

# Analyse spectrale

Compléments théoriques et  
exemples en  $\mathbb{R}$

# Rappel des définitions

- ▶ Considérons la série chronologique  $X_1, \dots, X_n$ . Pour les fréquences de Fourier de la forme  $\omega = \frac{j}{n}$ , ( $j \neq 0$  ou  $j \neq \frac{n}{2}$ ):

- ▶  $\hat{\beta}_1\left(\frac{j}{n}\right) = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n \cos\left(2\pi \frac{j}{n} t\right)$

- ▶  $\hat{\beta}_2\left(\frac{j}{n}\right) = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n \sin\left(2\pi \frac{j}{n} t\right)$

- ▶ Les formules précédentes sont pour  $j = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1$ . Pour les autres fréquences:

- ▶  $\hat{\beta}_1(0) = n^{-1} \sum_{t=1}^n X_t$

- ▶  $\hat{\beta}_2(0) = 0.$

- ▶  $\hat{\beta}_1\left(\frac{1}{2}\right) = n^{-1} \sum_{t=1}^n (-1)^t X_t$

- ▶  $\hat{\beta}_2\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$

# Densité spectrale

- ▶ Supposons que  $\{X_t\}$  est stationnaire et tel que la fonction d'autocovariance soit absolument sommable:  $\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty$ .
- ▶ La densité spectrale est définie comme:
  - ▶  $f(\lambda) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{-2\pi i h \lambda}$ ,  $-\frac{1}{2} \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$ .
- ▶ Ici  $i = \sqrt{-1}$  et  $e^{i\lambda} = \cos(\lambda) + i \sin(\lambda)$ .
- ▶ Propriétés de base:
  - ▶ a)  $f(\lambda)$  est paire:  $f(\lambda) = f(-\lambda)$ ,
  - ▶ b)  $f(\lambda) \geq 0$  pour tout  $\lambda \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ .
  - ▶ c)  $\gamma(k) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i k \lambda} f(\lambda) d\lambda$
  - ▶ d) Les densités spectrales sont (essentiellement) uniques. Si  $f$  et  $g$  sont deux densités spectrales associées à la même fonction d'autocovariance  $\gamma(\cdot)$ , alors  $f = g$ .

# Transformée de Fourier discrète

► On note la Transformée de Fourier discrète:

$$\text{► } d\left(\frac{j}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n X_t \cos\left(2\pi t \frac{j}{n}\right) - i \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n X_t \sin\left(2\pi t \frac{j}{n}\right)$$

$$\text{► } \left|d\left(\frac{j}{n}\right)\right|^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{t=1}^n X_t \cos\left(2\pi t \frac{j}{n}\right)\right)^2 + \frac{1}{n} \left(\sum_{t=1}^n X_t \sin\left(2\pi t \frac{j}{n}\right)\right)^2$$

► On appelle  $I\left(\frac{j}{n}\right) = \left|d\left(\frac{j}{n}\right)\right|^2$  le périodogramme.

► Le périodogramme standardisé est défini comme suit:

