STT 2700: Concepts et méthodes en statistique
Travail pratique 3
Hiver 2017

(1) Exercices provenant du Chapitre 4 du livre de Rice, 3ième édition: 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 89, 90.

(2) Soit X un caractère étudié dans une population tel que $E(X) = \mu$ et $\mathrm{var}(X) = \sigma^2$. On dispose d'un échantillon aléatoire $X_1, \ldots, X_n$. On pose:

$$\mu_k = E\{(X - \mu)^k\}, k = 1, 2, \ldots$$

a) Montrer que $\mu_1 = 0$ et que $\mu_2 = \sigma^2$.

b) Posons $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$. Montrer que $E(\bar{X}) = \mu$ et $\mathrm{var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$.

c) Posons $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$. Montrer que $E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$ et que $\mathrm{var}(\hat{\sigma}^2) = \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n} = \frac{\mu_4 - \sigma^4}{n}$.

d) Montrer que $E(S^2) = \sigma^2$.

(3) Soit $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$.

Un résultat général stipule que:

$$\mathrm{var}(S^2) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \left\{\frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n} - 2\frac{\mu_4 - 2\mu_2^2}{n^2} + \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{n^3}\right\}$$

Montrer qu'en présumant la normalité cette formule devient: $\mathrm{var}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$.