STT-6615
Séries chronologiques univariées

Chapitre 2
Modèles de régression et modèles ARIMA

Introduction aux modèles autorégressifs intégrés à moyennes mobiles (ARMA/ARIMA)

- Les modèles ARIMA sont inspirés de notre compréhension des modèles linéaires.
- Ces modèles sont appropriés lorsque l'on doit décrire des séries chronologiques relativement courtes.
- Les modèles ARMA sont sous certaines conditions stationnaire. Les modèles ARIMA permettent une approche afin de traiter de la non-stationnarité.
- Le calcul des prévision peut être facilement abordé dans le contexte des modèles ARMA. C'est possiblement le facteur majeur qui a assuré la popularité de ces modèles dans les applications macroéconomiques et économétriques.

Modèles autorégressifs d'ordre *p*, ou AR(*p*)

- Définition du modèle:
  - $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + w_t.$
- Dans le modèle précédent $\phi_1, \ldots, \phi_p$ sont des constantes et $\{w_t\}$ est un bruit blanc.
- On verra que le processus précédent sous les conditions de stationnarité est de moyenne nulle. Si $E(X_t) = \mu$, le modèle est:
  - $X_t - \mu = \phi_1(X_{t-1} - \mu) + \cdots + \phi_p\left(X_{t-p} - \mu\right) + w_t.$
- Autrement formulé:
  - $X_t = \alpha + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + w_t.$
- Le paramètre α satisfait $\alpha = \mu\left(1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p\right)$.

Modèles autorégressifs d'ordre *p*, ou AR(*p*) (suite)

- On peut écrire le modèle AR(*p*) comme le modèle de régression linéaire suivant:
  - $X_t = \boldsymbol{\phi}^\top \boldsymbol{X}_{t-1} + w_t,$
- Les composantes du modèle sont:
  - $\boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix}; \boldsymbol{X}_{t-1} = \begin{pmatrix} X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-p} \end{pmatrix}.$
- Une écriture très populaire fait appel à l'opérateur retard, $BX_t = X_{t-1}$; donc:
  - $(1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p)X_t = w_t.$
- De manière condensée on écrit $\phi(B)X_t = w_t$ et l'opérateur autorégressif est:
  - $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p$
- On verra sous certaines conditions sur les racines de $\phi(z) = 0$ que l'AR(*p*) que le processus AR est stationnaire.

Modèles AR(p) avec $p = \infty$, AR(∞), dit aussi modèles inversibles.

- Lorsque le processus est stationnaire, on parle de processus inversible s'il admet la représentation AR(∞) suivante:
  - $X_t = -\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{t-j} + w_t.$
- Attention, les livres ne s'entendent pas toujours sur le signe des poids de la représentation inversible. Ici, on aura l'écriture commode:
  - $X_t + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{t-j} = w_t.$
- Donc on peut écrire $\pi(B)X_t = w_t$, avec l'opérateur:
  - $\pi(B) = \sum_{j\geq 0} \pi_j B^j$
- Il faudra que les poids satisfassent $\sum_{j\geq 0} |\pi_j| < \infty$ et on peut normaliser le premier coefficient de sorte que $\pi_0 = 1$.

Modèles moyennes mobiles d'ordre q, ou MA(q)

- Définition du modèle:
  - $X_t = w_t + \theta_1 w_{t-1} + \cdots + \theta_q w_{t-q}.$
- Dans le modèle précédent $\theta_1, \ldots, \theta_q$ sont des paramètres et $\{w_t\}$ est un bruit blanc. On peut écrire également:
  - $X_t = \theta(B) w_t.$
- L'opérateur moyenne mobile est défini comme:
  - $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q.$

Modèle MA(q) avec $q = \infty$, ou MA(∞), ou écriture causale

- Un processus $\{X_t\}$ admet une écriture causale lorsqu'il admet la représentation:
  - $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j w_{t-j} = \psi(B) w_t.$
- Dans l'écriture précédente, $\psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j$, avec $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ et on normalise le premier coefficient de sorte que $\psi_0 = 1$. Le processus $\{w_t\}$ est un bruit blanc.
- On note la proche ressemblance avec les processus linéaires. Cependant, un processus causal exprime X_t en fonction du présent et du passé du processus bruit blanc $\{w_t\}$.

