Chapitre 4. Exemples de tests du rapport de vraisemblance (RV)

Pierre Duchesne

March 18, 2017

Exemple: test de moyenne, hypothèse bilatérale

Supposons que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec σ^2 connu. On désire confronter les deux hypothèses suivantes:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0, \\ H_1 : \mu \neq \mu_0. \end{cases}$$

La région critique du test RV de niveau α est donnée par:

$$\mathcal{C} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid n^{1/2} \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma} \geq z_{1-\alpha/2}\},$$

où $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$, et $z_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ d'une normale centrée réduite.

Exemple: test de moyenne, hypothèse unilatérale à gauche

Supposons que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec σ^2 inconnue. On désire confronter les deux hypothèses suivantes:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0, \\ H_1 : \mu < \mu_0. \end{cases}$$

La région critique du test RV de niveau α est donnée par:

$$\mathcal{C} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid n^{1/2} \frac{(\bar{x} - \mu_0)}{s} \leq -t_{n-1,1-\alpha}\},$$

où $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ et $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$, et $t_{n-1,1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha$ d'une Student avec $n - 1$ degrés de liberté.

Exemple: test de moyenne, hypothèse unilatérale à droite

Supposons que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec σ^2 inconnue. On désire confronter les deux hypothèses suivantes:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0, \\ H_1 : \mu > \mu_0. \end{cases}$$

La région critique du test RV de niveau α est donnée par:

$$\mathcal{C} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid n^{1/2} \frac{(\bar{x} - \mu_0)}{s} \geq t_{n-1,1-\alpha}\},$$

où $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ et $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$, et $t_{n-1,1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha$ d'une Student avec $n - 1$ degrés de liberté.

Exemple: test de variance, hypothèse bilatérale

Supposons que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec μ inconnue. On désire confronter les deux hypothèses suivantes:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2, \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2. \end{cases}$$

La région critique du test RV de niveau α est donnée par:

$$\mathcal{C} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid s^2 \leq \chi^2_{n-1,\alpha/2} \frac{\sigma_0^2}{n-1} \text{ ou } s^2 \geq \chi^2_{n-1,1-\alpha/2} \frac{\sigma_0^2}{n-1}\},$$

où $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, et $\chi^2_{n-1,1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha$ d'une variable aléatoire χ^2 avec $n - 1$ degrés de liberté.

Exemple: test de variance, hypothèse unilatérale à gauche

Supposons que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec μ inconnue. On désire confronter les deux hypothèses suivantes:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2, \\ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2. \end{cases}$$

La région critique du test RV de niveau α est donnée par:

$$\mathcal{C} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid s^2 \leq \chi^2_{n-1,\alpha} \frac{\sigma_0^2}{n-1}\},$$

où $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, et $\chi^2_{n-1,1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha$ d'une variable aléatoire χ^2 avec $n - 1$ degrés de liberté.

Exemple: test de variance, hypothèse unilatérale à droite

Supposons que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec μ inconnue. On désire confronter les deux hypothèses suivantes:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2, \\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2. \end{cases}$$

La région critique du test RV de niveau α est donnée par:

$$\mathcal{C} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid s^2 \geq \chi^2_{n-1,1-\alpha} \frac{\sigma_0^2}{n-1}\},$$

où $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, et $\chi^2_{n-1,1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha$ d'une variable aléatoire χ^2 avec $n - 1$ degrés de liberté.