{2^k}.$$

La suite $\{x_k\}$ est Cauchy : pour tout $k \geq 1$ et tout $m \geq 1$

$$d(x_{k+m}, x_k) \leq \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{2^{k+i}} \leq \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Comme X est complet, il existe $x \in X$ tel que $x_k \to x$. Étant donné que $n_k \leq k$, on a $E_{n_k} \subset E_k$ et la suite $\{x_k\}$ se retrouve donc dans chaque E_k à partir d'un certain rang et comme chaque E_k est fermé, $x \in E_k$. Donc

$$x \in E \overset{\text{déf}}{=} \cap_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Si E n'est pas un singleton, alors $\operatorname{diam} E > 0$ et comme $E \subset E_n$

$$\forall n \geq 1, \quad \operatorname{diam} E_n \geq \operatorname{diam} E > 0,$$

ce qui contredirait l'hypothèse que $\operatorname{diam} E_n \to 0$. □

Exercice 10.17

On dit qu'un espace métrique est *séparable* s'il contient un sous-espace dénombrable et dense. Montrer que $\mathbb{R}^k$ est séparable.

Solution. Il suffit de prendre le sous-espace $\mathbb{Q}^k$. Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, $\mathbb{Q}^k$ est dénombrable par le Théorème 2.3 du Chapitre 2. De la même façon, comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}^k$ est dense dans $\mathbb{R}^k$. □

Exercice 10.18

On dit qu'une famille d'ouverts $\{O_\alpha\}$ est une *base* de X si tout ouvert de X est la réunion d'ouverts de cette famille. Montrer qu'un espace métrique séparable posssède une base dénombrable.

Solution. Soit S le sous-espace dénombrable dense de (X, d). On associe à chaque $s \in S$ la famille de boules ouvertes

$$\{B_q(s) : 0 < q \in \mathbb{Q}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{B} \overset{\text{déf}}{=} \{B_q(s) : 0 < q \in \mathbb{Q} \text{ et } s \in S\} \tag{3.14}$$

Comme il y a bijection

$$(s, q) \mapsto B_q(s) : S \times \mathbb{Q}^+, \quad \mathbb{Q}^+, \overset{\text{déf}}{=} \{q \in \mathbb{Q} : q > 0$$

la famille d'ouverts $\mathcal{B} = \{B_q(s)\}$ est dénombrable.

Si O est un ouvert de (X, d), alors pour tout point $x \in O$, il existe $r \in \mathbb{R}^+$ tel que $B_r(x) \subset O$. Par densité de S, il existe $s_x \in S$ tel que $d(x, s_x) < r/3$. Donc $B_{r/2}(s_x) \subset B_r(x) \subset O$ et $x \in B_{r/2}(s_x)$ puisque

$$\forall z \in B_{r/2}(s_x), \quad d(x, z) \leq d(x, s_x) + d(s_x, z) < \frac{r}{2} + \frac{r}{3} < r$$
$$d(x, s_x) < \frac{r}{3} < \frac{r}{2} \quad \Rightarrow x \in B_{r/2}(s_x) \subset B_r(x) \subset O.$$

Enfin, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $q_r \in \mathbb{Q}^+$ tel que $r/3 < q_r < r/2$. On a donc

$$\forall z \in B_{q_r}(s_x), \quad d(x,z) \le d(x,s_x) + d(s_x,z) < \frac{r}{3} + q_r < \frac{r}{3} + \frac{r}{2} < r$$
$$d(x,s_x) < \frac{r}{3} < \ q_r \quad \Rightarrow x \in B_{q_r}(s_x) \subset B_r(x) \subset O.$$

On a montré que, pour chaque $x \in O$, il existe $s_x \in S$ et $q_x \in Q^+$ tel que

$$x \in B_{q_x}(s_x) \subset B_r(x) \subset O$$
$$\Rightarrow O \subset \cup_{\substack{s\in S \text{ et } \exists q \in \mathbb{Q}^+ \\ \text{tel que } B_q(s)\subset O}} B_q(s) \subset O.$$

La famille $\mathcal{B}$ est donc bien une base séparable de (X,d). □

Exercice 10.19

Soit un espace métrique (X,d) dans lequel tout sous-ensemble infini possède au moins un point d'accumulation. Démontrer que X est séparable. *Indication* : Soit $r > 0$ et $x_1 \in X$; ayant déterminé $x_1 \dots, x_j \in X$, choisir, s'il existe, un point x_{j+1} tel que $d(x_j, x_{j+1}) \ge r$ pour tout $i = 1, \dots, j$. Montrer que cette construction s'arrête au bout d'un nombre fini de boules ouvertes de rayon r. Prendre $r = 1/n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) et considérer les centres des boules correspondantes.

Solution. Soit $r > 0$ et $x_1 \in X$; ayant déterminé $x_1 \dots, x_j \in X$, choisir, s'il existe, un point x_{j+1} tel que $d(x_j, x_{j+1}) \ge r$ pour tout $i = 1, \dots, j$.

Si la construction ne s'arrête pas après un nombre fini d'étapes, on obtient une suite infinie de points distincts $S = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$. Par hypothèse, cet ensemble possède au moins un point d'accumulation $x \in X$:

$$\forall \rho > 0, \quad B'_\rho(x) \cap S \neq \varnothing.$$

Pour $\rho = r/4$, $B'_\rho(x) \cap S$ contient une infinité de points de S et

$$\forall s \in B'_\rho(x) \cap S, \quad d(s,x) < \frac{r}{4}.$$

Donc pour tous points s_1 et s_2 de $B'_\rho(x) \cap S$, $s_1 \neq s_2$,

$$d(s_1,s_2) \le d(s_1,x) + d(s_2,x) < \frac{r}{4} + \frac{r}{4} = \frac{r}{2} < r$$

ce qui contredit le fait que par construction tous les points de S sont distants d'au moinst r.

Pour $r = 1$, soit $x_{1,1}, \dots, x_{1,N_1}\}$ la suite finie associée; pour $r = 1/2$, soit $x_{2,1}, \dots, x_{2,N_2}\}$ la suite finie associée; pour $r = 1/n$, soit $x_{n,1}, \dots, x_{n,N_n}\}$ la suite finie associée. L'union E de toutes ces suites est au plus dénombrable.

Cet ensemble est dense dans X. En effet, supposons qu'il existe $x \in X$ et $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x_{n,j_n} \in S$, $d(x, x_{n,j_n}) \ge \varepsilon$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $1/n < \varepsilon$. Donc,

$$\forall j_n,\ 1 \le j_n \le N_n, \quad d(x, x_{n,j_n}) \ge \varepsilon > \frac{1}{n}$$

et ceci contredit la construction des points x_{n,j_n} pour $r = 1/n$ car on pourrait y ajouter x qui est à une distance plus grande que $1/n$ de tous les autres. □

Exercice 10.20

Démontrer que tout espace métrique compact K a une base dénombrable et qu'il est donc séparable. *Indication* : pour tout entier $n > 0$, il existe un nombre fini de boules ouvertes de rayon $1/n$ recouvrant K.

Solution. Si K ne possède qu'un nombre fini de points $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, ils sont isolés et l'on peut associer à chacun d'entre eux la boule ouverte de rayon

$$r_i \overset{\text{déf}}{=} \inf_{\substack{1 \leq j \leq \\ j \neq i}} d(x_j, x_i) > 0.$$

Si K possède un nombre de points infini, alors comme K est compact, il contient un point d'accumulation par le Théorème 7.3 du Chapitre 3 et on peut appliquer les résultats de l'Exercice 10.19. □