Exemple, test des signes

- On considère un jeu de données portant sur le poids à la naissance de bébés dans un hôpital situé sur la Rive-Sud. Nous disposons de douze mesures X_i, $i = 1, \ldots, n$.

X_i	3.58	3.02	4.00	4.03	3.95	3.08
X_i	2.58	3.22	3.33	3.21	2.88	3.19

- On désire tester:

$$\begin{aligned} H_0 : &\quad \kappa_{1/2} = 3.00, \\ H_1 : &\quad \kappa_{1/2} > 3.00. \end{aligned}$$

Exemple (suite)

- Si on désire mettre en oeuvre le test des signes, on procède au calcul suivant:

X_i	3.58	3.02	4.00	4.03	3.95	3.08
$X_i - m_0$	0.58	0.02	1.00	1.03	0.95	0.08
signe	+	+	+	+	+	+
X_i	2.58	3.22	3.33	3.21	2.88	3.19
$X_i - m_0$	-0.42	0.22	0.33	0.21	-0.12	0.19
signe	-	+	+	+	-	+

- On trouve donc $k_{obs} = 10$.
- Sous l'hypothèse nulle, $K \sim bin(12, 1/2)$ et la fonction de répartition satisfait:

K	12	11	10	9
$P(K = k)$	0.0002	0.0029	0.0161	0.0537
$P(K \geq k_\alpha)$	0.0002	0.0031	0.0193	0.0730

- Exemple: En R, les fonctions pbinom, dbinom; 1-pbinom(8, 12, 0.5) donne 0.07299805; ou dbinom(10, 12, 0.5) donne 0.01611328.

Exemple (suite)

- Ainsi la valeur-p du test précédent est de 1.93%.
- On note que l'on ne peut trouver une valeur critique permettant de faire un test usuel avec niveau 5%.
- Si désiré, on peut faire appel à la théorie des tests aléatoires.
- Lorsque la statistique du test est une variable aléatoire discrète, souvent on ne peut trouver une valeur critique assurant le niveau désiré.
- Une façon d'atteindre le niveau consiste à rejeter quelquefois lorsque $K = 9$.

Mise en oeuvre d'un test aléatoire

- On rappelle que:

K	12	11	10	9
$P(K = k)$	0.0002	0.0029	0.0161	0.0537
$P(K \geq k_\alpha)$	0.0002	0.0031	0.0193	0.0730

- On considère le test suivant: "Rejeter H_0 si $K \geq 10$; rejeter H_0 avec probabilité p si $K = 9$". Le niveau du test est:

$$P\left(\{\text{rejeter } H_0\} \mid \{H_0 \text{ est vraie}\}\right) = P(K \geq 10) + pP(K = 9).$$

Il suffit de résoudre en α l'équation:

$$P(K \geq 10) + pP(K = 9) = \alpha$$

- Si $\alpha = 0.05$, $P(K \geq 10) = 0.0193$ et $P(K = 9) = 0.0537$ donne $p = 0.572$.
- Un test de niveau 5% est alors: "Rejeter H_0 si $K \geq 10$; rejeter H_0 avec probabilité 57.2% si $K = 9$".

Calcul de la valeur-p avec l'approximation normale

- On a vu que la valeur-p exacte est de 0.0193. En utilisant l'approximation normale, on obtient:

$$\begin{aligned}
\text{valeur-}p &= 1 - \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{n}}(k_{obs} - (n+1)/2)\right), \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{12}}(10 - (12+1)/2)\right), \\
&= 1 - \Phi(2.021), \\
&= 1 - 0.9784 = 0.0216
\end{aligned}$$