Chapitre 4. Confrontation d'une hypothèse simple et d'une hypothèse composée

Commençons par un exemple.
Supposons que $X \sim \mathcal{N}(\mu, 16)$ et que l'on désire confronter les deux hypothèses suivantes:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 0, \\ H_1 : \mu > 0. \end{cases}$$

On désire trouver le meilleur test si $\alpha = 5\%$ et si $n = 100$.
On note qu'ici l'hypothèse nulle est simple, alors que l'hypothèse alternative est composée.

Pour solutionner le problème, on fait appel à ce que l'on a vu et au Lemme de Neyman-Pearson. On considère alors μ_1, une quantité connue et strictement positive. On confronte les deux hypothèses simples suivantes:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 0, \\ H_1^{(\mu_1)} : \mu = \mu_1. \end{cases}$$

En appliquant le Lemme de Neyman-Pearson, on sait que le test PP de niveau α admet la région critique suivante:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \bar{x} \geq \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{n^{1/2}}\}, \\ &= \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \bar{x} \geq 1.645\frac{4}{100^{1/2}}\}, \\ &= \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \bar{x} \geq 0.658\}, \end{aligned}$$

puisque $n = 100$, $\sigma = 4$ et $z_{0.95} = 1.645$.

Ainsi, on note que la région critique

$$\mathcal{C} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \bar{x} \geq 0.658\}$$

ne dépend pas de la valeur de μ_1!
Ainsi, $\mathcal{C}$ représente la région critique d'un test qui permet de confronter les hypothèses originales:

$$\begin{cases} H_0 : & \mu = 0, \\ H_1 : & \mu = \mu_1 > 0. \end{cases}$$

Examinons la puissance du test de région critique $\mathcal{C}$.

$$\begin{aligned} 1-\beta(\mu_1) &= P((X_1,\ldots,X_n)\in\mathcal{C}|H_1^{(\mu_1)}), \\ &= P(\bar{X}\geq 0.658|H_1^{(\mu_1)}), \\ &= P(\mathcal{N}(\mu_1, 0.16)\geq 0.658), \end{aligned}$$

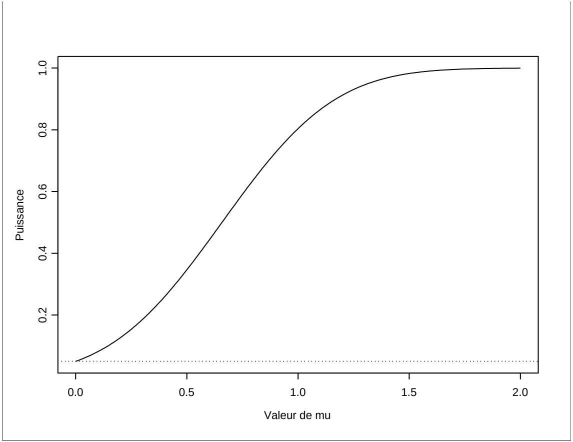
car en effet sous l'hypothèse alternative $H_1 : \mu = \mu_1$ on sait que $\bar{X} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i \sim \mathcal{N}(\mu_1, 0.16)$.
Ainsi on trouve:

$$1-\beta(\mu_1) = 1-\Phi\left(\frac{0.658-\mu_1}{0.4}\right).$$

On note que la région critique est indépendante de μ_1, mais que bien entendu la puissance est fonction de μ_1.

Le graphique de la fonction de puissance est:

Figure: Fonction de puissance $1 - \beta(\mu_1)$



Rappel:

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 0, \\ H_1: & \mu = \mu_1 > 0. \end{cases}$$

Région critique: $\mathcal{C} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \bar{x} \geq 0.658\}$; Fonction de puissance: $1 - \beta(\mu_1) = 1 - \Phi\left(\frac{0.658 - \mu_1}{0.4}\right)$. On donne la puissance pour certaines valeurs de μ_1:

μ_1	$1 - \beta(\mu_1)$
-2	< 0.0001
-1	< 0.0001
0	0.05 = α
1	0.8037
2	0.9996

Test uniformément le plus puissant (UPP)

Considérons un espace paramétrique

$$\Theta = \{\theta_0\} \cup \Theta_1,$$

et on veut confronter

$$\begin{cases} H_0: & \theta = \theta_0, \\ H_1: & \theta \in \Theta_1. \end{cases}$$

Ainsi, l'hypothèse nulle est simple, alors que l'hypothèse alternative est composée.

Un test T est dit **uniformément le plus puissant** de niveau α si, peu importe le choix de $\theta_1 \in \Theta_1$, le test T est le plus puissant de niveau α afin de confronter les hypothèses simples:

$$\begin{cases} H_0 : & \theta = \theta_0, \\ H_1^{(\theta_1)} : & \theta = \theta_1. \end{cases}$$

On note que la région critique $\mathcal{C}$ associée au test T ne varie pas en fonction de θ.
On dira que le test T est UPP de niveau α.

