Bull. Sc. math., 2e série,
117, 1993, p. 377-400.

THÉORÈMES D'EXISTENCE POUR DES PROBLÈMES AUX LIMITES SANS CONDITION DE CROISSANCE

PAR

MARLÈNE FRIGON (*)

[Département de Mathématiques et Statistique, Université de Montréal *]

RÉSUMÉ. — Nous établissons des théorèmes d'existence du problème $x''=f(t, x, x')$, $x \in \mathscr{B}$. Aucune condition de croissance ou de monotonicité n'est imposée à f. Les résultats reposent sur l'existence de sur- et sous-solutions, et sur l'existence de surfaces convenables sur lesquelles la fonction f a un signe approprié.

ABSTRACT. — We establish existence theorems for the problem $x''=f(t, x, x')$, $x \in \mathscr{B}$. No monotoneity or growth condition will be imposed on f. The results are based on the existence of upper and lower solutions, and on the existence of suitable surfaces on which the function f has an appropriate sign.

0. Introduction

Nous sommes concernés ici par des théorèmes d'existence de solutions du problème suivant :

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} x''(t)=f(t, x(t), x'(t)) \text{ p. p. } t \in [0, 1] \\ x \in \mathscr{B} \end{cases}$$

(*) Texte présenté par Paul MALLIAVIN, reçu en janvier 1991, révisé en août 1991

AMS sujet de classification mathématique 1980 : 34 B 15.

Marlène FRIGON, Mathématiques et Statistiques, Université de Montréal, C.P. 6128 succursale A, Montréal, Canada H3C 3J7. Tél : (514) 343-2316.

Cette recherche a été supportée par un fonds du C.R.S.N.G.-Canada.

où $\mathscr{B}$ désignera une condition aux limites de la forme générale suivante :

$$\begin{cases} a_0 x(0) - b_0 x'(0) = \alpha_0; \\ a_1 x(1) + b_1 x'(1) = \alpha_1; \end{cases} \qquad a_i, b_i \geqslant 0, \quad a_i + b_i > 0, \quad i = 0, 1.$$

Ce problème a été traité par plusieurs auteurs dans le cas où ce problème est un problème de type Bernstein (*voir* [3]), et où la fonction f satisfait une condition de croissance de type Bernstein-Nagumo (*i.e.* il existe une fonction $h : [0, \infty) \to (0, \infty)$ telle que $|f(t, x, p)| \leqslant h(|p|)$ pour $(t, x) \in [0, 1] \times [-M, M]$, et $\int_0^\infty s\, ds/h(s) = \infty$) ([6], [9], [10], [11], [15]); ou lorsque la fonction f est croissante par rapport à la seconde variable et satisfait une certaine condition de type Lipschitz par rapport à la dernière variable ([1], [14]). La plupart de ces résultats sont obtenus à l'aide de la technique de « bornes a priori » introduite par S. BERNSTEIN en 1912 [3].

Dans cet article, en utilisant cette méthode de bornes a priori, nous donnons des théorèmes d'existence de solutions du problème (P) où aucune condition de croissance ou de monotonicité n'est imposée à f. Nous introduisons une nouvelle notion, soit la notion de surfaces supérieure et inférieure pour (P). Ce sont des surfaces dans $[0, 1] \times \mathbf{R}^2$, ayant une forme particulière, sur lesquelles la fonction f a un signe approprié et qui sont définies sur une région donnée de $[0, 1] \times \mathbf{R}$.

Cet article est basé sur un article de GRANAS, GUENTHER et LEE [11] dans lequel, ils remarquaient que des deux problèmes suivants, seul le second possède une solution pour tout $b > a$.

$$\begin{aligned} x''(t) &= (x'(t)^2 + 1)^n \\ x(a) &= 0,\ x(b) = 0 \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} x''(t) &= (x'(t)^2 - 1)^n \\ x(a) &= 0,\ x(b) = 0 \end{aligned}$$

Le point crucial ici est la location des zéros des polynômes $(p^2 + 1)$ et $(p^2 - 1)$. En d'autres termes, la fonction $f(t, x, p) = f(p) = (p^2 - 1)^n$ est identiquement nulle sur la surface $\{(t, x, p) \in [a, b] \times \mathbf{R}^2 : p = 1$ (resp. $p = -1)\}$. Or, suivant notre appellation, cette surface est une surface supérieure (resp. inférieure) pour le problèmes $x''(t) = (x'(t)^2 - 1)^n$, $x(a) = x(b) = 0$. En fait, GRANAS, GUENTHER et LEE [11] ont prouvé que le problème $x'' = f(x')$, $x(a) = x(b) = 0$, possède au moins une solution si f a deux zéros de signe opposé. Ce théorème a ensuite été généralisé par RODRIGUEZ et TINEO [17] pour certaines fonctions $f(t, x, x')$. Ces derniers ont montré l'existence de solution pour le problème de Dirichlet homogène sous l'existence de surfaces de la forme $[0, 1]\times[-M, M]\times\{s_i\}$, $(i=0, 1)$ sur lesquelles la fonction f a un signe approprié.

A la section 4 de cet article, nous généralisons ces résultats de plusieurs façons. En effet, nous considérons des problèmes avec une condition aux limites non homogène, la fonction f n'est pas nécessairement continue, et finalement, les surfaces dont nous supposons l'existence sont beaucoup moins restrictives que celles considérées dans ([11], [17]). Sous l'hypothèse d'existence de surfaces supérieure et inférieure définies sur une région «suffisamment grande» de $[0, 1]\times\mathbf{R}$, nous déduisons l'existence d'une solution du problème (P) ou $\mathscr{B}$ désigne la condition aux limites de Dirichlet.

Le résultat principal de cet article, donné à la section 3, donne l'existence d'une solution du problème (P) sous les hypothèses d'existence de sur- et sous-solutions et de surfaces supérieure et inférieure pour (P). En d'autres termes, on suppose qu'il existe deux fonctions $\varphi\leqslant\psi$ respectivement sous- et sur-solutions de (P), et il existe deux surfaces S_0, S_1, définies par

$$S_i=\{(t, x, p)\in[0, 1]\times\mathbf{R}^2 : \varphi(t)\leqslant x\leqslant\psi(t),\ p=s_i(t, x)\}\quad (i=0, 1)$$

qui sont respectivement surfaces supérieure et inférieure pour (P) (*i.e.* ayant une forme particulière et sur lesquelles f a un signe approprié). Alors, on montre que le problème (P) possède une solution x telle que $\varphi(t)\leqslant x(t)\leqslant\psi(t)$ et $s_1(t, x(t))\leqslant x'(t)\leqslant s_0(t, x(t))$. Nous obtenons comme corollaires des résultats concernant des problèmes de type Nirenberg (*voir* [10], [12], [16]).

Finalement, à la section 5, nous combinons les résultats des sections 3 et 4. Nous supposons seulement l'existence d'une sous- (ou sur-) solution φ, et nous supposons l'existence de surfaces supérieure et inférieure pour (P) définies sur une région de la forme $\{(t, x) : \varphi(t)\leqslant x\leqslant\psi(t)\}$ suffisamment grande. Ces résultats généralisent ceux de Rodriguez et Tineo [17], lesquels considéraient un problème de Dirichlet homogène, et pour lequel ils supposaient que la fonction $\varphi\equiv 0$ est une sous-solution, et supposaient l'existence de surfaces beaucoup plus restrictives que les surfaces supérieure et inférieure introduites dans cet article.

