C. R. Acad. Sci. Paris, t. 306, Série I, p. 747-750, 1988

Équations différentielles/*Ordinary Differential Equations*

Sur l'intervalle maximal d'existence de solutions pour des inclusions différentielles

Marlène Frigon, Andrzej Granas et Zine-el-abdinc Guennoun

Résumé – Nous considérons dans cette Note le problème d'existence d'une solution globale pour des inclusions différentielles de la forme $u'(t)\in F(t, u(t))$ p.p. dans $[0, T]$, $u(0)=r$, où $F:[0, T]\times\mathbb{R}^n\to 2^{\mathbb{R}^n}$ vérifie des conditions convenables; dans la preuve de notre théorème principal, on utilise de façon essentielle un résultat classique de la théorie de l'intégration dans une formulation plus précise que celles qu'on trouve dans la littérature; dans le cas où F est univoque et continue, on retrouve un résultat bien connu de Wintner (¹).

On the maximal interval for the existence of solutions to differential inclusions

Abstract – *In this Note we establish the existence of a global solution for differential inclusions of the form* $u'(t)\in F(t, u(t))$ *a.e. in* $[0, T]$, $u(0)=r$, *under the suitable conditions on* $F:[0, T]\times\mathbb{R}^n\to 2^{\mathbb{R}^n}$; *in the case where* F *is single-valued and continuous, one recovers a well-known result of Wintner* (¹).

Préliminaires. – Soit $C=C([0, T]), \mathbb{R}^n)$ muni de la norme uniforme $\|\ \|_0$. Une fonction multivoque $F:[0, T]\times\mathbb{R}^n\to 2^{\mathbb{R}^n}$ sera dite de Carathéodory si elle vérifie les hypothèses :

(i) F est à valeurs convexes, compactes, non vides;

(ii) $x\mapsto F(t, x)$ est semi-continue supérieurement (s. c. s) pour presque tout $t\in[0, T]$;

(iii) $t\mapsto F(t, x(t))$ est mesurable (²) pour toute fonction $x\in C$;

(iv) pour tout $K>0$ il existe $h_k\in L^1([0, T])$ tel que, si $\|x\|\leqq K$, alors

$$F(t, x)\subseteqq B(0, h_k(t)) \text{ p. p. dans } [0, T].$$

Étant donnés une fonction de Carathéodory F et $r\in\mathbb{R}^n$, on définit l'opérateur multivoque de Carathéodory $\mathscr{F}: C\to 2^C$ associé à F par

$$\mathscr{F}[u](t)=\left\{\int_0^t f(s)\,ds+r \,\middle|\, f(s)\in F(s, u(s)) \text{ et } f:[0, T]\to\mathbb{R}^n \text{ mesurable}\right\}.$$

Lemme 1. – *Si* F *est de Carathéodory, alors :*

(i) *l'opérateur* $\mathscr{F}$ *associé à* F *est bien défini,*

(ii) $\mathscr{F}$ *est à valeurs convexes compactes non vides,*

(iii) $\mathscr{F}$ *est s. c. s,*

(iv) $\mathscr{F}$ *est complètement continu.*

Preuve. – (i) et (ii) sont immédiats (³). Pour montrer (iii), fixons $u_0\in C$, $\varepsilon>0$ et soit $K=\|u_0\|_0+1$; il existe $\alpha>0$ tel que si $\mu(E)\leqq\alpha$ alors $\int_E h_k(t)\,dt\leqq\varepsilon$. Pour tous $v\in\mathbb{R}^n$, $m\in\mathbb{N}$, considérons l'ensemble mesurable

$$G_{vm}=\{t\in[0, T]\mid \|v-u_0(t)\|<1/m\Rightarrow F(t, v)\subset F(t, u_0(t))+\bar{B}(0, \varepsilon)\},$$

et posons $E_{m\varepsilon}=\bigcap_v G_{vm}$; $\{E_{m\varepsilon}\}_m$ est une suite croissante d'ensembles mesurables. Par la s.c.s de F, on a $\mu(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_{m\varepsilon})=\mu([0, T])$; il existe alors m_0 tel que $\mu(E_{m_0\varepsilon})>T-\alpha$. Soit

Note présentée par Jean Leray.

0249-6291/88/03060747 $ 2.00

maintenant $\delta < 1/m_0$; si $u \in C$ avec $\|u-u_0\|_0 < \delta$, on montre qu'étant donné $\omega \in \mathscr{F}[u]$, il existe $\omega_0 \in \mathscr{F}[u_0]$ tel que $\|\omega-\omega_0\|_0 < \varepsilon(T+2)$ et la conclusion suit.