Courbe de puissance

La courbe de puissance d'un test T pour confronter les hypothèses:

$$\begin{cases} H_0: & \theta = \theta_0, \\ H_1: & \theta \in \Theta_1, \end{cases}$$

est donnée par la formule:

$$1 - \beta(\theta) = P((X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{C} \mid \theta), \ \theta \in \Theta.$$

Exemple

Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec σ^2 connu. On confronte:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0, \\ H_1 : \mu > \mu_0. \end{array} \right.$$

La région critique du test UPP de niveau α est donnée par: $\mathcal{C} = \{\bar{X} \geq \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{n^{1/2}}\}$. La courbe de puissance est:

$$\begin{aligned} 1 - \beta(\mu) &= P(\bar{X} \geq \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{n^{1/2}} \mid \mu), \\ &= P\left(\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \geq \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{n^{1/2}}\right), \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\mu_0 + z_{1-\alpha}\sigma/n^{1/2} - \mu}{(\sigma/n^{1/2})}\right), \ \mu \geq \mu_0. \end{aligned}$$

On note que $1 - \beta(\mu_0) = 1 - \Phi(z_{1-\alpha}) = \alpha$.

Exemple

Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec σ^2 connu. On confronte:

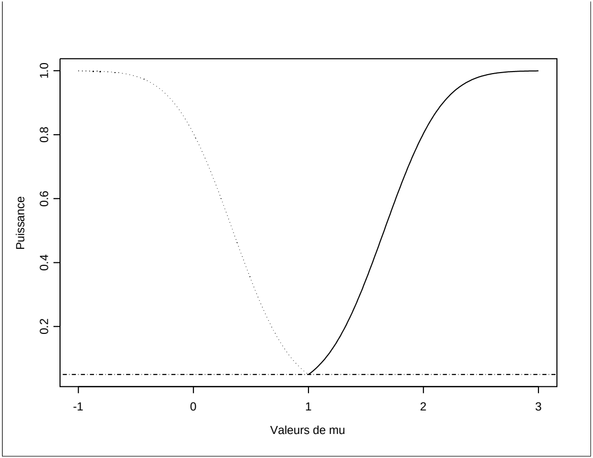
$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0, \\ H_1 : \mu < \mu_0. \end{cases}$$

La région critique du test UPP de niveau α est donnée par: $\mathcal{C} = \{\bar{X} \leq \mu_0 - z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{n^{1/2}}\}$. La courbe de puissance est:

$$\begin{aligned} 1 - \beta(\mu) &= P(\bar{X} \leq \mu_0 - z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{n^{1/2}} \mid \mu), \\ &= P\left(\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \leq \mu_0 - z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{n^{1/2}}\right), \\ &= \Phi\left(\frac{\mu_0 - z_{1-\alpha}\sigma/n^{1/2} - \mu}{(\sigma/n^{1/2})}\right), \ \mu \leq \mu_0. \end{aligned}$$

On note que $1 - \beta(\mu_0) = \Phi(-z_{1-\alpha}) = \alpha$.

Figure: Fonctions de puissance pour les deux tests UPP



Exemple

Supposons que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec μ connu, et que l'on désire confronter les deux hypothèses suivantes:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2, \\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2. \end{cases}$$

La région critique du test UPP de niveau α est donnée par:

$$\mathcal{C} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid s^2 \geq \chi^2_{n;1-\alpha} \frac{\sigma_0^2}{n}\},$$

où $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ et $\chi^2_{n;1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha$.

Exemple

Supposons que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec μ connu, et que l'on désire confronter les deux hypothèses suivantes:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2, \\ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2. \end{cases}$$

La région critique du test UPP de niveau α est donnée par:

$$\mathcal{C} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid s^2 \leq \chi^2_{n;\alpha} \frac{\sigma_0^2}{n}\},$$

où $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ et $\chi^2_{n;\alpha}$ est le quantile d'ordre α.

Exemple

Supposons que $X \sim Bin(m, \pi)$, où m est connu et $n \geq 30$. On désire confronter les deux hypothèses suivantes:

$$\begin{cases} H_0 : \pi = \pi_0, \\ H_1 : \pi > \pi_0. \end{cases}$$

La région critique *approximative* du test UPP de niveau α est donnée par:

$$\mathcal{C} = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \mid \hat{\pi} \geq \pi_0 + z_{1-\alpha} \left\{ \frac{\pi_0(1-\pi_0)}{mn} \right\}^{1/2} \right\},$$

où $\hat{\pi} = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{n} x_i$ et $z_{1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha$ d'une $\mathcal{N}(0, 1)$.