Les résultats seront obtenus via la théorie de la transversalité topologique de Granas (*voir* [5]). L'idée de base pour démontrer l'existence d'une solution de notre problème est simple. Il s'agit de modifier la fonction f

en dehors d'un ensemble de la forme $\mathcal{S}=\{(t, x, p)\in[0, 1]\times\mathbf{R}^2;\ \varphi(t)\leqslant x\leqslant\psi(t),\ s_1(t, x)\leqslant p\leqslant s_0(t, x)\}$ (où s_0 et s_1 correspondent respectivement aux surfaces supérieure et inférieure), et d'obtenir l'existence d'une solution x du problème modifié telle que $(t, x(t), x'(t))\in\mathcal{S}$, et de remarquer que cette solution est en fait une solution du problème original.

1. Préliminaires

Nous noterons par $C^k[0, 1]$, l'espace des fonctions continûment différentiables jusqu'à l'ordre k, $k=0, 1, \ldots$; et l'espace des fonctions intégrables (au sens de Lebesgue) sur $[0, 1]$, par $L^1[0, 1]$. Ces espaces seront munis de leur norme usuelle, respectivement: $\|x\|_k=\max\{\|x\|_0, \ldots, \|x^{(k)}\|_0\}$ où $\|x\|_0=\max\{|x(t)|: t\in[0, 1]\}$; $\|x\|_{L^1}=\int_0^1|x(t)|\,dt$. La classe de toutes les fonctions x dans $C^1[0, 1]$ dont la dérivée x' est absolument continue sera notée $W^{2,1}[0, 1]$. $W_b^{2,1}[0, 1]$ dénotera l'ensemble des fonctions x dans $W^{2,1}[0, 1]$ telles que $x\in\mathcal{B}$ où $\mathcal{B}$ désignera une condition aux limites.

Une *solution* de notre problème est une fonction x dans $W_b^{2,1}[0, 1]$ vérifiant (P). Une fonction $x\in W^{2,1}[0, 1]$ est une *sur-solution* (resp. *sous-solution*) *de* (P) si $x''(t)\leqslant f(t, x(t), x'(t))$ p.p. $t\in[0, 1]$; $a_0x(0)-b_0x'(0)\geqslant\alpha_0$, $a_1x(1)+b_1x'(1)\geqslant\alpha_1$, (resp. $x''(t)\geqslant f(t, x(t), x'(t))$ p.p. $t\in[0, 1]$; $a_0x(0)-b_0x'(0)\leqslant\alpha_0$, $a_1x(1)+b_1x'(1)\leqslant\alpha_1$).

Une fonction $f:[0, 1]\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ sera appelée *de Carathéodory* si elle est telle que $f(., y)$ est mesurable (au sens de Lebesgue) pour tout $y\in\mathbf{R}^2$, $f(t, .)$ est continue presque pour tout $t\in[0, 1]$, et pour tout $k>0$, il existe $h_k\in L^1[0, 1]$ tel qu'on a $|f(t, y)|\leqslant h_k(t)$ p.p. $t\in[0, 1]$ et pour tout $y\in\mathbf{R}^2$ avec $\|y\|\leqslant k$. Nous dirons qu'une fonction $\mathcal{F}: C^1[0, 1]\to L^1[0, 1]$ est *intégrablement bornée sur les bornés*, si, pour tout $k>0$, il existe $h_k\in L^1[0, 1]$ tel que, pour tout $x\in C^1[0, 1]$ avec $\|x\|_1\leqslant k$, on a $|\mathcal{F}(x)(t)|\leqslant h_k(t)$ p.p. $t\in[0, 1]$.

Un domaine $D\subset[0, 1]\times\mathbf{R}$ sera appelé *domaine admissible* s'il existe deux fonctions continues ψ et $\varphi:[0, 1]\to\mathbf{R}$ telles que $\psi(t)\geqslant\varphi(t)$ pour tout $t\in[0, 1]$ et $D=D(\varphi, \psi)=\{(t, x)\in[0, 1]\times\mathbf{R};\ \varphi(t)\leqslant x\leqslant\psi(t)\}$.

Dans la suite, $D=D(\varphi, \psi)$ sera un domaine admissible. Nous introduisons maintenant les notions de surface supérieure et surface inférieure à D pour (P).

1.1. DÉFINITION. — Une surface $S \subset D \times \mathbf{R}$ est une *surface supérieure à D pour* (P) s'il existe deux fonctions $s : D \to [0, \infty)$ et $c \in C^1[0, 1]$ telles que $\varphi \leqslant c \leqslant \psi$ et $S = \{(t, x, s(t, x)); (t, x) \in D\}$, et satisfaisant les conditions suivantes :

(i) $(x - c(t)) f(t, x, p) \geqslant 0$ p.p. $t \in [0, 1]$ et $(t, x, p) \in S$;

(ii) il existe $N \subset [0, 1]$ et $E \subset \mathbf{R}$ deux ensembles négligeables tels que la fonction $x \mapsto s(t, x)$ est continue pour tout $(t, x) \in D \setminus (N \times E)$;

(iii) $c'(t) \leqslant s(t, c(t))$ pour tout $t \in [0, 1]$;

(iv) $s(t_1, x_1) \geqslant s(t_2, x_2)$ (resp. $s(t_1, x_1) \leqslant s(t_2, x_2)$) pour tout $t_1 \leqslant t_2$, $x_1 \leqslant x_2$ tels que (t_1, x_1) et (t_2, x_2) sont dans la même partie connexe de $D^+ = \overline{\{(t, x) \in D; x > c(t)\}}$ (resp. $D^- = \overline{\{(t, x) \in D; x < c(t)\}}$);

(v) $a_0 c(0) \leqslant (\alpha_0 + b_0 s(0, \varphi(0)))$, $a_1 c(1) \geqslant (\alpha_1 - b_1 s(1, \psi(1)))$.

La surface S sera parfois notée $S = (s, c)$.

1.2. DÉFINITION. — Une surface $S \subset D \times \mathbf{R}$ est une *surface inférieure à D pour* (P) s'il existe deux fonctions $s : D \to (-\infty, 0]$ et $c \in C^1[0, 1]$ telles que $\varphi \leqslant c \leqslant \psi$ et $S = \{(t, x, s(t, x)); (t, x) \in D\}$ et satisfaisant les conditions (i)(ii) de la définition (1.1), et

(iii) $c'(t) \geqslant s(t, c(t))$ pour tout $t \in [0, 1]$;

(iv) $s(t_1, x_1) \leqslant s(t_2, x_2)$ (resp. $s(t_1, x_1) \geqslant s(t_2, x_2)$) pour tout $t_1 \geqslant t_2$, $x_1 \leqslant x_2$ tels que (t_1, x_1) et (t_2, x_2) sont dans la même partie connexe de $D^+ = \overline{\{(t, x) \in D : x > c(t)\}}$ (resp. $D^- = \overline{\{(t, x) \in D : x < c(t)\}}$);

(v) $a_0 c(0) \geqslant (\alpha_0 + b_0 s(0, \psi(0)))$, $a_1 c(1) \leqslant (\alpha_1 - b_1 s(1, \varphi(1)))$.

La surface S sera parfois notée $S = (s, c)$.

1.3. REMARQUES. — Si f est de Carathéodory et S est une surface supérieure (resp. inférieure) à D pour (P), sans perte de généralité nous pouvons supposer que

1. S est une surface bornée;

2. $s(t, c(t)) = \limsup_{x \to c(t),\, (t, x) \in D} s(t, x)$
(resp. $s(t, c(t)) = \liminf_{x \to c(t),\, (t, x) \in D} s(t, x)$).

Donnons maintenant une proposition générale dans laquelle la première dérivée d'une solution x du problème aux limites (P) est majorée *a priori*.