(iv) Soit $B(0, K)$ une boule dans C; alors pour tous $\omega \in \mathscr{F}[u]$ et $t, t_1 \in [0, T]$ on a

$$\|\omega\|_0 \leqq \|r\| + \|h_k\|_{L^1} \quad \text{et} \quad \|\omega(t_1)-\omega(t)\| \leqq \int_t^{t_1} h_k(s)\,ds,$$

c'est-à-dire que $\mathscr{F}(B)$ est borné et équicontinu et donc, par le théorème d'Arzela-Ascoli, $\mathscr{F}(B)$ est relativement compact dans C.

Lemme 2 (Formule de changement de variables). — *Soient* $g : [A, B] \to \mathbb{R}$ *et* $f : [a, b] \to [A, B]$ *deux fonctions numériques telles que*

(i) f *est absolument continue,*

(ii) $g \in L^1[A, B]$, (iii) $g(f)f' \in L^1[a, b]$.

Alors

(1)
$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\,dx = \int_a^b g(f(t))\,f'(t)\,dt \quad (^4).$$

Preuve. — Fixons f et notons par $\mathscr{H}$ l'ensemble des fonctions intégrables g vérifiant la formule (1). En utilisant le fait élémentaire que toute fonction continue g appartient à $\mathscr{H}$, le résultat est obtenu (en plusieurs étapes) par des applications répétées du théorème de Lebesgue sur la convergence dominée.

(A) $g = 1_M$, *la fonction caractéristique de* M, M *ouvert ou fermé* : Il suffit de remarquer que g est la limite ponctuelle d'une suite bornée de fonctions continues convenables.

(B) $g = 1_M$ *où* M *est un ensemble mesurable* : Soit $\{C_n\}$ (resp. $\{U_n\}$) une suite croissante (resp. décroissante) de fermés (resp. ouverts) dans $[A, B]$ telle que $C_n \subseteqq U_n$ et $\mu(U_n - C_n) \leqq 1/n$. En posant $L = \bigcup C_n$, $N = \bigcap U_n$ on a $L \subseteqq M \subseteqq N$, et $\mu(N-L)=0$; de plus on a

(2)
$$1_L = 1_M = 1_N \quad \text{p. p. dans } [A, B].$$

D'après (A), on a pour tous $x \in [a, b]$ et $n \in \mathbb{N}$

(3)
$$\left\{ \begin{aligned} \int_a^x 1_{C_n}[f(t)]\,f'(t)\,dt &= \int_{f(a)}^{f(x)} 1_{C_n}(t)\,dt, \\ \int_a^x 1_{U_n}[f(t)]\,f'(t)\,dt &= \int_{f(a)}^{f(x)} 1_{U_n}(t)\,dt; \end{aligned} \right.$$

en passant à la limite, et grâce à (2), on obtient

(4)
$$\lim 1_{C_n}(f(t))\,f'(t) = \lim 1_{U_n}(f(t))\,f'(t) \quad \text{p. p. dans } [a, b].$$

En appliquant (2) et (4), on obtient que la suite $\{1_{U_n}[f(t)]\,f'(t)\}$ converge vers $1_M[f(t)]\,f'(t)$ p. p. dans $[a, b]$; de (3) on conclut que $g \in \mathscr{H}$.

(C) g *et* $g(f)f'$ *sont intégrables* : Il suffit de supposer que g est positive, et de remarquer que $g(f)f'$ est la limite ponctuelle d'une suite $\{g_n(f)f'\}$ majorée par $g(f)|f'|$ avec $g_n \in \mathscr{H}$ pour tout n.

Majoration *a priori* des solutions.

Lemme 3. — *Soit* $F : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ *une fonction multivoque de Carathéodory vérifiant*

(H)
$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{il existe une fonction mesurable } q : [0, \infty) \to (0, \infty) \textit{ telle que} \\ [1/q] \in L^1_{\text{loc}}[0, \infty) \quad \textit{et} \quad F(t, x) \subseteqq B(0, q(\|x\|)). \end{array} \right.$$

Alors étant donnés $r \in \mathbb{R}^n$ *et* $\mathrm{T} < \mathrm{T}_\infty = \int_{\|r\|}^{\infty} dx/q(x)$, *il existe* $\mathrm{M} > 0$ *tel que pour toute solution* u *absolument continue du problème*

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} u'(t) \in \mathrm{F}[t, u(t)] \ \textit{p.p. dans} [0, \mathrm{T}], \\ u(0) = r, \end{cases}$$

on a $\| u \|_0 \leqq \mathrm{M}$.

