## DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUE UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL EXAMEN FINAL: HIVER 2009

Sigle du cours: STT-3220

Titre du cours: Méthodes de prévision

Professeur: Pierre Duchesne

Date de l'examen: 20 avril 2009, 13h30-16h20

Durée de l'examen : 2 heures 50 minutes

Documentation permise: Aucune documentation permise; Calculatrice permise

L'examen comporte 6 questions; Vous devez répondre à l'ensemble des questions; Vous devez commencer chacune des questions dans le haut de la page, sinon vous perdez deux points de présentation; N'écrivez que sur les pages de droite, et utilisez les versos pour vos calculs (au besoin). Ceci est un examen: Par conséquent, toute communication avec votre entourage est strictement interdite.

- 1. (20 points) Définissez les concepts suivants (4 points par concept):
  - a) Processus stationnaire au sens large (SSL).
  - b) Processus stationnaire au sens strict (SSS). Quelles sont les relations entre un processus SSL et SSS?
  - c) Processus linéaire.
  - d) Processus inversible.
  - e) Processus gaussien.
- 2. (15 points) Dix ans de données mensuelles ont été observées. Le modèle suivant a été estimé par SAS:  $Z_t = \theta_0 + a_t \theta_1 a_{t-1} \theta_2 a_{t-2}$ . Les estimateurs obtenus furent:  $\hat{\theta}_1 = 1.279$ ,  $\hat{\theta}_2 = -0.771$  et  $\hat{\sigma}_a^2 = 0.991$ . Il a été trouvé que  $\sum_{t=1}^{120} Z_t = 261.36$ .
  - a) (3 points) Est-ce que le modèle estimé par SAS est inversible? Justifier.
  - b) (4 points) Basé sur ces résultats, est-il raisonnable de penser que la série  $\{Z_t \theta_0\}$  soit un bruit blanc?
  - c) (8 points) Construisez un intervalle de confiance (approximatif) pour  $\theta_0$ . Précisez clairement votre démarche.

3. (17 points) Soit un processus satisfaisant l'équation:

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + a_t - \theta^2 a_{t-2}$$
, où t est un entier,

où  $\phi$  et  $\theta$  sont des paramètres réels et  $\{a_t\}$  est un bruit blanc.

- a) (4 points) Quelles restrictions doit-on imposer sur les paramètres  $\phi$  et  $\theta$  afin que le processus soit stationnaire? afin qu'il soit inversible?
- b) (11 points) Décrivez la fonction d'autocovariance  $\gamma(k)$ .
- c) (2 points) Que se passe-t-il lorsque  $\phi = \theta$ ?
- 4. (22 points) Considérons le modèle suivant:  $(1 \phi_1 B \phi_2 B^2)(Z_t \mu) = (1 \theta_1 B)a_t$ , où  $\phi_1 = 0$ ,  $\phi_2 = 0.6$ ,  $\theta_1 = 0.3$ ,  $\mu = 50$  et  $\sigma_a^2 = 1$ . Supposons que vous avez observé les valeurs numériques  $Z_{96} = 50.2$ ,  $Z_{97} = 48.9$ ,  $Z_{98} = 52.5$ ,  $Z_{99} = 49.2$ , et  $Z_{100} = 49.8$ .
  - a) (9 points) Proposez des prévisions pour  $Z_{101}$ ,  $Z_{102}$  et  $Z_{103}$ .
  - b) (9 points) Déterminez des limites de prévisions de niveau 95% pour les prévisions trouvées en a).
  - c) (4 points) Supposons que vous observez plus tard l'observation au temps t = 101 qui est en fait  $Z_{101} = 51.3$ . Effectuez les mises à jour des prévisions pour  $Z_{102}$  et  $Z_{103}$ .
- 5. (16 points) Un analyste dispose de données mensuelles, qu'il peut formuler comme un modèle ARMA(p,q) stationnaire et inversible:  $\phi(B)Z_t = \theta(B)a_t$ , où  $\{a_t\}$  est un bruit blanc. Étant intéressé par les ventes aux mois de décembre, il procède à un échantillonnage systématique de ses données, et ne retient que les mois de décembre.
  - a) (2 points) Définissez-vous un processus  $\{W_T\}$  correspondant aux ventes des mois de décembre, et exprimer  $W_T$  en fonction de  $Z_t$ .
  - b) (5 points) Est-ce que le processus  $\{W_T\}$  est stationnaire au sens large? Justifiez.
  - c) (6 points) Le modèle saisonnier suivant semble pertinent pour les données de l'analyste:  $Z_t = a_t \theta a_{t-12}$ , où  $\{a_t\}$  est un bruit blanc. Déterminer la fonction d'autocorrélation du processus  $\{W_T\}$ .
  - d) (3 points) Est-ce que le processus  $\{W_T\}$  peut s'écrire comme un ARIMA(p,d,q)? Dans l'affirmative, trouver les ordres p,d et q.

- 6. (10 points) Vous trouverez en annexe à cette question le graphique d'une certaine série chronologique. Les graphiques de la première différence, ainsi que la seconde différence, de cette série, sont également fournis. Pour chaque graphique (originale, première différence, seconde différence), les graphiques des autocorrélations échantillonnales et des autocorrélations partielles échantillonnales correspondantes sont également fournis. Répondez maintenant aux questions suivantes:
  - a) (3 points) Est-ce que vous recommandez de différencier la série? Si oui, quel ordre de différentiation suggérez-vous? Justifiez.
  - b) (7 points) Proposez un modèle ARMA ou ARIMA que l'on pourrait considérer lors de la modélisation de cette série chronologique. Donner p, d et q et écrivez le modèle sous la forme d'un modèle ARMA ou ARIMA en détaillant les polynômes autorégressifs et moyennes-mobiles (noter que vous n'êtes pas tenu de proposer des estimateurs des paramètres). Justifiez soigneusement.

Remarque: les questions 1 et 6 devraient être répondues assez rapidement et totalisent 30 points de l'examen.

Bonne chance!
Pierre Duchesne

ACF de la serie originale

ACF de la premiere difference

ACF de la seconde difference