Test de Durbin-Watson

- On considère le modèle de régression linéaire multiple:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon},$$

  avec $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^\top$, $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)^\top$ et $\mathbf{X}$ est la matrice de design de dimension $n \times (p+1)$.
- On présume des erreurs autorégressives sur le terme d'erreur:

$$\epsilon_t = \phi\epsilon_{t-1} + u_t,$$

  avec $|\phi| < 1$.
- Le test de Durbin-Watson (DW) est un test paramétrique sur ϕ.

Test de Durbin-Watson: test paramétrique

- Avec ce test, on cherche à vérifier si ϕ est zéro ou non:

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \phi = 0, \\ H_1 &: \quad \phi \neq 0. \end{aligned}$$

- On peut également considérer des alternatives unilatérales; corrélation positive:

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \phi = 0, \\ H_1 &: \quad \phi > 0. \end{aligned}$$

- Présence de corrélation négative:

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \phi = 0, \\ H_1 &: \quad \phi < 0. \end{aligned}$$

- Compte tenu de la nature des données économiques, beaucoup d'attention a été consacré à tester la présence de corrélation positive.

Mise en oeuvre du test de Durbin-Watson

- Pour mettre en oeuvre le test, on ajuste le modèle $\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \epsilon$ par moindres carrés ordinaires:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{OLS} &= (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{y}, \\ \hat{\epsilon} &= \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta}_{OLS} \end{aligned}$$

- Un fait important et distinctif (comparativement à d'autres procédures) est que la méthode tient compte que l'on travaille avec des résidus.
- D'autres procédures sont approximatives et négligent cet aspect.

Statistique de test

- Durbin et Watson considère la statistique de test suivante:

$$\mathrm{DW} = \frac{\sum_{t=2}^{n}(\hat{\epsilon}_t - \hat{\epsilon}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n}\hat{\epsilon}_t^2}.$$

- On note que la statistique est telle que $\mathrm{DW} \geq 0$.
- De plus, notant que $(a-b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, on remarque que:

$$\begin{aligned}\sum_{t=2}^{n}(\hat{\epsilon}_t - \hat{\epsilon}_{t-1})^2 &\leq \sum_{t=1}^{n} 2(\hat{\epsilon}_t^2 + \hat{\epsilon}_t^2), \\ &= 4\sum_{t=1}^{n}\hat{\epsilon}_t^2.\end{aligned}$$

Comportement de la statistique de test

- Puisque la statistique est:

$$\mathrm{DW} = \sum_{t=2}^{n} (\hat{\epsilon}_t - \hat{\epsilon}_{t-1})^2 / \sum_{t=1}^{n} \hat{\epsilon}_t^2,$$

  on doit avoir:

$$\mathrm{DW} \leq 4.$$

- Ainsi la statistique est bornée:

$$0 \leq \mathrm{DW} \leq 4.$$

Comportement de la statistique de test, ϕ proche de +1

- Statistique de Durbin-Watson:

$$\mathrm{DW} = \sum_{t=2}^{n} (\hat{\epsilon}_t - \hat{\epsilon}_{t-1})^2 / \sum_{t=1}^{n} \hat{\epsilon}_t^2,$$

- On rappelle que $\epsilon_t = \phi \epsilon_{t-1} + u_t$.
- Si $\phi \approx 1$, tout en étant $\phi < 1$, on aura:

$$\begin{aligned} \epsilon_t &\approx \epsilon_{t-1} + u_t, \\ \epsilon_t - \epsilon_{t-1} &\approx u_t, \end{aligned}$$

- Intuitivement, $n^{-1} E(\sum_{t=1}^{n} u_t^2) = \sigma_u^2$, et si $|\phi| < 1$, $\mathrm{var}(\epsilon_t) = \sigma_u^2 / (1 - \phi^2)$
- Si ϕ est grand, la statistique est petite.