Exemple

Supposons que $X \sim Bin(m, \pi)$, où m est connu et $n \geq 30$. On désire confronter les deux hypothèses suivantes:

$$\begin{cases} H_0 : \pi = \pi_0, \\ H_1 : \pi < \pi_0. \end{cases}$$

La région critique *approximative* du test UPP de niveau α est donnée par:

$$\mathcal{C} = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \mid \hat{\pi} \leq \pi_0 - z_{1-\alpha} \left\{ \frac{\pi_0(1-\pi_0)}{mn} \right\}^{1/2} \right\},$$

où $\hat{\pi} = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{n} x_i$ et $z_{1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha$ d'une $\mathcal{N}(0, 1)$.

Test unilatéral à droite

Supposons qu'un test statistique soit basé sur une statistique $T(X_1, \ldots, X_n)$ et que la région critique $\mathcal{C}$ soit de la forme:

$$\mathcal{C} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid T(X_1, \ldots, X_n) \geq k_\alpha\}$$

On dira alors que le test est unilatéral à droite.
Ceci amène naturellement au test unilatéral à gauche.
Test unilatéral à gauche
Supposons qu'un test statistique soit basé sur une statistique $T(X_1, \ldots, X_n)$ et que la région critique $\mathcal{C}$ soit de la forme:

$$\mathcal{C} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid T(X_1, \ldots, X_n) \leq k_\alpha\}$$

On dira alors que le test est unilatéral à gauche.

Test bilatéral

Supposons qu'un test statistique soit basé sur une statistique $T(X_1, \dots, X_n)$ et que la région critique $\mathcal{C}$ soit de la forme:

$$\mathcal{C} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid T(X_1, \dots, X_n) \leq k_{1,\alpha} \text{ ou } T(X_1, \dots, X_n) \geq k_{2,\alpha}\}$$

On dira alors que le test est bilatéral.

Test bilatéral

Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec σ^2 connu.
Si on confronte:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0, \\ H_1 : \mu > \mu_0, \end{cases}$$

la région critique est $\mathcal{C} = \{\bar{x} \geq \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{n^{1/2}}\}$ et le test basé sur la statistique $T(X_1, \ldots, X_n) = \bar{X}$ est unilatéral à droite.
Cependant, si on confronte:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0, \\ H_1 : \mu < \mu_0, \end{cases}$$

la région critique est $\mathcal{C} = \{\bar{x} \leq \mu_0 - z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{n^{1/2}}\}$ et le test basé sur la statistique $T(X_1, \ldots, X_n) = \bar{X}$ est unilatéral à gauche.

Supposons que X soit $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, σ^2 connu, que l'on veuille confronter:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0, \\ H_1 : \mu \neq \mu_0, \end{cases}$$

Existe-t-il un test UPP? Pour tenter de trouver un test UPP, confrontons plutôt les deux hypothèses simples suivantes:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0, \\ H_1^{(\mu_1)} : \mu = \mu_1, \end{cases}$$

où $\mu_1 \neq \mu_0$.

Le Lemme de Neyman-Pearson nous fournit la région critique pour confronter H_0 et $H_1^{(\mu_1)}$ qui est

$$\mathcal{C}(\mu_1) = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \bar{x} \geq \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{n^{1/2}}\}, \text{ si } \mu_1 > \mu_0;$$

et de plus

$$\mathcal{C}(\mu_1) = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \bar{x} \leq \mu_0 - z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{n^{1/2}}\}, \text{ si } \mu_1 < \mu_0.$$

On note que la région critique du test le plus puissant $\mathcal{C}(\mu_1)$ varie en fonction de μ_1.
Ceci implique qu'il n'existe pas de test UPP pour ce problème.

On peut cependant proposer un test raisonnable, en s'inspirant des régions critiques des tests unilatéraux. On sait déjà que pour tester

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0, \\ H_1 : \mu > \mu_0, \end{cases}$$

le test UPP repose sur $\bar{X}$ et il est unilatéral à droite. De même, pour tester

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0, \\ H_1 : \mu < \mu_0, \end{cases}$$

le test UPP repose encore sur $\bar{X}$ et il est unilatéral à gauche.

Pour tester:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0, \\ H_1 : \mu \neq \mu_0, \end{cases}$$

on utilise un test basé sur $\bar{X}$ mais on le rend bilatéral. Ainsi le test s'articule autour de la région critique

$$\mathcal{C} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \bar{x} \leq k_{1,\alpha} \text{ ou } \bar{x} \geq k_{2,\alpha}\},$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \alpha &= P((X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{C} \mid H_0), \\ &= P(\bar{X} \leq k_{1,\alpha} \text{ ou } \bar{X} \geq k_{2,\alpha} \mid H_0). \end{aligned}$$