1.4. PROPOSITION. — *Soient $S_0 = (s_0, c_0)$ et $S_1 = (s_1, c_1)$ respectivement des surfaces supérieure et inférieure à $D = D(\varphi, \psi)$ pour* (P) *satisfaisant:*

$$(*) \qquad (x - c_0(t)) f(t, x, p) \geqslant 0 \text{ (resp. } (x - c_1(t)) f(t, x, p) \geqslant 0) \text{ p.p. } t \in [0, 1],$$

$(t, x) \in D$, *et* $p \geqslant s_0(t, x)$ (resp. $p \leqslant s_1(t, x)$).
Alors, toute solution x *de* (P) *telle que* $\varphi \leqslant x \leqslant \psi$ *vérifie:*

$$s_1(t, x(t)) \leqslant x'(t) \leqslant s_0(t, x(t)) \quad \textit{pour tout} \quad t \in \operatorname{supp}(\psi - \varphi).$$

Preuve. — Soit x une solution de (P) telle que $(t, x(t)) \in D$ pour tout $t \in [0, 1]$. Montrons que $x'(t) \leqslant s_0(t, x(t))$ pour tout $t \in \operatorname{supp}(\psi - \varphi)$; l'autre inégalité se démontrant analoguement.

Supposons qu'il existe $\tau \in \operatorname{supp}(\psi - \varphi)$ tel que $x'(\tau) > s_0(\tau, x(\tau))$. Alors, vu la définition (1.1), un des deux énoncés suivants est vérifié:

(*a*) $x(\tau) \geqslant c_0(\tau)$, et il existe $\delta > 0$ tel que $x(t) > c_0(t)$ pour tout $t \in (\tau, \tau + \delta)$;

(*b*) $x(\tau) \leqslant c_0(\tau)$, et il existe $\delta > 0$ tel que $x(t) < c_0(t)$ pour tout $t \in (\tau - \delta, \tau)$.

Sinon, $x(\tau) = c_0(\tau)$ et $x'(\tau) \leqslant c_0'(\tau)$. Or $c_0'(\tau) \leqslant s_0(\tau, c_0(\tau))$. Contradiction.

Si (*a*) a lieu, il existe $\eta > \tau$ tel que $x(t) > c_0(t)$, $x'(t) > s_0(t, x(t))$ pour tout $t \in (\tau, \eta)$ et $x'(\eta) \leqslant s_0(\eta, x(\eta))$ par (iii) (iv) (v) de la définition (1.1). Donc, vu l'hypothèse (*), $f(t, x(t), x'(t)) \geqslant 0$ p.p. $t \in (\tau, \eta)$. Or $s_0(\eta, x(\eta)) \leqslant s_0(\tau, x(\tau))$, d'où

$$0 > x'(\eta) - x'(\tau) = \int_\tau^\eta x''(t)\, dt = \int_\tau^\eta f(t, x(t), x'(t))\, dt.$$

On aboutit à une contradiction. De même, si (*b*) a lieu, on aboutit à une contradiction. □

Dans un but de référence, nous énonçons les trois résultats suivants:

1.5. Lemme [2]. — *Soient* $x : [0, 1] \to \mathbf{R}$ *une fonction absolument continue et* $\mathcal{O} \subset [0, 1]$ *un ensemble mesurable tel que* $x(\mathcal{O})$ *est négligeable.*

Alors $x'(t) = 0$ p.p. $t \in \mathcal{O}$.

1.6. Lemme (principe du maximum). — *Soit* $x \in W^{2,1}[0, 1]$ *satisfaisant une des deux conditions suivantes:*

(i) $x''(t) \geqslant 0$ p.p. $t \in [0, 1]$; $x(0) - b_0 x'(0) \leqslant 0$, $x(1) + b_1 x'(1) \leqslant 0$; $b_i \geqslant 0$, $i = 0, 1$;

(ii) $x''(t) - x(t) \geqslant 0$ p.p. $t \in [0, 1]$; $a_0 x(0) - b_0 x'(0) \leqslant 0$, $a_1 x(1) + b_1 x'(1) \leqslant 0$; $a_i, b_i \geqslant 0$; $a_i + b_i > 0$, $i = 0, 1$.

Alors $x(t) \leqslant 0$ *pour tout* $t \in [0, 1]$.

Nous énonçons un corollaire du théorème de la transversalité topologique de A. GRANAS [5] que nous utiliserons pour déduire l'existence d'une solution.

Soient X un espace de Banach, et U un ouvert dans X. Notons ∂U la frontière de U.

1.7. THÉORÈME. — *Soient* $H:[0, 1]\times \bar{U} \to X$ *une application continue et compacte telle que* $H(\lambda, u)\neq u$ *pour tout* $(\lambda, u)\in[0, 1]\times\partial U$, *et* $H(0, \bar{U})=u_0$ *où* $u_0\in U$.

Alors $H(\lambda, .)$ *a un point fixe pour tout* $\lambda\in[0, 1]$.

2. Théorèmes généraux d'existence

Nous donnons deux théorèmes généraux d'existence de solutions d'un problème aux limites, lesquels réduisent l'existence d'une solution à l'existence d'une famille opportune de problèmes et à la majoration *a priori* de leurs solutions.

Soit $\mathscr{B}$ la condition aux limites introduite précédemment, pour certaines valeurs particulières de a_i, b_i, nous aurons les conditions aux limites suivantes :

$$(2.1)\qquad \begin{cases} x(0)-b_0\,x'(0)=\alpha_0; \\ x(1)+b_1\,x'(1)=\alpha_1; \qquad b_i\geqslant 0, \quad i=0, 1. \end{cases}$$

$$(2.2)\qquad \begin{cases} a_0\,x(0)-b_0\,x'(0)=\alpha_0; \\ a_1\,x(1)+b_1\,x'(1)=\alpha_1; \\ a_i,\ b_i\geqslant 0, \quad a_i+b_i>0, \quad i=0, 1, \quad a_0\,a_1=0. \end{cases}$$

2.1. THÉORÈME. — *Soit une famille d'opérateur* $\mathscr{T}_\gamma: C^1[0, 1]\to L^1[0, 1]$ *continus en* $(\gamma, x)\in[0, 1]\times C^1[0, 1]$ *et intégrablement bornés sur les bornés indépendamment de* $\gamma\in[0, 1]$. *Supposons que* $\mathscr{T}_0\equiv 0$ *et qu'il existe une constante k telle que* $\|x\|_1<k$ *pour toute solution x de* $(2.3)_\gamma$ *avec* $\gamma\in[0, 1]$, *où*

$$(2.3)_\gamma\qquad \begin{cases} x''=\mathscr{T}_\gamma(x) \\ x\in\mathscr{B} \end{cases}$$

et où $\mathscr{B}$ *désigne la condition aux limites* (2.1).

Alors le problème $(2.3)_\gamma$ *a au moins une solution dans* $W^{2,1}[0, 1]$ *pour tout* $\gamma \in [0, 1]$.