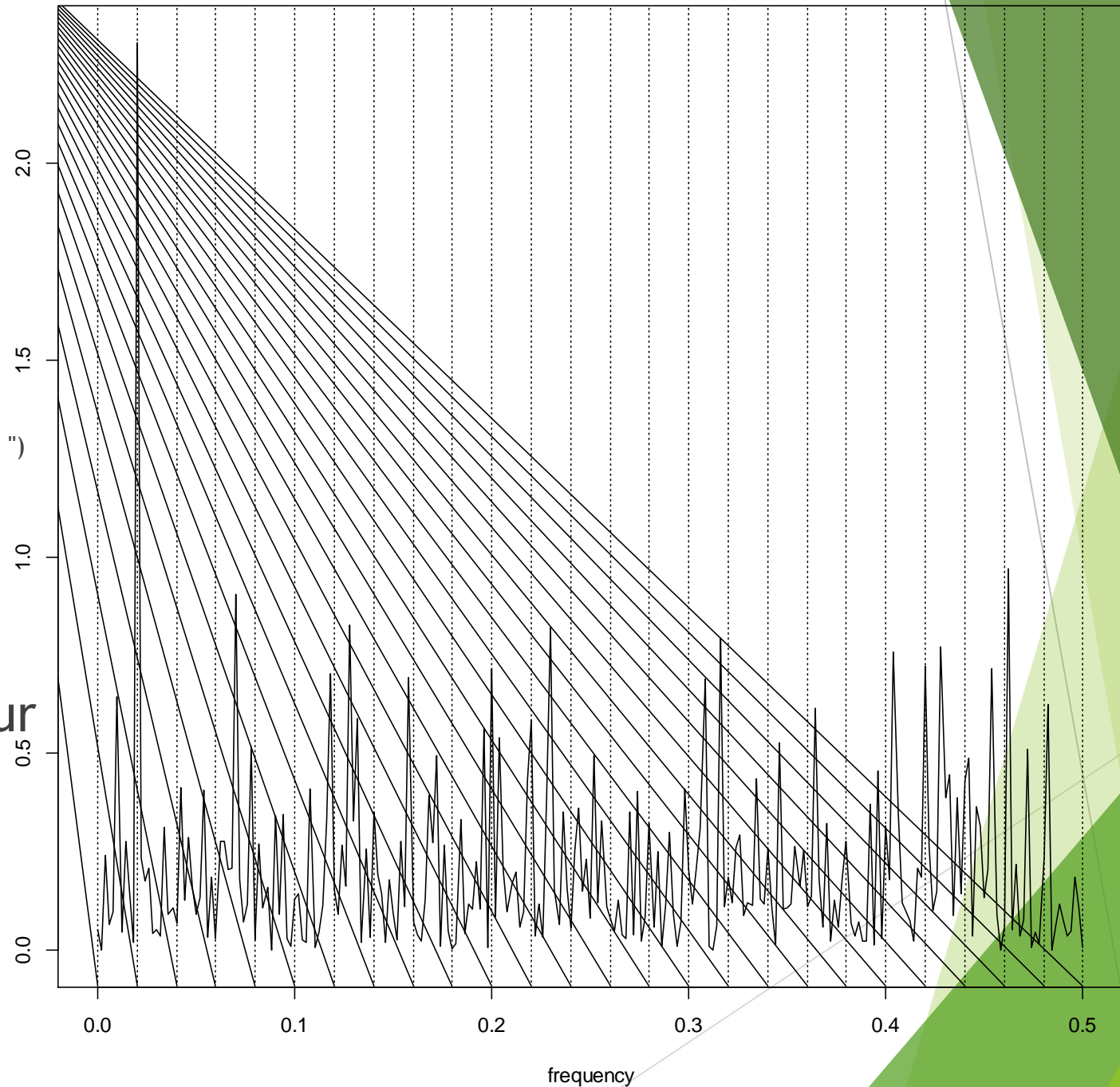
$$\text{► } P\left(\frac{j}{n}\right) = \frac{4}{n} \left|d\left(\frac{j}{n}\right)\right|^2$$

# Rappel des propriétés fondamentales

- ▶ Pour  $j, k = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ,
- ▶ Si  $j \notin \left\{0, \frac{n}{2}\right\}$  :  $\sum_{t=1}^n \cos^2 \left(2\pi t \frac{j}{n}\right) = \sum_{t=1}^n \sin^2 \left(2\pi t \frac{j}{n}\right) = \frac{n}{2}$ .
- ▶ Si  $j \in \left\{0, \frac{n}{2}\right\}$  :  $\sum_{t=1}^n \cos^2 \left(2\pi t \frac{j}{n}\right) = n$ ; De plus,  
 $\sum_{t=1}^n \sin^2 \left(2\pi t \frac{j}{n}\right) = 0$ .
- ▶ Pour  $j \neq k$  :  $\sum_{t=1}^n \cos \left(2\pi t \frac{j}{n}\right) \cos \left(2\pi t \frac{k}{n}\right) = 0$ ; et  
 $\sum_{t=1}^n \sin \left(2\pi t \frac{j}{n}\right) \sin \left(2\pi t \frac{k}{n}\right) = 0$ .
- ▶ Pour tous les  $j$  et  $k$  :  $\sum_{t=1}^n \cos \left(2\pi t \frac{j}{n}\right) \sin \left(2\pi t \frac{k}{n}\right) = 0$ .

