Exemples de processus stationnaires

Prévisions utilisant la corrélation croisée; processus linéaires; processus Gaussiens

Prévision utilisant la corrélation croisée

- On dispose de deux processus conjointement stationnaires $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ et $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$. Supposons le modèle dynamique suivant:
  - $Y_t = A\, X_{t-l} + w_t.$
- On suppose que $E(X_t) = E(Y_t) = 0$, et que $\{w_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus bruit blanc indépendant de $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$.
- Si $l > 0$, on dit que $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ mène $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$. Dans le cas, $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ joue le rôle d'un input.
- Si $l < 0$, on dit que $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ retarde $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$.

Calcul de la corrélation croisée

- On aura donc:
  - $\gamma_{YX}(h) = E(Y_{t+h}X_t) = E\{(AX_{t+h-l} + w_{t+h})X_t\} = A\gamma_X(h-l)$
- La covariance croisée devrait donc ressembler à l'autocovariance de $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$;
- Compte tenu des propriétés de l'autocovariance, il devrait y avoir un pic du côté positif si $l > 0$, lorsque $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ mène $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$;
- Il devrait y avoir un pic sur le côté négatif si $l < 0$, lorsque $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ retarde $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$.

Processus linéaires

- Posons:
- $$X_t = \mu + \psi_0 w_t + \psi_1 w_{t-1} + \psi_{-1} w_{t+1} + \cdots$$
  $$= \mu + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j w_{t-j}$$
- On suppose que les coefficients ψ_j satisfont la condition $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$. Le processus $\{w_t\}$ est un processus bruit blanc.
- Par définition, le processus $\{X_t\}$ est un processus linéaire.
- On montre que le processus $\{X_t\}$ est stationnaire.
- On montre donc les trois conditions.

Un processus linéaire est stationnaire

- 1. $\mathrm{var}(X_t) = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$.
- 2. $E(X_t) = \mu + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j E\left(w_{t-j}\right) = \mu$, indépendant de t.
- 3. $$\begin{aligned}\mathrm{cov}(X_s, X_t) &= E\{(X_s - \mu)(X_t - \mu)\} \\ &= E\left\{\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i w_{s-i}\right)\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j w_{t-j}\right)\right\} \\ &= \sum_{i,j} \psi_i \psi_j E\left(w_{s-i} w_{t-j}\right)\end{aligned}$$
  - Or $E\left(w_{s-i} w_{t-j}\right) = \begin{cases} \sigma^2 & s - i = t - j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- On a donc que $s - i = t - j \Rightarrow i = s - t + j$
- Ainsi $\mathrm{cov}(X_s, X_t) = \sigma^2 \sum_j \psi_{s-t+j} \psi_j$. En posant $s - t = h$, on trouve que:
  - $\gamma(h) = \mathrm{cov}(X_{t+h}, X_t) = \sigma^2 \sum_j \psi_{h+j} \psi_j$
- Puisque les trois conditions sont remplies on conclut que $\{X_t\}$ est stationnaire.