Preuve. — Une solution du problème $(2.3)_\gamma$ est une fonction x dans $C^1[0, 1]$ dont la dérivée seconde $x'' = \mathscr{T}(x) \in L^1[0, 1]$ et satisfaisant la condition aux limites (2.1); d'où $x \in W_{\bar{b}}^{2,1}[0, 1]$. Transformons notre famille de problèmes en problèmes de point fixe. Considérons l'opérateur $H: [0, 1] \times \bar{B} \to C^1[0, 1]$ défini par $H(\gamma, x) = j \circ L^{-1} \circ \mathscr{T}_\gamma(x)$ où $\bar{B} = \{x \in C^1[0, 1]; \|x\|_1 \leqslant k\}$, L est l'opérateur inversible de $W_{\bar{b}}^{2,1}[0, 1]$ dans $L^1[0, 1]$ défini par: $Lx = x''$ et j est l'inclusion de $W_{\bar{b}}^{2,1}[0, 1]$ dans $C^1[0, 1]$. En utilisant le théorème d'Arzela-Ascoli et le fait que $\mathscr{T}_\gamma$ sont intégrablement bornés sur les bornés indépendamment de γ, on vérifie que H est compact. De plus, $H(0, .) \equiv x_0$ où $x_0 = L^{-1}(0)$. D'autre part, les points fixes de $H(\gamma, .)$ sont des solutions de $(2.3)_\gamma$; d'où $H(\gamma, .)$ est sans point fixe sur ∂B. On applique le théorème (1.7) et on déduit l'existence d'un point fixe pour $H(\gamma, .)$ et par conséquent d'une solution du problème $(2.3)_\gamma$. □

Si $\mathscr{B}$ désigne la condition aux limites (2.2), l'opérateur L défini précédemment n'est pas toujours inversible. Cependant, l'opérateur $\tilde{L}x = x'' - x$ l'est. On prouve analoguement le théorème suivant:

2.2. THÉORÈME. — *Soit une famille d'opérateurs* $\mathscr{T}_\gamma: C^1[0, 1] \to L^1[0, 1]$ *continus en* $(\gamma, x) \in [0, 1] \times C^1[0, 1]$ *et intégrablement bornés sur les bornés indépendamment de* $\gamma \in [0, 1]$. *Supposons que* $\mathscr{T}_0 \equiv 0$ *et qu'il existe une constante k telle que* $\|x\|_1 < k$ *pour toute solution x de* $(2.4)_\gamma$ *avec* $\gamma \in [0, 1]$, *où*

$$(2.4)_\gamma \qquad \begin{cases} x'' - x = \mathscr{T}_\gamma(x) \\ x \in \mathscr{B} \end{cases}$$

et où $\mathscr{B}$ *désigne la condition aux limites* (2.2).

Alors le problème $(2.4)_\gamma$ *a au moins une solution dans* $W^{2,1}[0, 1]$ *pour tout* $\gamma \in [0, 1]$.

3. Avec hypothèse d'existence de sur- et sous-solutions

3.1 Résultat principal

Nous énonçons maintenant notre résultat principal. La preuve sera donnée au paragraphe (3.14). Nous en donnons aussi quelques corollaires.

3.1. THÉORÈME. — *Soit* $f:[0, 1]\times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *une fonction de Carathéodory satisfaisant les hypothèses suivantes:*
(H 3.1) *il existe* ψ *et* φ *dans* $W^{2,1}[0, 1]$ *respectivement sur- et sous-solutions de* (P) *telles que* $\psi \geqslant \varphi$;
(H 3.2) *il existe* S_0 *et* S_1 *respectivement surfaces supérieure et inférieure à* $D=D(\varphi, \psi)=\{(t, x)\in[0, 1]\times \mathbf{R};\ \varphi(t)\leqslant x\leqslant \psi(t)\}$ *pour* (P).

Alors le problème (P) *possède une solution* $x\in W^{2,1}[0, 1]$ *telle que* $\varphi(t)\leqslant x(t)\leqslant \psi(t)$ *pour* $t\in[0, 1]$, *et* $s_1(t, x(t))\leqslant x'(t)\leqslant s_0(t, x(t))$ *pour* $t\in \operatorname{supp}(\psi-\varphi)$.

3.2. COROLLAIRE. — *Supposons que* $f:[0, 1]\times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *est une fonction de Carathéodory et que les hypothèses suivantes sont satisfaites:*

(i) *il existe* $M_0\geqslant M_1$ *des constantes telles que* $a_i M_0\geqslant \alpha_i\geqslant a_i M_1$, $i=0, 1$; *et* $f(t, M_0, 0)\geqslant 0\geqslant f(t, M_1, 0)$ p.p. $t\in[0, 1]$;

(ii) *il existe des constantes* $s_0\geqslant 0\geqslant s_1$ *et des fonctions de classe* C^1

$c_0, c_1:[0, 1]\to[M_1, M_0]$ *telles que* $a_0 c_0(0)-b_0 s_0\leqslant \alpha_0\leqslant a_0 c_1(0)-b_0 s_1$, $a_1 c_0(1)+b_1 s_0\geqslant \alpha_1\geqslant a_1 c_1(1)+b_1 s_1$; $c_0'(t)\leqslant s_0$, $c_1'(t)\geqslant s_1$, $t\in[0, 1]$; *et* $(x-c_i(t))f(t, x, s_i)\geqslant 0$ *pour* $x\in[M_1, M_0]$ *et* p.p. $t\in[0, 1]$, $i=0, 1$.

Alors le problème (P) *a une solution.*

3.3. COROLLAIRE. — *Soit* $f:[0, 1]\times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *une fonction de Carathéodory et supposons qu'il existe une constante* $M\geqslant 0$ *et deux fonctions décroissantes* $-s_1$ *et* $s_0:[0, M]\to[0, \infty)$ *telles que* $f(t, x, s_i(x))\geqslant 0$ *pour tout* $x\in[0, M]$ *et* p.p. $t\in[0, 1]$. *Si* $f(t, 0, 0)\leqslant 0\leqslant f(t, M, 0)$, *alors le problème suivant possède une solution:* $x''(t)=f(t, x(t), x'(t))$ p.p. $t\in[0, 1]$, $x(0)=x(1)=0$.

3.4. COROLLAIRE. — *Supposons que* $f:[0, 1]\times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *est une fonction de Carathéodory et que les hypothèses suivantes sont satisfaites:*

(i) *il existe* $M_0\geqslant M_1$ *des constantes telles que* $f(t, M_0, 0)\geqslant 0\geqslant f(t, M_1, 0)$ p.p. $t\in[0, 1]$;

(ii) *il existe des constantes* $s_0\geqslant 0\geqslant s_1$ *telles que pour* $i=0, 1$, $f(t, x, s_i)\geqslant 0$ *ou* $f(t, x, s_i)\leqslant 0$ p.p. $t\in[0, 1]$, $M_1\leqslant x\leqslant M_0$.

Alors le problème $x''(t)=f(t, x(t), x'(t))$ p.p. $t\in[0, 1]$, $x'(0)=x'(1)=0$ *possède une solution.*

3.5. Corollaire (problème de type Nirenberg (*voir* [16])). — *Supposons que* α, $\beta : [0, 1] \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *sont des fonctions continues telles que:*

(i) $\alpha(t, x, p) > 0$ *pour tout* $(t, x, p) \in [0, 1] \times \mathbf{R}^2$;

(ii) *il existe* $M > 0$ *tel que* $(|\beta(t, x, 0)|/x\alpha(t, x, 0)) < 1$, *pour tout* $|x| > M$;

(iii) $|\beta(t, x, p)| \to \infty$ *et* $(\alpha(t, x, p)/|\beta(t, x, p)| \to 0$, *lorsque* $p \to \infty$, *uniformément pour* $(t, x) \in [0, 1] \times [-M, M]$.

Alors le problème suivant possède une solution:

$$\begin{cases} x''(t) = x(t)\alpha(t, x(t), x'(t)) - \beta(t, x(t), x'(t)), & t \in [0, 1] \\ x'(0) = x'(1) = 0. \end{cases}$$

3.6. Exemples. — Les problèmes suivants ont une solution.

$$(1) \qquad \begin{cases} x''(t) = (x(t) + t + x'(t)^2 - 4)e^{x'(t)} \\ x'(0) = x'(1) = 0. \end{cases}$$

En effet, $f(t, x, p) = (x + t + p^2 - 4)e^p$, et $M_0 = 4$, $M_1 = 3$, $s_0 = 2$, $s_1 = -2$, satisfont les hypothèses du corollaire (3.4).

$$(2) \qquad \begin{cases} x''(t) = k(2t-1)^{-1/3}[x'(t)^2 + x(t)^2 - 1] \\ x(0) = x(1) = 0. \end{cases}$$

En effet, $f(t, x, p) = k(2t-1)^{-1/3}[p^2 + x^2 - 1]$ et $\psi(t) = 1 = -\varphi(t)$, $c_0(t) = c_1(t) = 0$, $s_0(t, x) = -s_1(t, x) = \sqrt{1 - x^2}$ satisfont les hypothèses du théorème (3.1).

$$(3) \qquad \begin{cases} x''(t) = (x'(t) - 1 + tx(t) + x(t))(x'(t) + 2)^n \\ x(0) = 0,\ x(1) = -1. \end{cases}$$

où $n \in \mathbf{N}$.