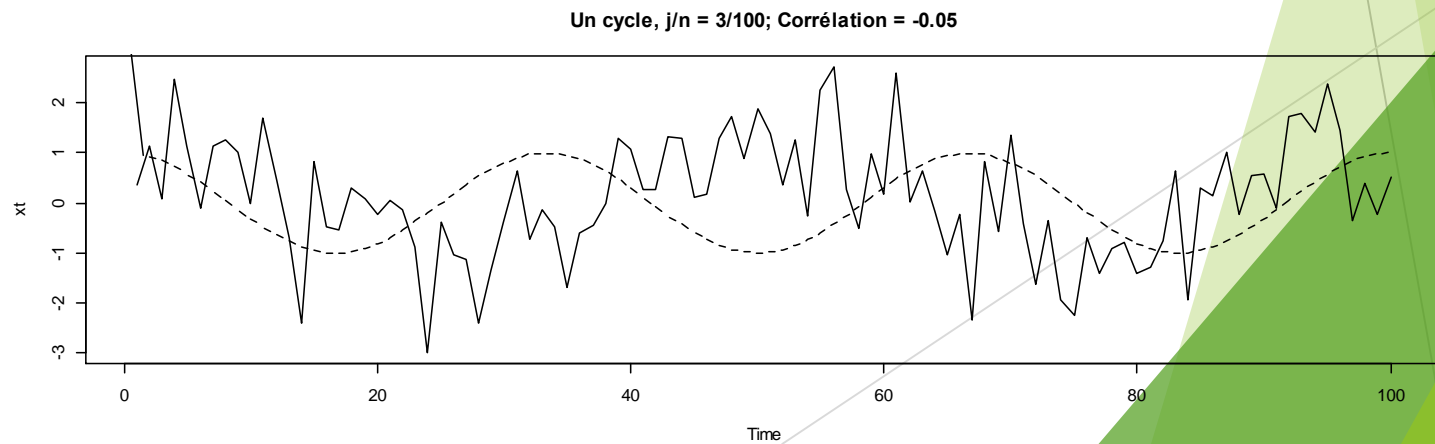
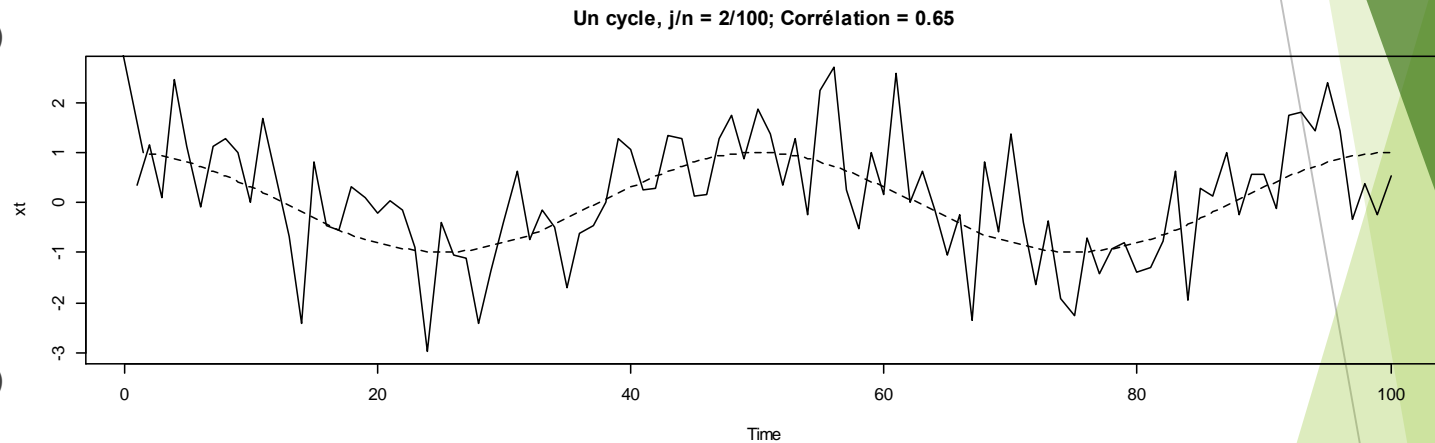
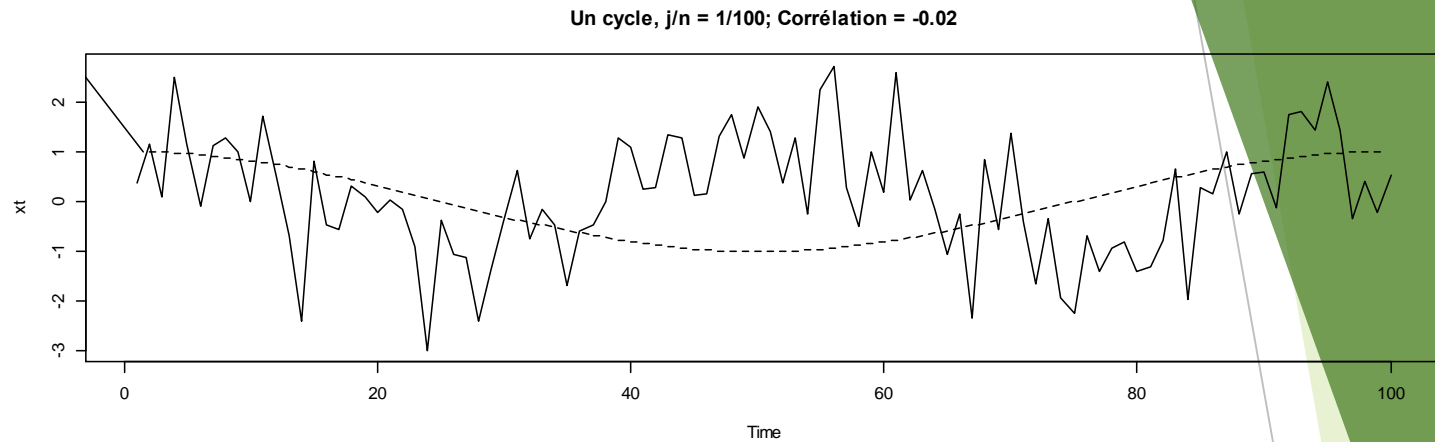
# Exemple 2.8

