Autocorrélations et corrélations croisées échantillonnales

Exemples de calcul avec R

Exemple, moyenne mobile d'ordre un

- On considère un processus bruit blanc $\{w_t, t \in \mathbb{Z}\}$ tel que:
  - $P(w_t = 1) = P(w_t = -1) = \frac{1}{2}$.
- Pour des fins d'illustration, on considère alors la moyenne mobile:
  - $Y_t = 5.0 + w_t - 0.7\, w_{t-1}$.

$$\rho(h) \quad = \quad \begin{cases} 1 & h = 0 \\ \dfrac{(-0.7)}{1 + (-0.7)^2} = -0.47 & |h| = 1 \\ 0 & |h| > 1 \end{cases}$$

- On rappelle que le résultat sur la distribution asymptotique des autocorrélations présuppose un processus linéaire avec bruit possédant un quatrième moment $E(w_t^4) < \infty$.

Simulation avec les commandes ifelse() et filter()

$$Y_t = 5.0 + w_t - 0.7\, w_{t-1}$$

```
set.seed(1)
rand.signe  <- function(n) ifelse(runif(n)>.50, 1,-1)
mon.innov  <- rand.signe(100)
ma.serie     <- filter( mon.innov, c(1,-0.7), sides=1) + 5
```

Test de bruit blanc

- On a vu que sous l'hypothèse nulle de bruit blanc:
  - $\hat{\rho}(h) \approx N\left(0, \frac{1}{n}\right)$.
- Ainsi si on simule une série chronologique de taille $n = 100$, les limites dans le test de bruit blanc sont $\frac{2}{\sqrt{n}} = \frac{2}{10} = 0.2$.
- On devrait rejeter l'hypothèse nulle si $\sqrt{n}\hat{\rho}(h) > z_{1-\alpha/2} = 1.96$, où $\alpha = 5\%$ et $z_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ d'une $N(0,1)$.