Or sous l'hypothèse nulle H_0 la loi de la moyenne est

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}).$$

On doit donc avoir:

$$\begin{aligned}
\alpha &= P\left(\bar{X} \leq k_{1,\alpha} \text{ ou } \bar{X} \geq k_{2,\alpha} \mid H_0\right), \\
&= P\left(\mathcal{N}(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}) \leq k_{1,\alpha} \text{ ou } \mathcal{N}(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}) \geq k_{2,\alpha}\right), \\
&= P\left(\mathcal{N}(0,1) \leq \frac{k_{1,\alpha} - \mu_0}{(\sigma/n^{1/2})} \text{ ou } \mathcal{N}(0,1) \geq \frac{k_{2,\alpha} - \mu_0}{(\sigma/n^{1/2})}\right).
\end{aligned}$$

On pose:

$$\begin{aligned}
\frac{k_{1,\alpha} - \mu_0}{(\sigma/n^{1/2})} &= -z_{1-\alpha/2}, \\
\frac{k_{2,\alpha} - \mu_0}{(\sigma/n^{1/2})} &= z_{1-\alpha/2}.
\end{aligned}$$

En isolant,

$$\begin{aligned} k_{1,\alpha} &= \mu_0 - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{n^{1/2}}, \\ k_{2,\alpha} &= \mu_0 + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{n^{1/2}}. \end{aligned}$$

Finalement, la région critique est:

$$\mathcal{C} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \bar{x} \leq \mu_0 - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{n^{1/2}} \text{ ou } \bar{x} \geq \mu_0 + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{n^{1/2}}\}.$$

Nous pouvons calculer la courbe de puissance de ce test et la comparer avec les courbes de puissance des deux tests UPP que nous avons modifié.

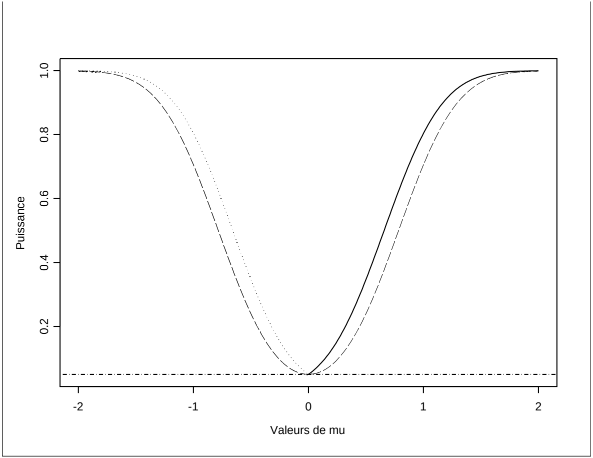
$$
\begin{aligned}
1-\beta(\mu) &= P((X_1,\ldots,X_n)\in\mathcal{C}\mid\mu),\ \mu\in\mathbb{R},\\
&= P\left(\bar{X}\le\mu_0 - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{n^{1/2}} \text{ ou } \bar{X}\ge\mu_0 + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{n^{1/2}}\mid\mu\right),\\
&= P\left(\mathcal{N}(\mu,\frac{\sigma^2}{n})\le\mu_0 - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{n^{1/2}} \text{ ou }\right.\\
&\qquad\left.\mathcal{N}(\mu,\frac{\sigma^2}{n})\ge\mu_0 + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{n^{1/2}}\right),\\
&= P\left(\mathcal{N}(\mu,\frac{\sigma^2}{n})\le\mu_0 - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{n^{1/2}}\right)+\\
&\quad P\left(\mathcal{N}(\mu,\frac{\sigma^2}{n})\ge\mu_0 + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{n^{1/2}}\right).
\end{aligned}
$$

On centre et on standardize, pour obtenir:

$$1-\beta(\mu)=\Phi\left(\frac{\mu_0-z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{n^{1/2}}-\mu}{\sigma/n^{1/2}}\right)+1-\Phi\left(\frac{\mu_0+z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{n^{1/2}}-\mu}{\sigma/n^{1/2}}\right),$$

où $\Phi(-z_{1-\alpha/2})=\alpha/2$ et $\Phi(z_{1-\alpha/2})=1-\alpha/2$.
On note que $1-\beta(\mu_0)=\Phi(-z_{1-\alpha/2})+1-\Phi(z_{1-\alpha/2})=\alpha$.

Figure: Fonctions de puissance pour les deux tests UPP et comparaison avec le test bilatéral



On peut donner des valeurs particulières pour tous les tests avec $\mu_0 = 0$, $\sigma^2 = 16$, $n = 100$, $\alpha = 5\%$.

μ	t.u.g	t.b.	t.u.d.
-2	0.9996	0.9988	< 0.0001
-1	0.8037	0.7054	< 0.0001
0	0.05	0.05	0.05
1	< 0.0001	0.7054	0.8037
2	< 0.0001	0.9988	0.9996

On constate donc que la courbe de test bilatéral est un peu moins puissante, ce qui était attendu.