# Séries chronologiques univariées (STT-6615)

## Chapitre 2

*Exemple, diagnostiquer des modèles ARIMA: Analyse du PNB aux Etats-Unis*

# Diagnostiques pour les modèles ARIMA

- Analyse des résidus:
  - Étude des résidus: $X_t - \hat{X}_t^{(t-1)}$
  - Étude des résidus standardisés:

$$e_t = \frac{X_t - \hat{X}_t^{(t-1)}}{\left\{\hat{P}_t^{(t-1)}\right\}^{1/2}}$$

  - Ici: $\hat{X}_t^{(t-1)}$ est la prévision d'horizon un pour $X_t$ et on note $\hat{P}_t^{(t-1)}$ la variance estimée de l'erreur d'horizon un.

# Tests de normalité

- Dans le cas de processus Gaussiens, il est suffisant d'inspecter la dépendance linéaire dans les résidus.
- Dans le cas de processus non Gaussiens, il n'est pas suffisant que les erreurs soient non-corrélées. Il se pourrait que les erreurs soient non-corrélées mais dépendantes. Par exemple, il pourrait exister une structure ARCH.

# Tests de normalité (suite)

- Il est conseillé de regarder si les résidus semblent compatibles avec des erreurs gaussiennes.
- Exemple de tests de normalité et outils graphiques:
  - Histogrammes des résidus utilisant la commande `hist()`;
  - *Normal probability plot*; Q-Q plot avec `qqnorm()`;
  - Test de Shapiro-Wilk en utilisant la commande R `shapiro.test()`.

# Tests de dépendance

- Un aspect fondamental est la dépendance résiduelle pouvant exister.  Conséquemment, il est utile d'investiguer la dépendance dans les résidus du modèle.
- Il peut être une bonne idée de calculer l'ACF des résidus standardisés.
- Un test de bruit blanc sur les résidus peut aussi être utile.
- **Remarque:** un test de bruit blanc sur les résidus demeure un outil description d'analyse de données, et est approximatif.
- On peut regarder les autocorrélations résiduelles et comparer avec les bornes $\pm 2/\sqrt{n}$ comme indicateur de la dépendance résiduelle.

# Propriétés théoriques des autocorrélations résiduelles

- Un examen approfondie montre que les autocorrélations résiduelles peuvent avoir des propriétés différentes que celles d'un bruit blanc.
- En particulier, la variance peut être moins que la valeur *1/n*.

# Introduction aux tests de type portemanteau

- Puisque les $n^{1/2}\left|\hat{\rho}(k)\right|$ sont approximativement de lois *N(0,1)*, et utilisant l'indépendance, lorsque $\{w_t\}$ est bruit blanc fort, on trouve que:

$$Q(K) = n\sum_{k=1}^{K} \hat{\rho}_w^2(k) \xrightarrow{L} \chi_K^2$$

- Pour l'hypothèse nulle d'adéquation, on rejette pour de grandes valeurs, i.e. $Q(K) > \chi_{K,1-\alpha}^2$

# Test de Box-Pierce et de Ljung-Box

- En suivant un raisonnement similaire au test de bruit blanc, mais tenant compte du fait que l'on construit une statistique de test basée sur des résidus, Box et Pierce, ainsi que Ljung et Box ont montré que pour tester l'adéquation d'un modèle ARMA($p$,$q$):

$$Q_{BP}(K) = n\sum_{k=1}^{K} r_e^2(k) \xrightarrow{L} \chi^2_{K-p-q}$$

$$Q_{LB}(K) = (n+2)\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{n}{n-k}\right) r_e^2(k) \xrightarrow{L} \chi^2_{K-p-q}$$

- La logique des tests est la même: on rejette pour de grandes valeurs. Ex: avec Ljung-Box, on rejette l'adéquation si

$$Q_{LB}(K) > \chi^2_{K-p-q,1-\alpha}$$

# Diagnostiques pour les données du PNB: modèle MA(2)

- La commande appropriée repose sur la fonction `tsdiag()`.
- Commandes pour les tests de normalité:

```
• > hist(pnbdifflog.ma2$resid, br=12)
• > qqnorm(pnbdifflog.ma2$resid)
• > shapiro.test(pnbdifflog.ma2$resid)

•         Shapiro-Wilk normality test

• data:  pnbdifflog.ma2$resid
• W = 0.9803, p-value = 0.003416
```