Exemple: la moyenne mobile d'ordre un

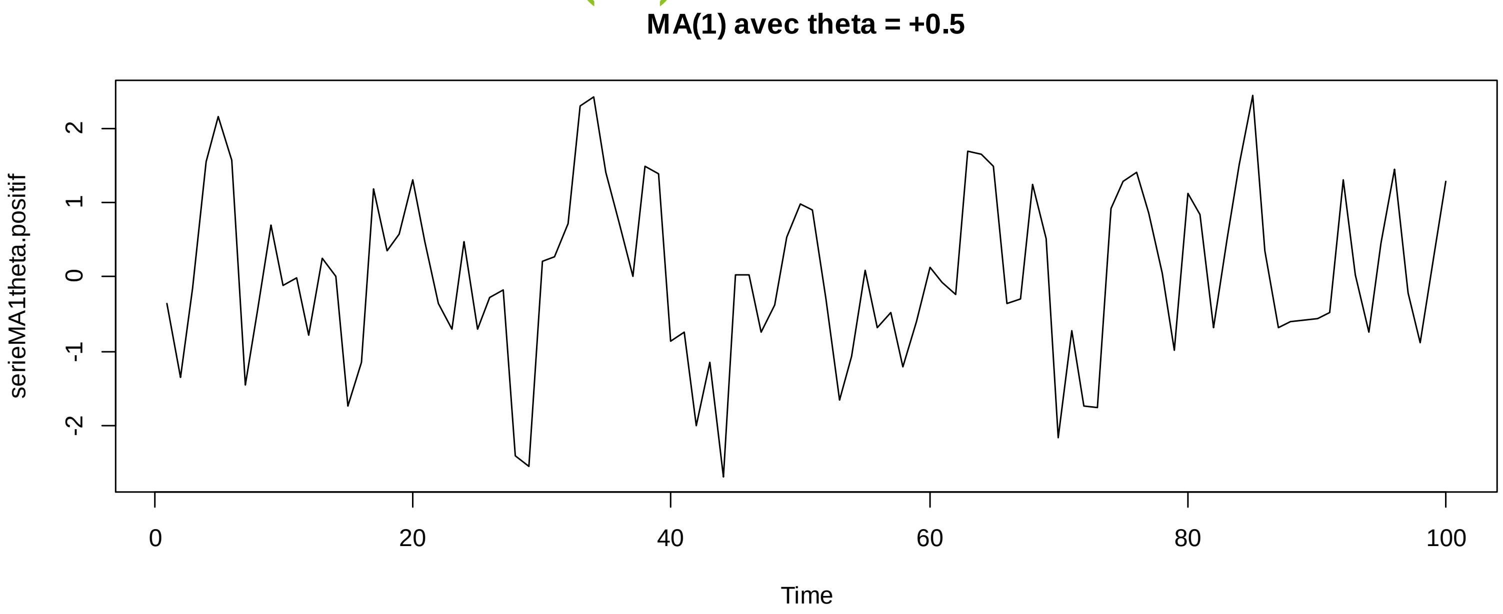
- Le modèle est: $X_t = w_t + \theta w_{t-1}$ où $\{w_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un bruit blanc.
- On constate que le processus est linéaire, donc stationnaire, avec:
  - $\psi_j = \begin{cases} 0 & j < 0 \text{ et } j > 2 \\ 1 & j = 0 \\ \theta & j = 1 \end{cases}$
- On rappelle que pour un processus linéaire:$\gamma(h) = \operatorname{cov}(X_{t+h}, X_t) = \sigma^2 \sum_j \psi_{h+j}\psi_j$;
- On trouve que $\gamma(0) = \sigma^2(1+\theta^2)$; $\gamma(1) = \sigma^2\theta$; et $\gamma(h) = 0$ pour $h > 1$.
- La fonction d'autocorrélation est:

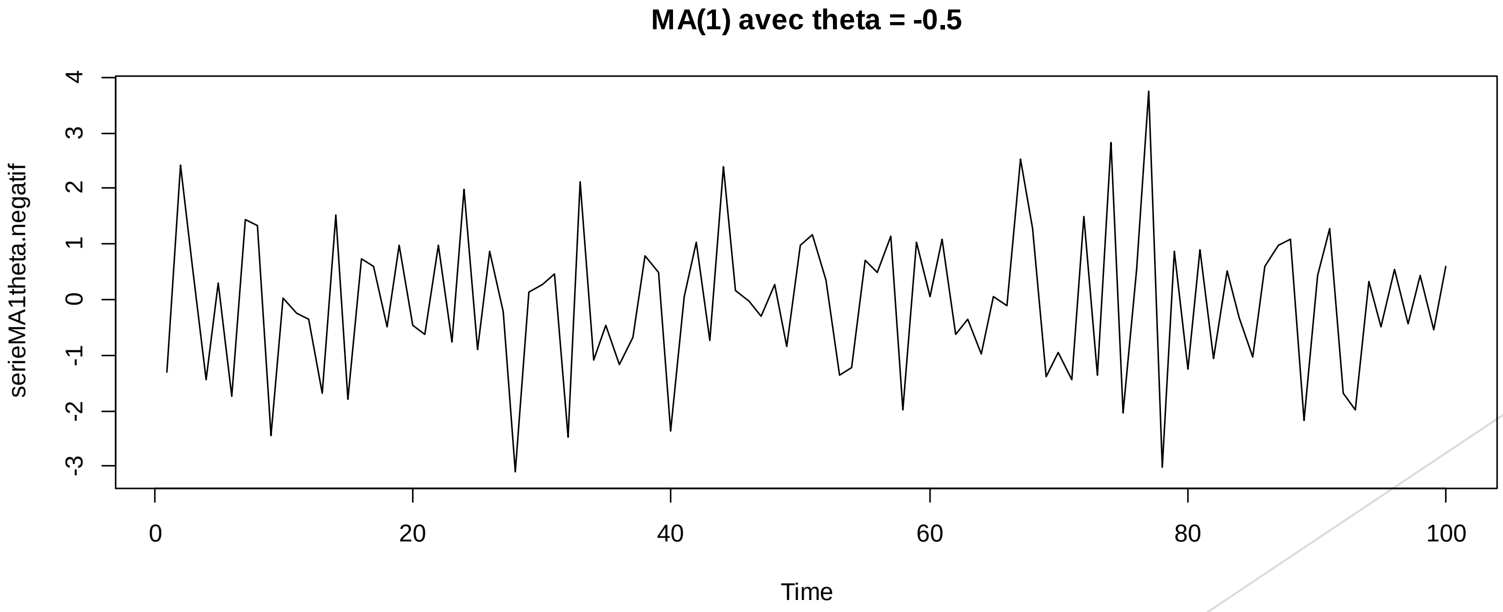
$$\rho(h) = \begin{cases} 1 & h = 0 \\ \dfrac{\theta}{1+\theta^2} & |h| = 1 \\ 0 & |h| > 1 \end{cases}$$

Exemple: la moyenne mobile d'ordre un (suite)

- Posons $g(\theta) = \rho(1) = \theta/(1+\theta^2)$.
- Une analyse de fonction montre que:
- $g'(\theta) = \frac{\theta'(1+\theta^2)-\theta(1+\theta^2)'}{(1+\theta^2)^2} = \frac{(1+\theta^2)-2\theta^2}{(1+\theta^2)^2} = \frac{1-\theta^2}{(1+\theta^2)^2}$
- Pour que la dérivée s'annule: $\theta = \pm 1$
- $g(1) = \frac{1}{2}$, $g(-1) = -\frac{1}{2}$, et $|\rho(1)| \leq \frac{1}{2}$.
- Si $\theta > 0$: corrélation positive; $\theta < 0$: corrélation négative.

Simulations d’un MA(1)





Exemple: Processus stationnaire obtenu d'un autre processus stationnaire

- Considérons $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus stationnaire qui admet comme fonction d'autocovariance $\gamma_X(\cdot)$. Posons:
  - $Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j X_{t-j}$.
- On suppose que les poids sont absolument sommables: $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$.
- On a alors:
  - $\operatorname{cov}(Y_{t+h}, Y_t) = \operatorname{cov}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j X_{t+h-j}, \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k X_{t-k}\right) = \sum_j \sum_k \psi_j \psi_k \operatorname{cov}\left(X_{t+h-j}, X_{t-k}\right) = \sum_j \sum_k \psi_j \psi_k \gamma_X(h+k-j)$.
- Ainsi:
  - $\gamma_Y(h) = \sum_j \sum_k \psi_j\, \psi_k \gamma_X(h+k-j)$

Loi multinormale

- Considérons le vecteur aléatoire $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_k)^\top$. Posons également $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_k)^\top$. Posons également $\boldsymbol{\Gamma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{k1} & \cdots & \sigma_{kk} \end{pmatrix}$. On dit que le vecteur aléatoire $\boldsymbol{X}$ est de loi multinormale, notée $\boldsymbol{X} \sim N_k(\boldsymbol{\mu}, \ \boldsymbol{\Gamma})$, s'il admet la fonction de densité suivante:
  - $$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}} \frac{1}{\{\det(\boldsymbol{\Gamma})\}^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Gamma}^{-1} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})}{2}\right\}$$