Preuve. — Soient $\mathrm{T} < \mathrm{T}_\infty$ et $\mathrm{M} > 0$ tels que $\mathrm{T} < \int_0^{\mathrm{M}} dx/q(x) < \mathrm{T}_\infty$. Soit u une solution de (P). Nous allons montrer que $\| u(t) \| \leqq \mathrm{M}$ pour tout $t \in [0, \mathrm{T}]$; en effet, soit $\mathrm{E} = \{ t \in [0, \mathrm{T}] \mid \| u(t) \| > \| r \| \}$. La fonction $t \mapsto \| u(t) \|$ étant absolument continue sur E on a

$$(*) \qquad \| u(t) \|' = \left\langle \frac{u(t)}{\| u(t) \|}, u'(t) \right\rangle \ \text{p. p. dans E.}$$

Soit $b \in [0, \mathrm{T}]$ tel que la fonction $t \mapsto \| u(t) \|$ atteigne son maximum en b; on peut supposer que $\| u(b) \| \neq \| r \|$. Posons $a = \sup \{ t \in [0, \mathrm{T}] \mid \| u(t) \| = \| r \| \text{ et } t < b \}$, notons que $(a, b) \subseteqq \mathrm{E}$ et que $\| u(a) \| = \| r \|$. Par (H), (P) et $(*)$ on a

$$(**) \qquad \frac{| \| u(t) \|' |}{q(\| u(t) \|)} \leqq 1 \quad \text{p. p. dans} (a, b).$$

Puisque u est absolument continue et $[1/q] \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(0, \infty)$, en posant $f = \| u \|$ et $g = 1/q$, on voit par $(**)$ que les hypothèses du lemme 2 sont vérifiées. On obtient alors

$$\int_{\|r\|}^{\|u(b)\|} \frac{dx}{q(x)} = \int_a^b \frac{\| u(t) \|'}{q(\| u(t) \|)} dt \leqq b - a \leqq \mathrm{T}.$$

En supposant que $\| u(b) \| > \mathrm{M}$ on obtient une contradiction.

EXISTENCE. — Nous sommes en mesure d'énoncer notre résultat principal.

THÉORÈME. — *Soit* $\mathrm{F} : [0, \mathrm{T}] \times \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ *une fonction multivoque de Carathéodory vérifiant :*

$$(\mathrm{H}) \qquad \begin{cases} \textit{il existe une fonction mesurable } q : [0, \infty) \textit{ telle que} \\ [1/q] \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}[0, \infty) \quad \textit{et} \quad \mathrm{F}(t, x) \subseteqq \mathrm{B}(0, q(\| x \|)). \end{cases}$$

Alors étant donnés $r \in \mathbb{R}^n$ *et* $\mathrm{T} < \mathrm{T}_\infty = \int_{\|r\|}^{\infty} dx/q(x)$, *il existe une fonction absolument continue* $u : [0, \mathrm{T}] \to \mathbb{R}^n$ *solution du problème*

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} u'(t) \in \mathrm{F}(t, u(t)) & \textit{p. p. dans} [0, \mathrm{T}]; \\ u(0) = r & (\textit{donnée initiale}). \end{cases}$$

Preuve. — Considérons la famille des problèmes :

$$(\mathrm{P})_\lambda \qquad \begin{cases} u'(t) \in \lambda \mathrm{F}(t, u(t)) & \text{p. p. dans} [0, \mathrm{T}]; \\ u(0) = r, \end{cases}$$

où $0 \leqq \lambda \leqq 1$; chacun s'exprime comme un problème de point fixe :

$$u \in \mathscr{F}_\lambda(u) \quad \text{avec} \quad \mathscr{F}_\lambda(u) = \lambda \mathscr{F}(u) + (1 - \lambda) r,$$

où $\mathscr{F} : \mathrm{C} \to 2^{\mathrm{C}}$ est l'opérateur de Carathéodory associé à F. Par le lemme 3, toutes les solutions de $(\mathrm{P})_\lambda$ sont majorées par la même constante M; en utilisant le lemme 1 et l'alternative de Leray-Schauder pour les applications multivoques s. c. s, complètement continues et à valeurs convexes (*voir* [1]), on obtient l'existence d'une solution du problème (P).

(1) *Voir* [3]. Dans le cas de Carathéodory univoque de croissance L^2, *voir* aussi [2].

(2) C'est-à-dire $\{t \mid F(t, x(t)) \subset K\}$ est mesurable pour tout K compact dans $\mathbb{R}^n$.

(3) On utilise le théorème de Kuratowski-Ryll-Nardzewski : si F est mesurable à valeurs fermées, alors il existe une fonction univoque mesurable telle que $f \in F$.

(4) Sans intégrabilité de $g(f) f'$ le lemme n'est pas vrai; pour une version plus ancienne du lemme 2, voir [4] et aussi [2]. Remarquons que le lemme 2 est essentiel pour l'étude d'autres problèmes aux limites.

Note reçue et acceptée le 11 janvier 1988.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] J. DUGUNDJI et A. GRANAS, *Fixed point theory*, vol. 1; P. W. N., Warszawa, 1982.

[2] M. FRIGON, *Thèse*, Université de Montréal, 1986.

[3] P. HARTMAN, *Ordinary differential equations*, Wiley, New York, 1964.

[4] E. C. TITCHMARSH, *The theory of functions*, Oxford University Press, 1939.

Université de Montréal, C. P. 6128, Succ A,
Montréal, Québec, H3C 3J7, Canada.