STT 3500/STT 6230

Méthodes non paramétriques/Méthodes non paramétriques avancées

Devoir 1

Hiver 2020

À moins d'un avis contraire, les exercices proviennent de l'ouvrage *Nonparametric Statistical Inference*, cinquième édition, de J. D. Gibbons et S. Chakraborti. Assurez-vous d'avoir la bonne édition du livre.

(1) (STT-3500) Soient $X_{(1)} < X_{(2)} < X_{(3)} < X_{(4)}$ les statistiques d'ordre d'un échantillon aléatoire de taille $n = 4$ d'un phénomène ayant pour distribution $f_X(x) = \exp(-x)$, $0 < x < \infty$, et zéro sinon. Trouver $P(3 \leq X_{(4)})$.

(2) (STT-3500) Soient X_1, X_2, X_3 un échantillon aléatoire d'un phénomène ayant une distribution continue de la forme:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 < \mathrm{x} < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver la probabilité que la plus petite valeur de l'échantillon excède la médiane de la distribution.

(3) (STT-3500/STT-6230) Problème 2.8

(4) (STT-3500/STT-6230) Problème 2.9

(5) (STT-3500/STT-6230) Problème 2.10

(6) (STT-3500/STT-6230) Problème 2.14

(7) (STT-3500/STT-6230) Dans cet exercice on utilise les résultats d'examen de l'exercice 1, p. 21 du livre de Higgins. Les données consistent en des résultats d'examens (simulés). Le score médian moyen était de 70, et suite à une autre évaluation, il est décidé de vérifier si le score médian a augmenté. Effectuer le test binomial. Les données sont:

79	74	88	80	80	66	65	86	84	80
78	72	71	74	86	96	77	81	76	80
76	75	78	87	87	74	85	84	76	77
76	74	85	74	76	77	76	74	81	76

(a) énoncer l'hypothèse nulle et alternative pour tester si pas le score médian a augmenté;

(b) calculer la valeur p en utilisant la distribution binomiale;

(c) calculer la valeur p en utilisant l'approximation normale, et comparez le résultat à la partie (b).

(8) (STT-6230) Considérons F une fonction de répartition. On pose $F^{-1}(p) = \inf\{x \mid F(x) \geq p\}$. Montrer que la fonction $F^{-1}(t)$, $t \in (0,1)$, est nondécroissante, continue à gauche, et satisfait les trois propriétés suivantes:

(i) $F^{-1}(F(x)) \leq x$, $-\infty < x < \infty$;

(ii) $F(F^{-1}(t)) \geq t$, $0 < t < 1$;

(iii) $F(x) \geq t$ si et seulement si $x \geq F^{-1}(t)$.

(9) (STT-6230) Soit X une variable aléatoire continue de fonction de répartition F_X et de densité f_X. Si l'espérance mathématique existe, on peut écrire:

$$\mu_X = E(X) = \int x dF_X(x) = \int x f_X(x) dx = T(F_X).$$

On dit alors que $E(X)$ est une fonctionnelle, car μ_X est fonction de F_X. La médiane est également une fonctionnelle car $T(F_X) = F_X^{-1}(1/2)$. On définit une *fonctionnelle de position* si les deux propriétés suivantes sont satisfaites:

i) Si $Y = X + a$ alors $T(F_Y) = T(F_X) + a$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

ii) Si $Y = aX$ alors $T(F_Y) = aT(F_X)$, $\forall a \neq 0$.

Répondez aux questions suivantes:

a) Montrer que l'espérance mathématique est une fonctionnelle de position.

b) Montrer que la médiane est une fonctionne de position.

c) Pour $p \in (0,1)$, considérons le quantile τ_p satisfaisant $F_X(\tau_p) = p$. Montrer que si $p \neq 1/2$, alors τ_p n'est pas une fonctionnelle de position.

(10) (STT-6230) Problème 2.21

(11) (STT-6230) Problème 2.30