- ▶ `t = 1:500`
  - ▶ `set.seed(1)`
  - ▶ `par(mfrow=c(1,1))`
  - ▶ `x = 2*cos(2*pi*t/50 + .6*pi) + rnorm(500,0,5)`
  - ▶ `l = abs(fft(x)/sqrt(500))^2 # the periodogram`
  - ▶ `P = (4/500)*l # the scaled periodogram`
  - ▶ `f = 0:250/500`
  - ▶ `plot(f, P[1:251], type="l", xlab="frequency", ylab=" ")`
  - ▶ `abline(v=seq(0,.5,.02), lty="dotted")`
- ▶ La fréquence dominante correspond à  $\omega = \frac{10}{500}$ , c'est-à-dire 10 cycles pour 500 points.



# Exemple 2.9

- ▶ `set.seed(1)`
- ▶ `par(mfrow=c(3,1))`
- ▶ `t = 1:100`
- ▶ `xt = cos(2*pi*t*(2/100)) + rnorm(100)`
- ▶ `ts.plot(xt)`
- ▶ `points(t,cos(2*pi*t*(1/100)), type="l",lty=2)`
- ▶ `title("Un cycle, j/n = 1/100; Corrélration = -0.02")`
- ▶ `ts.plot(xt)`
- ▶ `points(t,cos(2*pi*t*(2/100)), type="l",lty=2)`
- ▶ `title("Un cycle, j/n = 2/100; Corrélration = 0.65")`
- ▶ `ts.plot(xt)`
- ▶ `points(t,cos(2*pi*t*(3/100)), type="l",lty=2)`
- ▶ `title("Un cycle, j/n = 3/100; Corrélration = -0.05")`
- ▶ `cor(xt, cos(2*pi*t*(1/100)))`
- ▶ `cor(xt, cos(2*pi*t*(2/100)))`
- ▶ `cor(xt, cos(2*pi*t*(3/100)))`



# Modèle possible

- ▶ La discussion précédente suggère qu'un modèle possible pour le processus  $\{X_t\}$  pourrait être de la forme:

$$\text{▶ } X_t = U_1 \cos(2\pi\omega t) + U_2 \sin 2\pi\omega t$$

- ▶ Les variables  $U_1$  et  $U_2$  sont des variables aléatoires.
- ▶ Plus généralement, on pourrait considérer un modèle du genre:

$$\text{▶ } X_t = \sum_{k=1}^q \{U_{k1} \cos(2\pi\omega_k t) + U_{k2} \sin(2\pi\omega_k t)\}$$

