STT 2700: Concepts et méthodes en statistique
Devoir 2 : date de remise, 24 mars 2017
Hiver 2017

(1) Soit X une variable aléatoire de loi binomiale bin(n, p), $0 < p < 1$. Montrer qu'il n'existe aucun estimateur sans biais de $1/p$.

(2) Supposons que $X_1, \ldots, X_n$ est un échantillon aléatoire d'une certaine distribution. Dans chacun des quatre cas suivants, trouver l'estimateur à vraisemblance maximale.

a) $f_X(x, \theta) = \theta x^{\theta - 1}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < \theta < \infty.$
b) $f_X(x, \theta) = (1/\theta) \exp(-x/\theta),\ 0 < x < \infty, \quad 0 < \theta < \infty.$
c) $f_X(x, \theta) = \frac{1}{2} \exp(-|x - \theta|),\ -\infty < x < \infty, \quad -\infty < \theta < \infty.$
d) $f_X(x, \theta) = \exp(-(x - \theta)),\ \theta \leq x < \infty, \quad -\infty < \theta < \infty.$

(3) Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon aléatoire provenant d'une distribution conjointe:

$$f_X(x; \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\theta_2} \exp(-(x - \theta_1)/\theta_2),\ \theta_1 \leq x < \infty,\ -\infty < \theta_1 < \infty,\ 0 < \theta_2 < \infty.$$

Trouver l'estimateur à vraisemblance maximale de θ_1 et θ_2.

(4) Soient $X_{(1)}$, $X_{(2)}$ et $X_{(3)}$ les statistiques d'ordre d'un échantillon aléatoire de taille $n = 3$ d'une distribution uniforme sur l'intervalle $(0, 1)$. Posons $W = (X_{(1)} + X_{(3)})/2$. Trouvez la fonction de densité de W.

(5) Supposons que la loi conjointe du couple (X, Y) soit donnée par:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{12}{7} x(x + y),\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1.$$

Trouver la loi conjointe de $\min(X, Y)$ et $\max(X, Y)$.

(6) Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon aléatoire possédant seulement l'une de deux densités. Plus précisément, si $\theta = 0$, alors:

$$f_X(x|\theta) = \begin{cases} 1, \text{si } 0 < x < 1; \\ 0, \text{sinon.} \end{cases}$$

Cependant, si $\theta = 1$, alors

$$f_X(x|\theta) = \begin{cases} 1/(2x^{1/2}), \text{si } 0 < x < 1; \\ 0, \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver l'estimateur à vraisemblance maximale de θ.

(7) Soit un échantillon aléatoire $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$, $n > 1$, d'une distribution $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Soit $\bar{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $\hat{\sigma}^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \{X_i - \bar{X}\}^2$.

a) Trouver la constance c telle que $c(\bar{X} - X_{n+1})/\hat{\sigma}$ admet une loi t de Student.

b) Supposons $n = 8$. Déterminer la valeur k telle que

$$P(\bar{X} - k\hat{\sigma} < X_9 < \bar{X} + k\hat{\sigma}) = 0.8.$$

L'intervalle obtenu est appelé un intervalle de prévision pour X_9 de niveau 80%.

(8) Soient $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ les moyennes échantillonnales de deux échantillons aléatoires, chacun de taille n. On suppose que $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$. On suppose σ^2 connu. Trouver n tel que

$$P(\bar{X} - \bar{Y} - \sigma/5 < \mu_1 - \mu_2 < \bar{X} - \bar{Y} + \sigma/5) = 0.90.$$

(9) Un fabricant de peinture désire contrôler la qualité d'une remplisseuse semi-automatique de pots de peinture. Le caractère à l'étude ici est l'ensemble des pots de peinture. Les pots de peintures indiquent une quantité nominale de 3.78 litres avec un écart-type de 0.02 litres.

a) Quelle hypothèse pourrait être effectuée sur la distribution du caractère à l'étude? Discuter.

b) Afin de confronter $H_0 : \mu = 3.78$ versus $H_1 : \mu \neq 3.78$, le test utilisé rejette l'hypothèse nulle si $\bar{X}_n \geq 3.784$ ou si $\bar{X}_n \leq 3.776$. Pouvez-vous expliquer la logique derrière ce test?

c) Quelle est la probabilité de conclure à tord que la remplisseuse est défectueuse si $n = 100$?

d) Si la moyenne de la population était de 3.77 litres, quelle serait la probabilité de conclure que la remplisseuse est défectueuse si on observe un échantillon de taille $n = 100$?

(10) Soit X un caractère qui admet une loi de Bernoulli $bin(1, \pi)$. On considère un échantillon de taille $n = 5$.

a) Déterminer la région critique du test uniformément le plus puissant de niveau 5% pour confronter les hypothèses $H_0 : \pi = 1/2$ versus $H_1 : \pi < 1/2$.

b) Tracer la courbe de puissance du test déterminé en a).

c) Si on observé $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = x_5 = 0$, quelle décision prend-on?