Séries chronologiques univariées (STT-6615)

Chapitre 3

Tests pour effets ARCH reposant sur les résidus carrés

Rappels sur les tests de Box-Pierce et Ljung-Box

- Supposons que l'on dispose du modèle ARMA(p,q) suivant:

$$\phi(B)(X_t - \mu) = \theta(B) w_t, \quad \forall t.$$

- Les polynômes $\phi(B)$ et $\theta(B)$ sont les polynômes autorégressifs et moyenne-mobile, respectivement.
- Le bruit blanc est présumé fort.

Autocorrélations échantillonnales

- Considérons $\hat{w}_t, \quad t = 1, \ldots n$ les résidus de cet ajustement.
- Considérons de plus les autocorrélations échantillonnales suivantes:

$$\hat{\rho}_w(k) = \frac{\sum_{t=k+1}^{n} \hat{w}_t \hat{w}_{t-k}}{\sum_{t=1}^{n} \hat{w}_t^2}$$

Tests de Box-Pierce et Ljung-Box

- Box et Pierce ont suggéré l'utilisation de:

$$Q_{BP}(M) = n\sum_{k=1}^{M} \hat{\rho}_w^2(k)$$

- Ljung et Box ont quant à eux suggéré:

$$Q_{LB}(M) = (n+2)\sum_{k=1}^{M} \left(\frac{n}{n-k}\right)\hat{\rho}_w^2(k)$$

- Dans les deux cas on rejette pour de grandes valeurs et on compare avec: χ^2_{M-p-q}

Test de McLeod et Li pour détecter de la non-linéarité (*J. Time Series Analysis*, 1983)

- La structure même des modèles ARCH suggère que la non-linéarité pourrait être cernée en étudiant les résidus au carré.
- On introduit:

$$\hat{\rho}_{ww}(k) = \frac{\sum_{t=k+1}^{n} \left(\hat{w}_t^2 - n^{-1}\sum_t \hat{w}_t^2\right)\left(\hat{w}_{t-k}^2 - n^{-1}\sum_t \hat{w}_t^2\right)}{\sum_{t=1}^{n} \left(\hat{w}_t^2 - n^{-1}\sum_t \hat{w}_t^2\right)^2}$$

Distribution asymptotique des résidus carré (de modèles ARMA)

- McLeod et Li (1983) ont étudié la distribution asymptotique de:

$$n^{1/2}\hat{\rho}_{ww} = \left(\hat{\rho}_{ww}(1), \ldots, \hat{\rho}_{ww}(M)\right)$$

- Sous l'hypothèse d'adéquation, ils ont montré que la loi limite est une normale multivariée centrée en zéro et avec une matrice de variances-covariances valant l'identité.

Test de McLeod-Li

- Le test de McLeod-Li pour effets ARCH est défini de la manière suivante:

$$Q_{ML}(M) = (n+2)\sum_{k=1}^{M}\left(\frac{n}{n-k}\right)\hat{\rho}_{ww}^{2}(k)$$

- La distribution limite est de type χ_M^2;
- Une différence avec le tests de Box-Pierce-Ljung est qu'il n'y a pas lieu d'ajuster les degrés de liberté.

Test de type Multiplicateur de Lagrange

- Ce test a été proposé dans l'article original de Engle (*Econometrica*, 1982) introduisant les modèles ARCH.
- L'avantage de ce genre de statistiques de test est qu'ils nécessitent seulement l'estimation des paramètres sous l'hypothèse nulle.
- Dans notre contexte l'hypothèse nulle stipule l'absence d'effets ARCH.

Hypothèse nulle et modèle de régression auxiliaire

- Il est utile d'introduire la régression:

$$w_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 w_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_M w_{t-M}^2 + e_t$$

- L'hypothèse nulle de ce test se formule donc comme: $H_0 : \alpha_1 = \ldots = \alpha_M = 0$
- La constante *M* est fixée par l'analyste.
- On présume la structure suivante pour la variance conditionnelle $\sigma_t^2 = h(\mathbf{z}_t \boldsymbol{\alpha})$

$$\mathbf{z}_t = \left(1, w_{t-1}^2, \ldots, w_{t-M}^2\right)^T \quad \boldsymbol{\alpha} = \left(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_M\right)^T$$

Calcul du test LM de Engle (1982)

- Posons $$SCR_0 = \sum_{t=M+1}^{n} \left(w_t^2 - n^{-1} \sum w_t^2 \right)^2$$

$$SCR_1 = \sum_{t=M+1}^{n} \hat{e}_t^2$$

- Le test *LM* est le test *F* suivant:
- $$F = \frac{\left(SCR_0 - SCR_1 \right) / M}{SCR_1 / \left(n - 2M - 1 \right)}$$

Test LM de Engle (suite)

- Une version asymptotiquement équivalente et particulièrement facile à calculer est:
  - LM = $n\ R^2$
- Le coefficient R^2 est le coefficient de détermination dans la régression précédente.

Test *LM* fournie par S-PLUS

- Le test LM est effectué en pratique avec des résidus standardisés de l'ajustement d'un modèle GARCH.
- Par défaut *M = 12* dans S-PLUS Finmetrics.
- Une façon de calculer ces résidus avec le logiciel S-PLUS est comme suit:
- `residuals(mon.object.garch, standardize=T)`