Propriétés fondamentales de la multinormale

- Supposons que $\boldsymbol{X} \sim N_k(\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\Gamma})$.
- 1) Pour une matrice $\boldsymbol{A}$ compatible $p \times k$, on a alors que: $\boldsymbol{AX} \sim N_p(\boldsymbol{A\mu},\ \boldsymbol{A\Gamma A}^\top)$
- 2) Ainsi, selon 1), chaque composante est normale: $X_i \sim N(\mu_i,\ \sigma_{ii})$.
- 3) Il en est de même d'un sous-vecteur, avec le sous-vecteur moyen correspondant, avec un bloc pris dans la matrice $\boldsymbol{\Gamma}$; si $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_1^\top, \boldsymbol{X}_2^\top)^\top$, avec $\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\mu}_1^\top, \boldsymbol{\mu}_2^\top)^\top$, les sous-vecteurs étant de dimensions $k_1 \times 1$ et $k_2 \times 1$, et $\boldsymbol{\Gamma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_{11} & \boldsymbol{\Gamma}_{12} \\ \boldsymbol{\Gamma}_{21} & \boldsymbol{\Gamma}_{22} \end{pmatrix}$, alors le sous-vecteur est normal: $\boldsymbol{X}_1 \sim N_{k_1}(\boldsymbol{\mu}_1,\ \boldsymbol{\Gamma}_{11})$.
- 4) La loi conditionnelle de $\boldsymbol{X}_1 |\ \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{x}_2$ est aussi normale:
  - $\boldsymbol{X}_1 |\ \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{x}_2 \sim N_{k_1}(\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Gamma}_{12}\boldsymbol{\Gamma}_{22}^{-1}(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2), \boldsymbol{\Gamma}_{11.2})$.
  - La matrice $\boldsymbol{\Gamma}_{11.2}$ satisfait: $\boldsymbol{\Gamma}_{11.2} = \boldsymbol{\Gamma}_{11} - \boldsymbol{\Gamma}_{12}\boldsymbol{\Gamma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_{21}$.

Processus Gaussien

- Considérons le processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$. On dira que ce processus est Gaussien si toute collection de variables finies est de loi multinormale.
- On montre que si un processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est stationnaire au sens large et Gaussien, alors il est également stationnaire au sens strict.
- En effet, si $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est stationnaire au sens large, alors $E(X_t) = \mu$. De plus, considérons les indices $t_1, \ldots, t_k$ de sorte que $\boldsymbol{X} = \left(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}\right)^{\top}$. Alors la matrice de variance satisfait: $\boldsymbol{\Gamma} = \left(\gamma(t_i, t_j)\right)$ et $\gamma(t_i, t_j)$ n'est fonction que du délai $|t_i - t_j|$.
- Ainsi: $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}} \frac{1}{\{\det(\boldsymbol{\Gamma})\}^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^{\top}\boldsymbol{\Gamma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})}{2}\right\}$ n'est fonction que des délais.
- Lorsque l'on considère la loi de $\left(X_{t_1+h}, \ldots, X_{t_{k+h}}\right)^{\top}$, sous l'hypothèse de stationnarité au sens large, elle sera encore que fonction des délais.
- Ainsi, un processus Gaussien stationnaire au sens large est stationnaire au sens strict.

Espérance mathématique, fonction d'autocorrélation, fonction de corrélation croisée

- Ces quantités sont des caractéristiques théoriques des processus stochastiques.
- Sous l'hypothèse de stationnarité, il devient possible avec une réalisation d'un processus stochastique, c'est-à-dire avec une série chronologique, d'estimer ces quantités.
- On va discuter éventuellement de l'*estimation* de la moyenne, des autocorrélations échantillonnales et des corrélations croisées échantillonnales.

Exemple: modèle autorégressif d'ordre un

- Le modèle est: $X_t = \phi X_{t-1} + w_t$, avec $\{w_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un bruit blanc.
- On va discuter trois cas: i) $|\phi| < 1$; ii) $|\phi| = 1$; iii) $|\phi| > 1$.
- Dans le cas i), on verra que la fonction d'autocorrélation satisfait $\rho(h) = \phi^h, h \geq 0$.