Comportement de la statistique de test, ϕ proche de -1

- Statistique de Durbin-Watson:

$$\mathrm{DW} = \sum_{t=2}^{n} (\hat{\epsilon}_t - \hat{\epsilon}_{t-1})^2 / \sum_{t=1}^{n} \hat{\epsilon}_t^2,$$

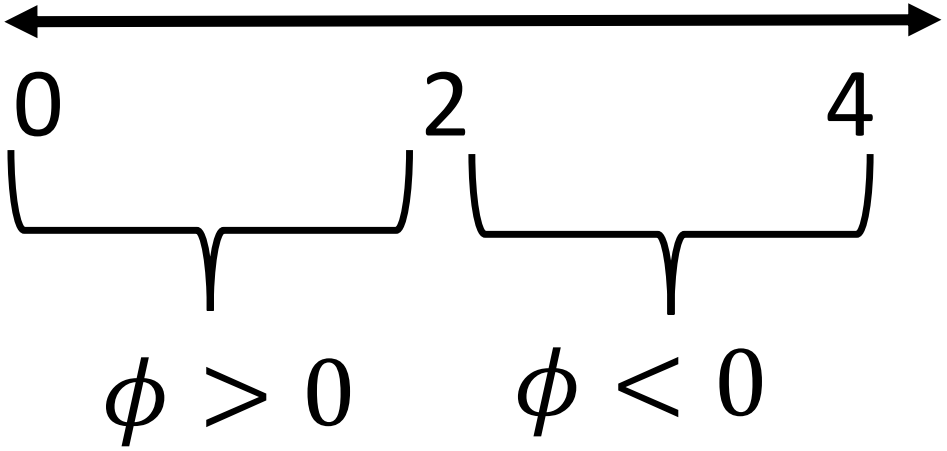
- On rappelle que $\epsilon_t = \phi \epsilon_{t-1} + u_t$.
- Si $\phi \approx -1$, tout en étant $\phi > -1$, on aura:

$$\begin{aligned} \epsilon_t &\approx -\epsilon_{t-1} + u_t, \\ \epsilon_t - \epsilon_{t-1} &\approx -2\epsilon_{t-1} + u_t, \end{aligned}$$

- Intuitivement, $E\left\{(\epsilon_t - \epsilon_{t-1})^2\right\} = 4\sigma_u^2/(1-\phi^2) + \sigma_u^2$.
- Donc si ϕ est petit, la statistique est grande et proche de quatre.

Zones de rejet

- Ainsi la statistique de test rejette en faveur de corrélation positive si la statistique est proche de zéro.
- Et la statistique de test rejette en faveur de corrélation négative si la statistique est proche de quatre.



Règles de décision; Modèle: $\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \epsilon$; $\epsilon_t = \phi\epsilon_{t-1} + u_t$

- Autocorrélation positive:

Hypothèses		Règles de décision au niveau α	
H_0:	$\phi = 0$,	$DM > d_U$:	'conserve' H_0;
H_1:	$\phi > 0$.	$DM < d_L$:	rejette H_0;
		$DM \in [d_L, d_U]$:	on ne peut rien dire;

- Autocorrélation négative:

Hypothèses		Règles de décision au niveau α	
H_0:	$\phi = 0$,	$4 - DM > d_U$	'conserve' H_0;
H_1:	$\phi < 0$.	$4 - DM > d_L$	rejette H_0;
		$4 - DM \in [d_L, d_U]$	on ne peut rien dire;

Règles de décision;

- Modèle: $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$; $\epsilon_t = \phi\epsilon_{t-1} + u_t$
- Test bilatéral:

$$\begin{aligned} H_0 : &\quad \phi = 0, \\ H_1 : &\quad \phi \neq 0. \end{aligned}$$

- Règles de décision:

  $DM > d_U$ et $4 - DM > d_U$: 'conserve' H_0;
  $DM < d_L$ ou $4 - DM > d_L$: rejette H_0;
  Sinon on ne peut rien dire.

Avantages et inconvénients

- Avantages:
  1. C'est un test paramétrique.
  2. Si le modèle est le *bon* modèle, c'est assurément un bon test.
- Inconvénients:
  1. Justement il repose sur une alternative du genre:

$$\epsilon_t = \phi\epsilon_{t-1} + u_t.$$

  2. Il existe bien d'autres alternatives; par exemple une alternative de type AR(2):

$$\epsilon_t = \phi_1\epsilon_{t-1} + \phi_2\epsilon_{t-2} + u_t.$$

  3. Si le vrai modèle est $\epsilon_t = \phi\epsilon_{t-2} + u_t$, disons, ou encore l'alternative saisonnière $\epsilon_t = \phi\epsilon_{t-4} + u_t$, la puissance du test de Durbin-Watson peut être faible.