En posant $\psi(t) = 1 = -\varphi(t)$, $c_1(t) = -t$, $s_1(t, x) = -2$, $c_0(t) = 0$ et

$$s_0(t, x) = \begin{cases} 1 - tx, & \text{si } x \geqslant 0 \\ 1 - tx + x, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

on vérifie que les hypothèses du théorème (3.1) sont satisfaites.

Remarquons que ces fonctions ne satisfont pas de condition de croissance de type Bernstein-Nagumo.

L'idée de base de la démonstration du théorème (3.1) est de construire des fonctions f_λ, $\lambda \in [0, 1]$, telles que $f_\lambda = \lambda f$ sur $\{(t, x, p) : \varphi(t) \leqslant x \leqslant \psi(t)$ et $s_1(t, x) \leqslant p \leqslant s_0(t, x)\}$, et de les définir à l'extérieur de cet ensemble de façon à pouvoir obtenir une majoration *a priori* des solutions de nouvelles familles de problèmes que nous considérerons. Ensuite, pour tout $\varepsilon \in (0,1)$, nous définirons des nouvelles fonctions f_λ^ε qui seront une légère modification des fonctions f_λ, et nous considérons les familles de problèmes: $x''(t) = f_\lambda^\varepsilon(t, x(t), x'(t))$, $x \in \mathscr{B}$. Pour ces familles de problèmes, nous obtiendrons une solution x_λ^ε. Finalement, nous montrerons que lorsque $\varepsilon \to 0$, la suite $\{x_1^\varepsilon\}$ converge vers une solution de notre problème original (P). Définissons d'abord ces familles de fonctions.

3.2. Familles de fonctions

Remarquons d'abord que, par hypothèse, nous avons $f(t, x, p) \geqslant \psi''(t)$ p.p. t sur $\{(t, x, p); x = \psi(t)$ et $p = \psi'(t)\}$ (resp. $f(t, x, p) \leqslant \varphi''(t)$ p.p. t sur $\{(t, x, p); x = \varphi(t)$ et $p = \varphi'(t)\}$) et $(x - c_i(t)) f(t, x, p) \geqslant 0$ p.p. t sur $\{(t, x, p); \varphi(t) \leqslant x \leqslant \psi(t)$ et $p = s_i(t, x)\}$, $i = 0, 1$.

Nous allons d'abord construire des fonctions f_λ, $\lambda \in [0, 1]$, telles que :

(i) $f_\lambda(t, x, p) = \lambda f(t, x, p)$ sur $\{(t, x, p); \varphi(t) \leqslant x \leqslant \psi(t)$ et $s_1(t, x) \leqslant p \leqslant s_0(t, x)\}$;

(ii) $f_\lambda(t, x, p) \geqslant \psi''(t)$ sur $\{(t, x, p); x > \psi(t)\}$

(resp. $f_\lambda(t, x, p) \leqslant \varphi''(t)$ sur $\{(t, x, p); x < \varphi(t)\}$);

(iii) $(x - c_0(t)) f_\lambda(t, x, p) \geqslant 0$ sur $\{(t, x, p); \varphi(t) \leqslant x \leqslant \psi(t)$ et $p \geqslant s_0(t, x)\}$

(resp. $(x - c_1(t)) f_\lambda(t, x, p) \geqslant 0$ sur $\{(t, x, p); \varphi(t) \leqslant x \leqslant \psi(t)$ et $p \leqslant s_1(t, x)\}$).

Pour simplifier l'écriture, notons les régions suivantes dans $[0, 1] \times \mathbf{R}^2$:

$R = \{(t, x, p) \in \operatorname{supp}(\psi - \varphi) \times \mathbf{R}^2; (t, x) \in D, s_1(t, x) < p < s_0(t, x)\}$;

$R_0 = \{(t, x, p) \in \operatorname{supp}(\psi - \varphi) \times \mathbf{R}^2; (t, x) \in D, p \geqslant s_0(t, x)\}$;

$R_1 = \{(t, x, p) \in \operatorname{supp}(\psi - \varphi) \times \mathbf{R}^2; (\mathrm{t}, \mathrm{x}) \in \mathrm{D}, \mathrm{p} \leqslant \mathrm{s}_1(\mathrm{t}, \mathrm{x})\}$;

$R_2 = \{(t, x, p) \in \operatorname{supp}(\psi - \varphi) \times \mathbf{R}^2; x > \psi(t)\}$;

$R_3 = \{(t, x, p) \in \operatorname{supp}(\psi - \varphi) \times \mathbf{R}^2; x < \varphi(t)\}$;

$R_4 = \{(t, x, p) \in [0, 1] \times \mathbf{R}^2; t \notin \operatorname{supp}(\psi - \varphi)\}$.

Pour $\lambda \in [0, 1]$, définissons les fonctions $f_\lambda : [0, 1] \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ par :

$$f_\lambda(t, x, p) = \begin{cases} \psi''(t), & \text{si } \ t \notin \operatorname{supp}(\psi - \varphi); \\ \lambda f(t, \psi(t), s_i(t, \psi(t))), & \text{si } \ (t, x, p) \in R_2, \\ (t, \psi(t), \psi'(t)) \in R_i, \ \ (i = 0, 1), \ \psi''(t) \leqslant 0; & \\ \max\{\lambda f(t, \psi(t), p), \psi''(t)\}, & \text{si } \ (t, x, p) \in R_2, \\ (t, \psi(t), \psi'(t)) \notin R_0 \cup R_1 \ \ \text{ou } \ \psi''(t) > 0; & \\ \lambda f(t, \varphi(t), s_i(t, \varphi(t))), & \text{si } \ (t, x, p) \in R_3, \\ (t, \varphi(t), \varphi'(t)) \in R_i, \ \ (i = 0, 1), \ \varphi''(t) \geqslant 0; & \\ \min\{\lambda f(t, \varphi(t), p), \varphi, \varphi''(t)\}, & \text{si } \ (t, x, p) \in R_3, \\ (\mathrm{t}, \varphi(t), \varphi'(t)) \notin R_0 \cup R_1 \ \ \text{ou } \ \varphi''(t) < 0; & \\ \lambda f(t, x, s_i(t, x)), & \text{si } \ (t, x, p) \in R_i, \ \ i = 0, 1; \\ \lambda f(t, x, p), & \text{si } \ (t, x, p) \in R. \end{cases}$$

3.7. LEMME. — *Soient* e_ψ *et* e_φ : $\operatorname{supp}(\psi - \varphi) \to (0, \infty)$ *deux fonctions mesurables telles que* $|s_i(t, \psi(t)) - \psi'(t)| > e_\psi(t)$ *si* $(t, \psi(t), \psi'(t)) \notin R_i$ *et* $|s_i(t, \varphi(t)) - \varphi'(t)| > e_\varphi(t)$ *si* $(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \notin R_i$, $i = 0, 1$.