- ▶ Les variables  $U_{k1}$  et  $U_{k2}$ , indépendantes et de loi  $L(0, \sigma_k^2)$ .
- ▶ En fait, on montre que  $\{X_t\}$  est stationnaire avec fonction d'autocovariance:

$$\text{▶ } \gamma(0) = \text{var}(X_t) = \sum_{k=1}^q \sigma_k^2$$

$$\text{▶ } \gamma(h) = \sum_{k=1}^q \sigma_k^2 \cos(2\pi\omega_k h)$$



# Exemple

Soit le processus  $X_t = X_{t1} + X_{t2} + X_{t3}$ , avec:

$X_{t1} = 2 \cos\left(2\pi t \frac{6}{100}\right) + 3 \sin\left(2\pi t \frac{6}{100}\right) ;$

$X_{t2} = 4 \cos\left(2\pi t \frac{10}{100}\right) + 5 \sin\left(2\pi t \frac{10}{100}\right) ;$

$X_{t3} = 6 \cos\left(2\pi t \frac{40}{100}\right) + 7 \sin\left(2\pi t \frac{40}{100}\right) ;$

En R:

`t = 1:100`

`x1 = 2*cos(2*pi*t*6/100) + 3*sin(2*pi*t*6/100)`

`x2 = 4*cos(2*pi*t*10/100) + 5*sin(2*pi*t*10/100)`

`x3 = 6*cos(2*pi*t*40/100) + 7*sin(2*pi*t*40/100)`

`x = x1 + x2 + x3`

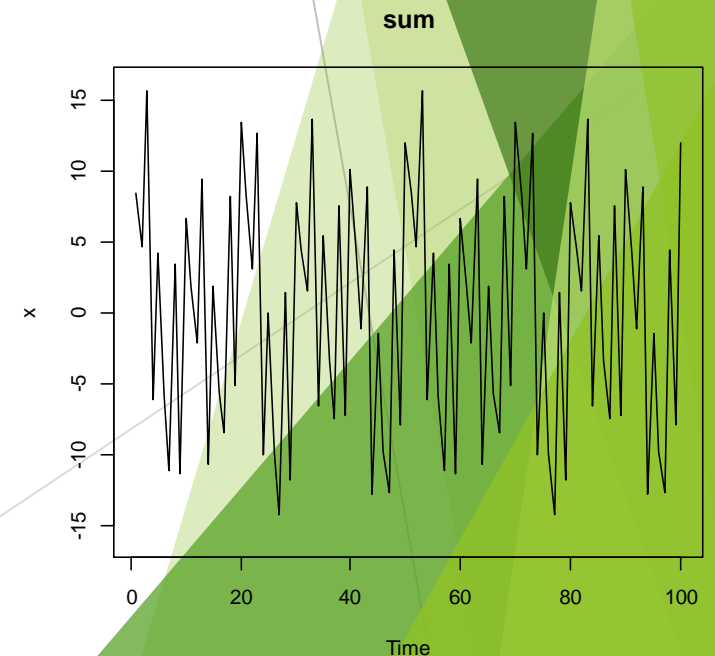
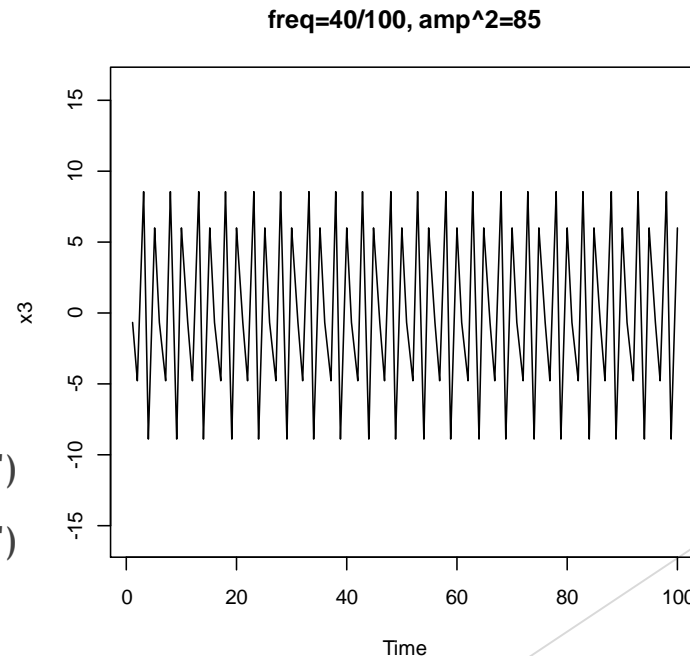
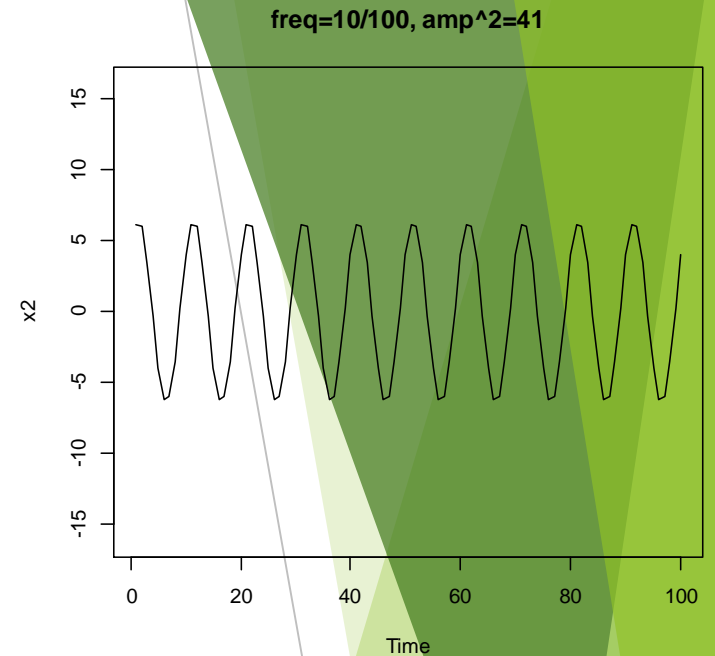
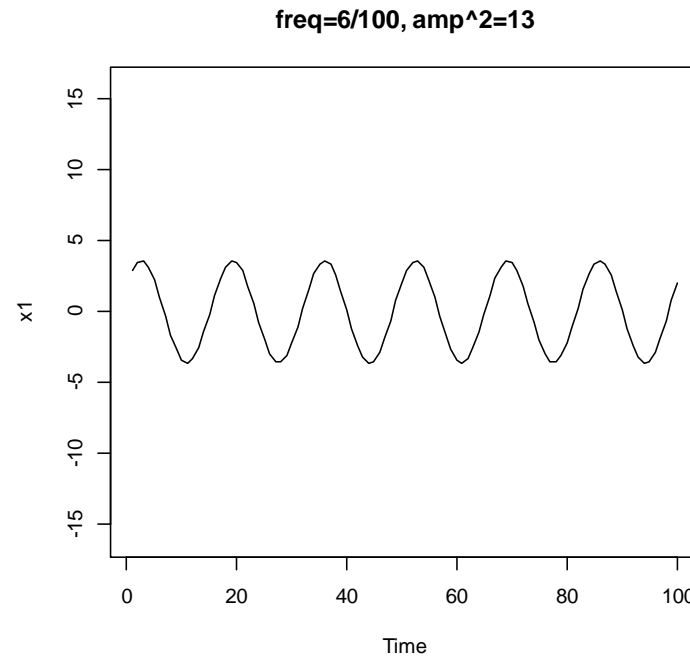
`par(mfrow=c(2,2))`

`plot.ts(x1, ylim=c(-16,16), main="freq=6/100, amp^2=13")`

`plot.ts(x2, ylim=c(-16,16), main="freq=10/100, amp^2=41")`

`plot.ts(x3, ylim=c(-16,16), main="freq=40/100, amp^2=85")`

`plot.ts(x, ylim=c(-16,16), main="sum")`



# Calcul manuel avec R

► Les relations d'orthogonalité et la forme déterministe du processus  $\{X_t\}$  donne:

► `> sum(x*exp(-2*pi*1i*1:100*0.06))/sqrt(100)`

► `[1] 10-15i`

► `> sum(x*exp(-2*pi*1i*1:100*0.10))/sqrt(100)`

► `[1] 20-25i`

► `> sum(x*exp(-2*pi*1i*1:100*0.40))/sqrt(100)`

► `[1] 30-35i`

► `> 4/100*(10^2+15^2)`

► `[1] 13`

► `> 4/100*(20^2+25^2)`

► `[1] 41`

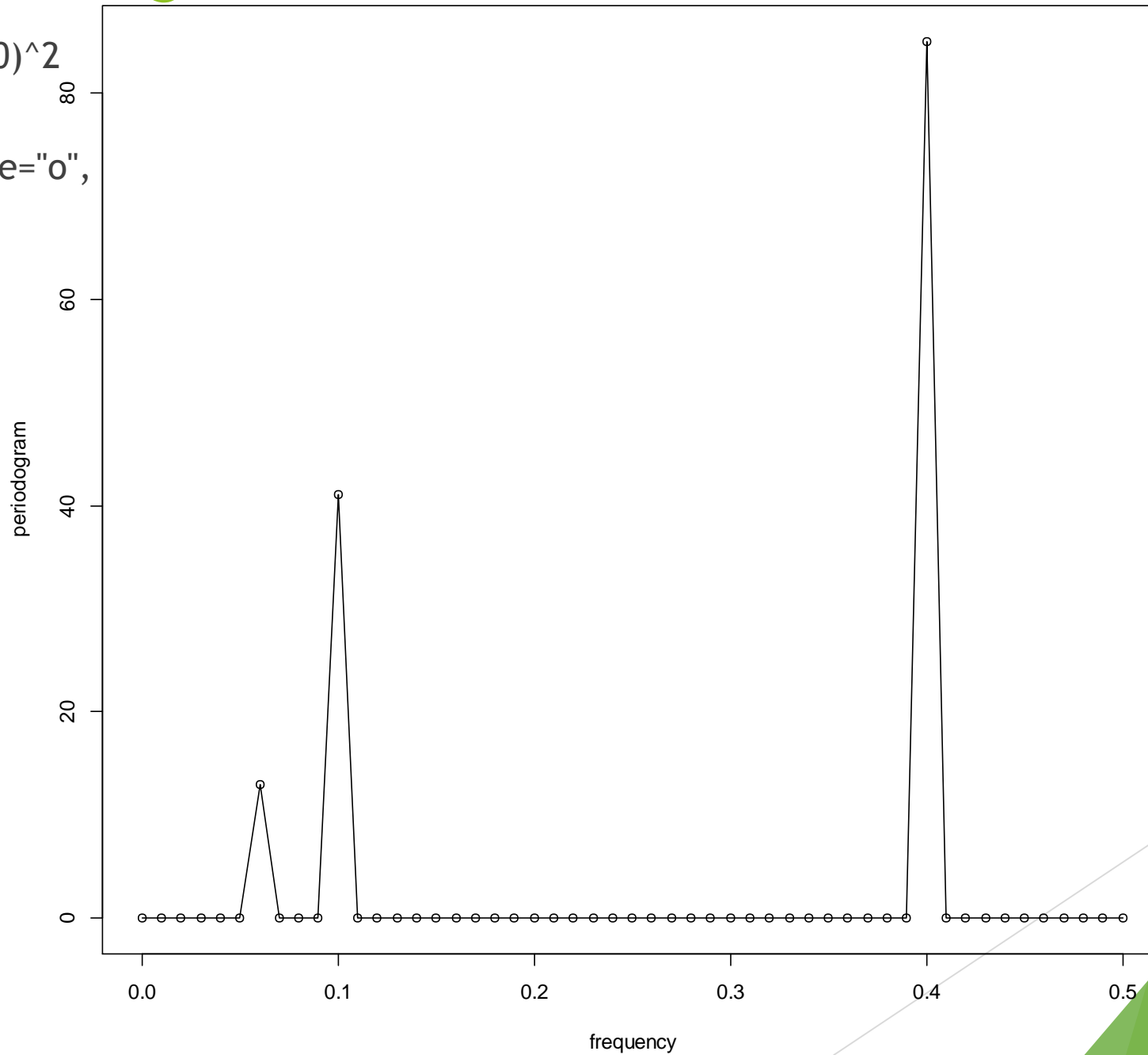
► `> 4/100*(30^2+35^2)`

► `[1] 85`

► La transformée de Fourier discrète est nulle aux autres fréquences.