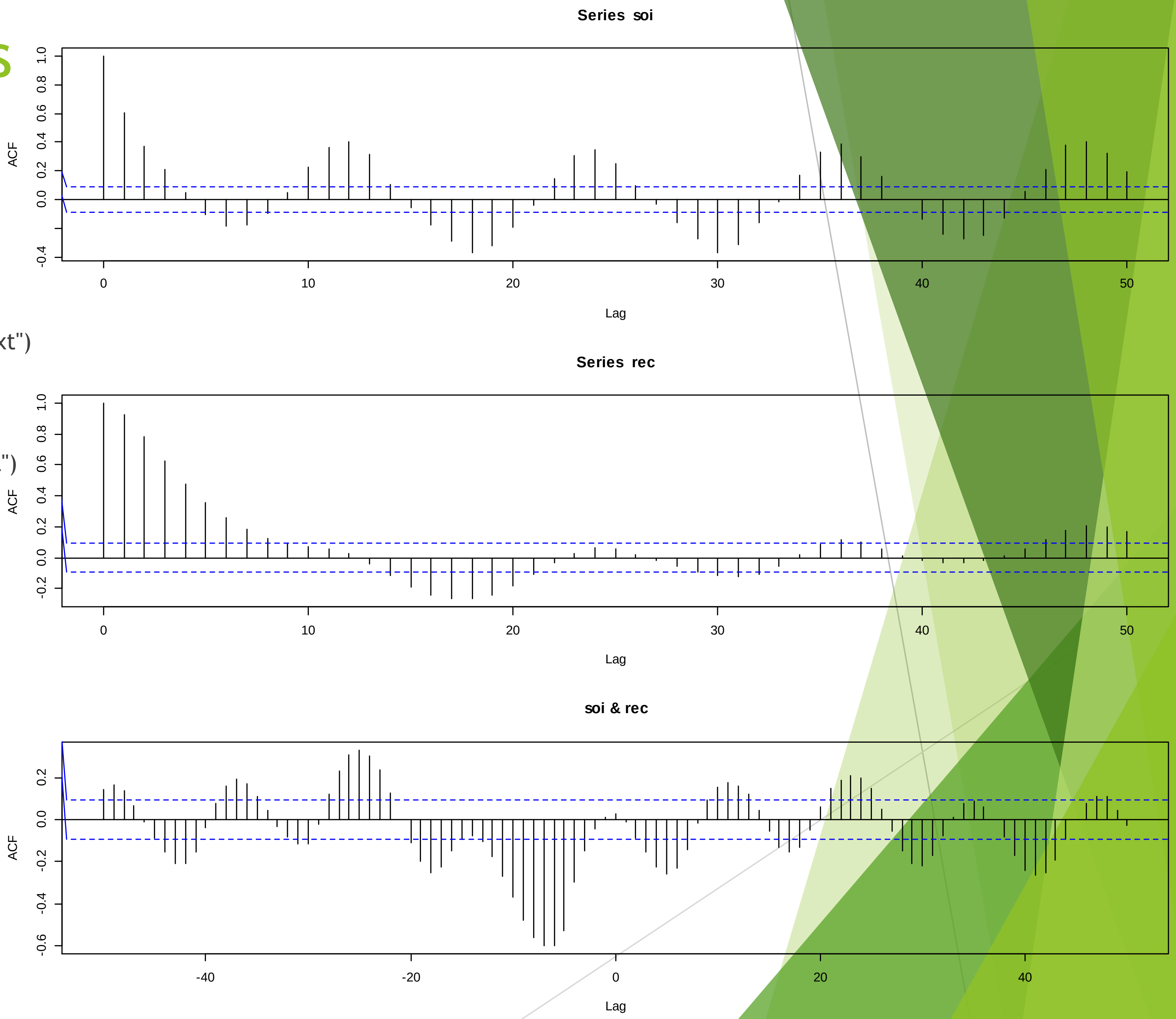
Calcul de la fonction d’autocorrélation échantillonnale avec acf()

- > set.seed(1)
- > rand.signe <- function(n) ifelse(runif(n)>.50, 1,-1)
- > mon.innov <- rand.signe(100)
- > ma.serie <- filter(mon.innov, c(1,-0.7), sides=1) + 5
- > mon.acf <- acf(ma.serie[-1],plot=F)
- > cbind(0:10, mon.acf$acf[1:11])
- [,1] [,2]
- [1,] 0 1.00000000
- [2,] 1 -0.52077977
- [3,] 2 0.03740824
- [4,] 3 0.11146686
- [5,] 4 -0.13205111
- [6,] 5 -0.01851502
- [7,] 6 0.05899563
- [8,] 7 0.02284353
- [9,] 8 -0.07162067
- [10,] 9 0.16333240
- [11,] 10 -0.15358233

Calcul des corrélations croisées échantillonnales avec ccf()

- > soi=scan("c://Programmation//STT6615//Ex4serie1.txt")
- Read 453 items
- > rec=scan("c://Programmation//STT6615//Ex4serie2.txt")
- Read 453 items
- > par(mfrow=c(3,1))
- > acf(soi, 50)
- > acf(rec, 50)
- > ccf(soi, rec, 50)

- On trouve sur le graphique SOI_{t+h} versus REC_t



Commentaires sur les relations entre *SOI* et *REC*

- On que la fonction de covariance croisée n'est pas symétrique, comme déjà vu.
- On note que la corrélation croisée de délai $h = -6$ est forte, suggérant que *SOI* mesuré au mois $t - 6$ est associé avec le recrutement au mois t.
- Une interprétation possible est que l'indice climatique *SOI* il y a six mois influence le recrutement des poissons (variable *REC*) maintenant.
- Comme le signe de l'ACF au délai $h = -6$ est négatif, ceci suggère que les deux séries ne vont pas dans le même sens.