Alors il existe deux fonctions mesurables v_ψ *et* v_φ : $\operatorname{supp}(\psi - \varphi) \to [0, \infty)$ *telles que :*

(*a*) $\varphi(t) \leqslant \varphi(t) + v_\varphi(t) \leqslant \psi(t) - v_\psi(t) \leqslant \psi(t)$, *les inégalités sont strictes si* $\psi(t) > \varphi(t)$;

(*b*) $\psi(t) - v_\psi(t) > c_i(t)$ *si* $\psi(t) - c_i(t) > 0$, $\varphi(t) + v_\varphi(t) < c_i(t)$ *si* $c_i(t) - \varphi(t) > 0$;

(*c*) p. p. $t \in \operatorname{supp}(\psi - \varphi)$ *tel que* $(t, \psi(t), \psi'(t)) \notin R_i$, *on a* $|s_i(t, x) - \psi'(t)| > e_\psi(t)$ *pour tout* $x \in [\psi(t) - v_\psi(t), \psi(t)]$; *et* p. p. $t \in \operatorname{supp}(\psi - \varphi)$ *tel que* $(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \notin R_i$, *on a* $|s_i(t, x) - \varphi'(t)| > e_\varphi(t)$ *pour tout* $x \in [\varphi(t), \varphi(t) + v_\varphi(t)]$.

Pour la démonstration, on utilise les définitions (1.1) et (1.2), et la remarque (1.3, 2) (*voir* [7]).

Pour $\lambda\in[0, 1]$ et $\varepsilon\in(0, 1)$, définissons les fonctions $f_\lambda^\varepsilon:[0, 1]\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ par :

$$
f_\lambda^\varepsilon(t, x, p) = \begin{cases}
(\gamma\wedge\delta)\max\{\lambda f(t, \psi(t, \psi(t), p), \psi''(t)\}+(1-(\gamma\wedge\delta))f_\lambda(t, x, p), \\
\qquad \text{si} \quad \psi(t)>\varphi(t), \quad \psi''(t)>0, \\
\qquad x=\delta\psi(t)+(1-\delta)(\psi(t)-\varepsilon v_\psi(t)), \\
\qquad |p-\psi'(t)|=(1-\gamma)e_\psi(t); \qquad \delta, \gamma\in[0, 1]; \\
(\gamma\wedge\delta)\min\{\lambda f(t, \varphi(t), \varphi''(t)\}+(1-(\gamma\wedge\delta))f_\lambda(t, x, p), \\
\qquad \text{si} \quad \psi(t)>\varphi(t), \quad \varphi''(t)<0, \\
\qquad x=\delta\varphi(t)+(1-\delta)(\varphi(t)+\varepsilon v_\varphi(t)), \\
\qquad |p-\varphi'(t)|=(1-\gamma)e_\varphi(t); \qquad \delta, \gamma\in[0, 1]; \\
\qquad f_\lambda(t, x, p), \qquad \text{ailleurs};
\end{cases}
$$

(où $\gamma\wedge\delta=\min\{\gamma, \delta\}$).

3.8. Proposition. — *Supposons que les hypothèses du théorème* (3.1) *sont satisfaites. Alors, pour tout* $\varepsilon\in(0, 1)$ *et* $\lambda\in[0, 1]$, *les opérateurs* $\mathscr{F}_\lambda^\varepsilon: C^1[0, 1]\to L^1[0, 1]$ *définis par :* $\mathscr{F}_\lambda^\varepsilon(x)(t)=f_\lambda^\varepsilon(t, x(t), x'(t))$ *sont bien définis, continus et intégrablement bornés sur les bornés indépendamment de* λ *et* ε.

Preuve. — Les opérateurs $\mathscr{F}_\lambda^\varepsilon$ sont bien définis car f est de Carathéodory et s_0, s_1 satisfont les conditions (ii), (iv) des définitions (1.1) et (1.2) respectivement. Il est clair que $\mathscr{F}_\lambda^\varepsilon$ sont intégrablement bornés sur les bornés indépendamment de $\lambda\in[0, 1]$ et $\varepsilon\in(0, 1)$. D'où, pour montrer la continuité de $\mathscr{F}_\lambda^\varepsilon$, il suffit de montrer que pour toutes suites de fonctions $\{x_n\}$ convergent vers x dans $C^1[0, 1]$, on a

$$
(3.1) \qquad f_\lambda^\varepsilon(t, x_n(t), x_n'(t))\to f_\lambda^\varepsilon(t, x(t), x'(t)) \qquad \text{p.p.}
$$

Puisque f est de Carathéodory, nous avons

$$
(3.2) \qquad f(t, x_n(t), x_n'(t))\to f(t, x(t), x'(t)), \qquad \text{p.p. } t\in[0, 1].
$$

Il est clair que l'équation (3.1) a lieu sur

$$
\{t\in[0, 1]; (t, x(t), x'(t))\in R_2\cup R_3\cup R_4\}.
$$

Notons $E = E_0 \cup E_1$ où E_0 (resp. E_1) est l'ensemble négligeable donné en (ii) de la définition (1.1) (resp. (1.2)). Remarquons que p. p. dans

$$\{t \in [0, 1] : (t, x(t), x'(t)) \in R \cup R_0 \cup R_1,\ x(t) \notin E\},$$
$$s_i(t, y) \to s_i(t, x(t)) \qquad \text{lorsque} \quad y \to x(t).$$

Et p. p. dans $\{t \in [0, 1] : (t, x(t), x'(t)) \in R \cup R_0 \cup R_1,\ x(t) \in E\}$, $x'(t) = 0$, vu le lemme (1.5); d'où s'il existe une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ telle que $(t, x_{n_k}(t), x'_{n_k}(t)) \in R_i$, on déduit que $s_i(t, x_{n_k}(t)) \to x'(t) = 0$. Remarquons aussi que p. p. sur

$$\{t \in \operatorname{supp}(\psi - \varphi);\ x(t) = \psi(t)\,(\text{resp. } \varphi(t))\}, \qquad x'(t) = \psi'(t)\,(\text{resp. } \varphi'(t)).$$

On conclut que l'équation (3.1) a lieu sur

$$\{t \in [0, 1];\ (t, x(t), x'(t)) \in R \cup R_0 \cup R_1\},$$

en utilisant les remarques précédentes, la condition (i) des définitions (1.1) et (1.2) et le fait que ψ et φ sont respectivement sur- et sous-solutions de (P). Ce qui termine la démonstration. □

3.9. Remarques. — 1. Sans hypothèse additionnelle, nous ne pouvons pas montrer que les opérateurs $\mathscr{F}_\lambda(x)(t) = f_\lambda(t, x(t), x'(t))$ sont continus; c'est pourquoi nous avons introduit les fonctions f_λ^ε.

2. Lorsque $\psi''(t) \leqslant 0 \leqslant \varphi''(t)$, $f_\lambda^\varepsilon = f_\lambda$ pour tout $\varepsilon \in (0, 1)$.

Pour $\varepsilon \in (0, 1)$ et $\lambda \in [0, 1]$, définissons les fonctions $g_\lambda^\varepsilon : [0, 1] \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ par :

$$g_\lambda^\varepsilon(t, x, p) = \begin{cases} f_\lambda^\varepsilon(t, x, p) - \psi(t), & \text{si} \quad x > \psi(t) \\ f_\lambda^\varepsilon(t, x, p) - x, & \text{si} \quad \varphi(t) \leqslant x \leqslant \psi(t) \\ f_\lambda^\varepsilon(t, x, p) - \varphi(t), & \text{si} \quad x < \varphi(t) \end{cases}$$

3.10. Corollaire. — *Sous les hypothèses du théorème* (3.1), *les opérateurs* $\mathscr{G}_\lambda^\varepsilon : C^1[0, 1] \to L^1[0, 1]$ *définis par :* $\mathscr{G}_\lambda^\varepsilon(x)(t) = \mathscr{G}^\varepsilon(t, x(t), x'(t))$ *sont bien définis, continus et intégrablement bornés sur les bornés indépendamment de* $\varepsilon \in (0, 1)$ *et* $\lambda \in [0, 1]$.