# Calcul du périodogramme avec R

```
> P = abs(2*fft(x)/100)^2  
> f = 0:50/100  
> plot(f, P[1:51], type="o",  
xlab="frequency",  
ylab="periodogram")
```



# Périodogramme: un estimateur possible de la densité spectrale

- ▶ Plus précisément, le périodogramme est une version empirique de la densité spectrale.
- ▶ On a que  $f(\lambda) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{-2\pi i h \lambda}$
- ▶ Pour une série chronologique  $X_1, \dots, X_n$ , pour une fréquence de Fourier de la forme  $\omega_j = 2\pi j/n$ ,  $j \neq 0$ , on a que:
  - ▶  $I\left(\frac{j}{n}\right) = \sum_{|h| < n} \hat{\gamma}(h) e^{-2\pi i h j/n}$

# Périodogramme, un estimateur possible de la densité spectrale (suite)

► En utilisant les relations d'orthogonalité, on note que si  $j \neq 0$  :

$$\text{► } \sum_{t=1}^n \left\{ \cos\left(2\pi t \frac{j}{n}\right) - i \sin\left(2\pi t \frac{j}{n}\right) \right\} = 0.$$

► Autrement formulé,  $\sum_{t=1}^n e^{-2\pi i t j/n} = 0$ .

$$\text{► Ainsi } I\left(\frac{j}{n}\right) = \left| d\left(\frac{j}{n}\right) \right|^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n X_t X_s e^{-2\pi i t j/n} e^{-2\pi i s j/n}$$

$$\text{► } = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n (X_t - \bar{X})(X_s - \bar{X}) e^{-2\pi i (s-t) j/n}.$$

► Ainsi:

$$\text{► } I\left(\frac{j}{n}\right) = \sum_{|h|<n} \hat{\gamma}(h) e^{-2\pi i h j/n}$$

► Ainsi un estimateur de  $f\left(\frac{j}{n}\right)$  est  $I\left(\frac{j}{n}\right)$ .

# Exemple: densité spectrale d'un processus fonction linéaire d'un autre processus stationnaire

► Considérons le processus:

►  $Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j X_{t-j}$ , où les poids satisfont  $\sum_j |\psi_j| < \infty$ .

► De plus,  $\{X_t\}$  est présumé stationnaire de fonction d'autocovariance  $\gamma_X(\cdot)$  absolument sommable. On note la densité spectrale de  $\{X_t\}$  par  $f_X(\lambda)$ .

► La densité spectrale de  $\{Y_t\}$  est alors donnée par la formule:

►  $f_Y(\lambda) = \Psi(e^{-2\pi i\lambda})\Psi(e^{2\pi i\lambda})f_X(\lambda)$ .

► Le polynôme  $\Psi(\cdot)$  est défini comme  $\Psi(B) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j B^j$ .

# Exemple: densité spectrale d'un processus fonction linéaire d'un autre processus stationnaire (suite)

▶ On a déjà vu que:

$$\gamma_Y(h) = \sum_j \sum_k \psi_j \psi_k \gamma_X(h + k - j).$$

▶ Cependant:

$$\gamma_X(h + k - j) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i \lambda (h+k-j)} f_X(\lambda) d\lambda$$

▶ On remplace directement:

$$\gamma_Y(h) = \sum_j \sum_k \psi_j \psi_k \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i \lambda (h+k-j)} f_X(\lambda) d\lambda.$$

▶ Permutant sommes et intégrale:

$$\gamma_Y(h) = \int_{-1/2}^{1/2} \sum_j \sum_k \psi_j \psi_k e^{2\pi i \lambda (h+k-j)} f_X(\lambda) d\lambda.$$

## Une reformulation donne le résultat:

- ▶  $\gamma_Y(h) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i \lambda h} \left( \sum_j \psi_j e^{-2\pi i \lambda j} \right) \left( \sum_k \psi_k e^{2\pi i \lambda k} \right) f_X(\lambda) d\lambda.$
- ▶ En utilisant le résultat portant sur l'unicité des densités spectrales, on obtient:
  - ▶  $f_Y(\lambda) = \left( \sum_j \psi_j e^{-2\pi i \lambda j} \right) \left( \sum_k \psi_k e^{2\pi i \lambda k} \right) f_X(\lambda)$
- ▶ Avec l'opérateur  $\Psi(\cdot)$ :
  - ▶  $f_Y(\lambda) = \Psi(e^{-2\pi i \lambda}) \Psi(e^{2\pi i \lambda}) f_X(\lambda)$