Modèles autorégressifs moyennes mobiles (ARMA)

- Définition du modèle ARMA(*p*,*q*):
  - $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + w_t + \theta_1 w_{t-1} + \cdots + \theta_q w_{t-q}.$
- Dans le modèle précédent $\phi_1, \ldots, \phi_p$; $\theta_1, \ldots, \theta_q$ sont des paramètres et $\{w_t\}$ est un bruit blanc. On suppose $\phi_p \neq 0$ et $\theta_q \neq 0$. On peut écrire également:
  - $\phi(B) X_t = \theta(B) w_t.$
- L'opérateur autorégressif et l'opérateur moyenne mobile sont définis comme:
  - $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p,$
  - $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q.$
- Si $E(X_t) = \mu$, on pose $\alpha = \mu(1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p)$, c'est-à-dire $\alpha = \mu\phi(1)$, et
  - $X_t = \alpha + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + w_t + \theta_1 w_{t-1} + \cdots + \theta_q w_{t-q}.$
- Pour des fins d'inférence il arrive que l'on suppose le bruit blanc $\{w_t\}$ Gaussien, mais ce n'est pas nécessaire.

Propriété P_1: causalité d'un ARMA(p,q)

- Soit un processus $\{X_t\}$ ARMA(p,q) généré par les équations $\phi(B)X_t = \theta(B)w_t$.
- La Propriété P_1 stipule que $\{X_t\}$ est causal si et seulement si $\phi(z) \neq 0,\ \forall |z| \leq 1.$
- Afin de trouver les poids ψ dans la représentation $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j w_{t-j} = \psi(B)w_t$, il suffit de résoudre:
  - $\psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j = \frac{\theta(z)}{\phi(z)}, |z| \leq 1.$
- Expression consacrée: *Un ARMA est causal lorsque toutes les racines de $\phi(z)$* sont à l'extérieur du disque unité.
- La preuve de la proposition se trouve dans Brockwell & Davis (1991, Théorème 3.1.1, p. 85).

Propriété P_2: inversibilité d'un ARMA(p,q)

- Soit un processus $\{X_t\}$ ARMA(p,q) généré par les équations $\phi(B)X_t = \theta(B)w_t$.
- La Propriété P_2 stipule que $\{X_t\}$ est inversible si et seulement si $\pi(z) \neq 0,\ \forall |z| \leq 1$.
- Afin de trouver les poids π dans la représentation $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j} = w_t$, il suffit de résoudre:
  - $\pi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j = \frac{\phi(z)}{\theta(z)}, |z| \leq 1.$
- Expression consacrée: *Un ARMA est inversible lorsque toutes les racines de* $\theta(z)$ sont à l'extérieur du disque unité.
- La preuve de la proposition se trouve dans Brockwell & Davis (1991, Théorème 3.1.2, pp. 86-87).

Stationnarité d'un AR(1) et d'un AR(2)

- **Exemple, AR(1)**: le modèle est $(1-\phi B)X_t = w_t$. Ainsi on doit résoudre:
  - $1-\phi z = 0 \Rightarrow z = 1/\phi$
- La condition de causalité est $|\phi| < 1$.

- **Exemple, AR(2)**: le modèle est $(1-\phi_1 B - \phi_2 B^2)X_t = w_t$. Pour être causal, il faut que les racines de $\phi(z) = 1 - \phi_1 z \; - \phi_2 z^2$ soient à l'extérieur du disque unité. Les deux racines sont:
  - $\frac{-\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{-2\phi_2}$.
- Appelons ces deux racines z_1, z_2. On doit donc avoir $|z_1| > 1$ et $|z_2| > 1$. On aura la factorisation $\phi(z) = (1 - z_1^{-1} z)(1 - z_2^{-1} z)$. On peut montrer que la causalité est équivalente aux trois conditions suivantes:
  - (i) $\phi_1 + \phi_2 < 1$; (ii) $\phi_2 - \phi_1 < 1$; (iii) $|\phi_2| < 1$.