3.3. Majoration *a priori* des solutions

Considérons maintenant les familles de problèmes suivants :

$$(\mathrm{P})_\lambda^\varepsilon \qquad \begin{cases} x''(t)=f_\lambda^\varepsilon(t,\, x(t),\, x'(t)) & \text{p. p. } t\in[0,\, 1] \\ x\in\mathscr{B} \end{cases}$$

$$(\tilde{\mathrm{P}})_\lambda^\varepsilon \qquad \begin{cases} x''(t)-x(t)=g_\lambda^\varepsilon(t,\, x(t),\, x'(t)) & \text{p. p. } t\in[0,\, 1] \\ x\in\mathscr{B} \end{cases}$$

où $\varepsilon\in(0,\, 1)$ et $\lambda\in[0,\, 1]$.

3.11. Remarque. — Si x est une solution du problème $(\tilde{\mathrm{P}})_\lambda^\varepsilon$ telle que $\varphi(t)\leqslant x(t)\leqslant\psi(t)$, alors x est une solution du problème $(\mathrm{P})_\lambda^\varepsilon$.

Nous allons maintenant majorer *a priori* les solutions de $(\mathrm{P})_\lambda^\varepsilon$ et $(\tilde{\mathrm{P}})_\lambda^\varepsilon$ pour $\varepsilon\in(0,\, 1)$ et $\lambda\in[0,\, 1]$ et pour certaines conditions aux limites.

3.12. Lemme (majoration *a priori* des solutions). — *Supposons que les hypothèses du théorème* (3.1) *sont satisfaites. Alors, si* $\mathscr{B}$ *désigne la condition aux limites* (2.1) (resp. (2.2)), *les solutions* x *des problèmes* $(\mathrm{P})_\lambda^\varepsilon$ (resp. $(\tilde{\mathrm{P}})_\lambda^\varepsilon$) *pour* $\varepsilon\in(0,\, 1)$ *et* $\lambda\in[0,\, 1]$ *sont telles que :*

(*a*) $\varphi(t)\leqslant x(t)\leqslant\psi(t)$ *pour tout* $t\in[0,\, 1]$;

(*b*) $s_1(t,\, x(t))\leqslant x'(t)\leqslant s_0(t,\, x(t))$ *pour tout* $t\in\operatorname{supp}(\psi-\varphi)$.

Preuve. — (*a*) Supposons que $\mathscr{B}$ désigne la condition aux limites (2.1) et soit $x\in\mathrm{W}^{2,\,1}[0,\, 1]$ une solution de $(\mathrm{P})_\lambda^\varepsilon$. Presque partout sur $\{t\in[0,\, 1];\, x(t)>\psi(t)\}$, on a $x''(t)\geqslant\psi''(t)$. Vu le lemme (1.6), (i) et les conditions aux limites sur x et ψ, on obtient $x(t)\leqslant\psi(t)$ pour tout $t\in[0,\, 1]$. L'autre inégalité se démontre analoguement.

Si $\mathscr{B}$ désigne la condition aux limites (2.2), en utilisant le lemme (1.6), (ii) et en procédant comme précédemment, on obtient la conclusion.

(*b*) Pour déduire l'affirmation (*b*), il suffit de montrer que $(x-c_i(t))f_\lambda^\varepsilon(t,\, x,\, p)\geqslant 0$ pour $(t,\, x,\, p)\in R_i\, (i=0,\, 1)$, et d'appliquer la proposition (1.4) et la remarque (3.11).

Remarquons que $(x-c_i(t))f_\lambda(t,\, x,\, p)\geqslant 0$ pour $(t,\, x,\, p)\in R_i\,(i=0,\, 1)$. Montrons que $(x-c_i(t))\max\{\lambda f(t,\, \psi(t),\, p),\, \psi''(t)\}\geqslant 0$ si $(t,\, x,\, p)\in R_i$, $\psi(t)>\varphi(t)$, $\psi''(t)>0$, $x=\delta\psi(t)+(1-\delta)(\psi(t)-\varepsilon v_\psi(t))$, $|p-\psi'(t)|=(1-\gamma)e_\psi(t)$; $\delta,\ \gamma\in[0,\, 1]$. Il suffit de remarquer que $x\geqslant c_i(t)$, car $\max\{\lambda f(t,\, \psi(t),\, p),\, \psi''(t)\}\geqslant\psi''(t)\geqslant 0$. En effet, si $\psi(t)>c_i(t)$, alors

$x \geqslant c_i(t)$, par (*b*) du lemme (3.7). D'autre part, si $\psi(t)=c_i(t)$, on a $\psi'(t)=c_i'(t)$ p. p. Si $\psi'(t)=s_i(t, \psi(t))$, alors

$$0<\psi''(t) \leqslant f(t, \psi(t), \psi'(t))=f(t, \psi(t), s_i(t, \psi(t))) \leqslant 0;$$

contradiction. Si $\psi'(t) \neq s_i(t, \psi(t))$, puisque $(t, x, p) \in R_i$, on a $|p-\psi'(t)| \geqslant |s_i(t, x)-\psi'(t)|>e_\psi(t)$ par (*c*) du lemme (3.7). Or $|p-\psi'(t)|=(1-\gamma) e_\psi(t)$, contradiction.

Analoguement on montre que $(x-c_i(t)) \min \{\lambda f(t, \varphi(t), p), \varphi''(t)\} \geqslant 0$ si $(t, x, p) \in R_i$, $\psi(t)>\varphi(t)$, $\varphi''(t)<0$, $x=\delta \varphi(t)+(1-\delta)(\varphi(t)+\varepsilon v_\varphi(t))$, $|p-\varphi'(t)|=(1-\gamma) e_\varphi(t)$; δ, $\gamma \in[0, 1]$. Ce qui termine la preuve. □

3.4. Preuve du résultat principal

Le lemme suivant nous permettra de déduire l'existence d'une solution du problème (P) à partir de solutions des problèmes $(\mathrm{P})_1^{\varepsilon}$ ou $(\tilde{\mathrm{P}})_1^{\varepsilon}$ pour $\varepsilon \in(0, 1)$.

3.13. LEMME. — *Supposons que les hypothèses du théorème* (3.1) *sont satisfaites et qu'il existe* $0<\varepsilon_n<1$ *convergent vers* 0, *et* x_n *dans* $W^{2,1}[0, 1]$ *solutions de* $(\mathrm{P})_1^{\varepsilon_n}$ (resp. $(\tilde{\mathrm{P}})_1^{\varepsilon_n}$) *où* $\mathscr{B}$ *désigne la condition aux limites* (2.1) (resp. (2.2)). *Alors, le problème* (P) *a une solution.*

Preuve. — Par le lemme précédent, $\varphi(t) \leqslant x_n(t) \leqslant \psi(t)$, $t \in[0, 1]$ et $s_1(t, x_n(t)) \leqslant x_n'(t) \leqslant s_0(t, x_n(t))$ pour tout $t \in \operatorname{supp}(\psi-\varphi)$, d'où la suite $\{x_n\}$ est bornée dans $C^1[0, 1]$. Et il existe $h \in L^1[0, 1]$ telle que $|x_n''(t)| \leqslant h(t)$ p. p. $t \in[0, 1]$ par la proposition (3.8). En utilisant le théorème d'Arzela-Ascoli, on déduit l'existence de x dans $C^1[0, 1]$ et d'une sous-suite encore notée $\{x_n\}$ telles que $x_n \rightarrow x$ dans $C^1[0, 1]$. Trivialement, $x \in \mathscr{B}$ et $\varphi(t) \leqslant x(t) \leqslant \psi(t)$.