# Critères de sélection de modèles (section 2.2 de Shumway et Stoffer TSAA2)

- Ces critères donnent une valeur quantitative à un modèle, et ils dépendent habituellement du nombre de paramètres dans le modèle.
- Il existe toute une panoplie de critères:
  - *Akaike's Information Criterion* (AIC);
  - AIC corrigé pour le biais (AICc);
  - *Schwarz's Information Criterion* (SIC), parfois nommé aussi *Bayesian Information Criterion* (BIC).

# Critère AIC (voir Shumway & Stoffer; Brockwell & Davis)

- Définition pour un modèle ARMA de moyenne nulle:

$$AIC = -2\log\left\{L\left(\hat{\beta}, \hat{\sigma}_w^2\right)\right\} + 2(p+q+1)$$

- Nombre de paramètres dans le modèle: *p*+*q*.
- La quantité $L\left(\hat{\beta}, \hat{\sigma}_w^2\right)$ représente la vraisemblance évaluée aux estimateurs MLE.

# Critère AICc corrigé pour le biais

- Définition pour un ARMA centré en zéro:

$$AICc = -2\log\left\{L\left(\hat{\beta},\hat{\sigma}_w^2\right)\right\} + 2\frac{(p+q+1)n}{n-p-q-2}$$

- Un inconvénient du critère AIC est qu'il ne pénalise pas suffisamment pour le nombre de paramètres (il a tendance à choisir des modèles trop gros). Le critère AICc corrige (du moins en partie) cet état de fait, en pénalisant davantage les gros modèles.

# Critère BIC dans le cas d'un ARMA(p,q) centré en zéro

- Définition:

$$BIC = (n-p-q)\log\left(\frac{n\hat{\sigma}_w^2}{n-p-q}\right) + n\left\{1+\log\left(\sqrt{2\pi}\right)\right\}$$

$$+(p+q)\log\left(\frac{\sum_{t=1}^{n} X_t^2 - n\hat{\sigma}_w^2}{p+q}\right)$$

- Le critère BIC est convergeant: si $(\hat{p},\hat{q})$ sont estimés par BIC: $(\hat{p},\hat{q}) \to (p,q)$ avec probabilité un, lorsque
- $n \to \infty$, présumant que les données sont vraiment ARMA($p$,$q$).

# Sélection de modèles avec les données PNB

```
> # Ajustement d'un AR(1)
> pnbdifflog.ar1.ml = arima(pnbdifflog, order = c(1, 0, 0), method= 'ML')
>
> # Ajustement d'un MA(2)
> pnbdifflog.ma2.ml = arima(pnbdifflog, order = c(0, 0, 2) , method= 'ML')
> # AIC
> -2*pnbdifflog.ar1$loglik + 2*(1+0+1)
[1] -1433.221
> -2*pnbdifflog.ma2$loglik + 2*(0+2+1)
[1] -1433.929
> # AICc
> n = length(pnbdifflog)
> -2*pnbdifflog.ar1$loglik + 2*n*(1+0+1)/(n - (1+0+2))
[1] -1433.166
> -2*pnbdifflog.ma2$loglik + 2*n*(0+2+1)/(n - (0+2+2))
[1] -1433.819
```

# Remarque sur le calcul du critère AIC avec le logiciel *R*

- `> # AIC`
- `> -2*pnbdifflog.ar1$loglik + 2*(1+0+1)`
- `[1] -1433.221`
- `> -2*pnbdifflog.ma2$loglik + 2*(0+2+1)`
- `[1] -1433.929`
- `> # AIC avec R`
- `> pnbdifflog.ar1$aic`
- `[1] -1431.221`
- `> pnbdifflog.ma2$aic`
- `[1] -1431.929`
- Le +2 additionnel est inclus dans *R* afin de tenir compte de l'estimation du paramètre moyenne. Il est courant de comparer les critères AIC et AICc pour des séries chronologiques supposées centrées autour de zéro.