Pour montrer que x est une solution de (P), il suffit de montrer que, pour presque tout $t \in[0, 1]$,

$$f_1^{\varepsilon_n}(t, x_n(t), x_n'(t)) \rightarrow f(t, x(t), x'(t)). \tag{3.3}$$

La thèse suit par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue.

Rappelons d'abord que l'équation (3.2) a lieu. Il est clair que (3.3) a lieu presque partout sur $\{t \in[0, 1] ; \psi(t)>x(t)>\varphi(t)\}$. En effet, pour t

dans cet ensemble et pour n suffisamment grand,

$$\varphi(t)+\varepsilon_n v_\varphi(t) \leqslant x_n(t) \leqslant \psi(t)-\varepsilon_n v_\psi(t),$$

d'où

$$f_1^{\varepsilon_n}(t, x_n(t), x_n'(t))=f(t, x_n(t), x_n'(t)).$$

La conclusion découle de (3.2). D'autre part, presque partout sur $\{t \in \operatorname{supp}(\psi-\varphi);\ x(t)=\psi(t)\}$, l'équation (3.3) a lieu puisque, presque pour tout t dans cet ensemble et pour n suffisamment grand, il existe $\eta \in [0, 1]$ tel que

$$\text{(3.4)} \quad f_1^{\varepsilon_n}(t, x_n(t), x_n'(t)) \\ = \eta f(t, x_n(t), x_n'(t)) + (1-\eta) \max\{f(t, \psi(t), x_n'(t)), \psi''(t)\}.$$

Et puisque $x(t) \leqslant \psi(t)$, sur cet ensemble on a

$$\text{(3.5)} \qquad x'(t)=\psi'(t).$$

Or,

$$\text{(3.6)} \qquad \psi''(t) \leqslant f(t, \psi(t), \psi'(t)) \text{ p. p. } t \in [0, 1].$$

Combinant (3.2), (3.4), (3.5), (3.6), on obtient la conclusion.

De même, (3.3) a lieu presque partout sur $\{t \in [0, 1];\ x(t)=\varphi(t)\}$. Clairement, (3.3) a lieu presque partout sur $\{t \notin \operatorname{supp}(\psi-\varphi)\}$, car sur cet ensemble, $\psi(t)=x(t)=x_n(t)=\varphi(t)$, $\psi'(t)=x'(t)=x_n'(t)=\varphi'(t)$ et $f_1^{\varepsilon_n}(t, x_n(t), x_n'(t))=\psi''(t)=\varphi''(t)=x_n''(t)=x''(t)=f(t, x(t), x'(t))$ p. p. Ce qui termine la preuve. □

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer notre résultat principal.

3.14. PREUVE DU THÉORÈME (3.1). — 1^{er} *cas : $\mathscr{B}$ désigne la condition aux limites* (2.1).

Nous voulons montrer que $(\mathrm{P})_1^\varepsilon$ possède une solution $x_\varepsilon \in W^{2,1}[0, 1]$ pour tout $\varepsilon \in (0, 1)$. L'existence d'une solution de (P) est alors déduite directement du lemme (3.13).

Fixons $\varepsilon \in (0, 1)$, et introduisons une nouvelle famille de problèmes

$$(\mathrm{P})^{\varepsilon}_{0,\theta} \qquad \begin{cases} x''(t) = \theta f^{\varepsilon}_{0}(t, x(t), x'(t)), & \text{p. p. } t \in [0, 1] \\ x \in \mathscr{B} \end{cases}$$

où $\theta \in [0, 1]$.

On vérifie aisément que les solutions de $(\mathrm{P})^{\varepsilon}_{0,\theta}$, pour $\theta \in [0, 1]$ peuvent aussi être majorées *a priori* (*voir* [7]). Il existe donc une constante $k > 0$ telle que toutes les solutions de $(\mathrm{P})^{\varepsilon}_{\lambda}$ et $(\mathrm{P})^{\varepsilon}_{0,\theta}$ avec λ et $\theta \in [0, 1]$ satisfont $\|x\|_1 < k$.

Considérons les opérateurs $\mathscr{F}^{\varepsilon}_{\gamma} : C^1[0, 1] \to L^1[0, 1]$ définis par :

$$\mathscr{F}^{\varepsilon}_{\gamma} = \begin{cases} \mathscr{F}^{\varepsilon}_{(2\gamma-1)}, & \text{si } \gamma \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \\ (2\gamma)\mathscr{F}^{\varepsilon}_{0}, & \text{si } \gamma \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Cette famille d'opérateurs satisfait les hypothèses du théorème (2.1). D'où le problème $(\mathrm{P})^{\varepsilon}_{1}$ possède une solution.

2^e cas : $\mathscr{B}$ désigne la condition aux limites (2.2).

On procède comme dans le premier cas avec $(\tilde{\mathrm{P}})^{\varepsilon}_{\lambda}$ et $(\tilde{\mathrm{P}})^{\varepsilon}_{0,\theta}$ et, pour obtenir la conclusion, on utilise le théorème (2.2) et les lemmes (3.12) et (3.13). □

4. Sans hypothèse d'existence de sous- et sur-solutions

Dans la suite, nous allons considérer le problème (P) dans le cas particulier où $\mathscr{B}$ désigne la condition aux limites de Dirichlet.

$$(4.1) \qquad \{x(0) = \alpha_0;\ x(1) = \alpha_1\}.$$

Nous savons que pour certains exemples, il peut être très difficile de trouver des sur- et sous-solutions du problème (P). Dans cette section, nous ne supposerons pas l'existence de sur- et sous-solutions de (P), mais nous demanderons l'existence de surfaces supérieure et inférieure à D pour (P), pour D un domaine admissible de $[0, 1] \times \mathbf{R}$ « suffisamment grand » et d'une forme particulière. Nous énonçons maintenant le résultat principal de cette section.

4.1. THÉORÈME. — *Soit* $f:[0, 1]\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ *une fonction de Carathéodory et supposons que l'hypothèse suivante est satisfaite :*

(H4.1) *il existe* $\psi\geqslant\varphi$ *dans* $C[0, 1]$, *et* S_0 *et* S_1 *respectivement surfaces supérieure et inférieure à* $D(\varphi, \psi)$ *pour le problème* (P) *telles que :*

(i) $\psi(t)>c_i(t)>\varphi(t)$ p. p. $t\in(0, 1)$, $i=0, 1$;

(ii) *il existe* t_ψ *et* $t_\varphi\in[0, 1]$ *tels que* ψ *et* φ *sont respectivement croissantes sur* $[0, t_\psi]$ *et* $[t_\varphi, t]$, *et décroissantes sur* $[t_\psi, 1]$ *et* $[0, t_\varphi]$ *respectivement;*

$$\text{(iii)}\qquad s_0(t, \psi(t))\leqslant D^+\psi(t)=\limsup_{h\to 0^+}\frac{\psi(t+h)-\psi(t)}{h},\qquad t\in[0, t_\psi);$$

$$s_1(t, \psi(t))\geqslant D_-\psi(t)=\liminf_{h\to 0^+}\frac{\psi(t)-\psi(t-h)}{h},\qquad t\in(t_\psi, 1];$$

$$s_0(t, \varphi(t))\leqslant D^+\varphi(t),\quad t\in(t_\varphi, 1];\qquad s_1(t, \varphi(t))\geqslant D_-\varphi(t),\quad t\in[0, t_\varphi).$$

Alors le problème (P) *où* $\mathscr{B}$ *désigne la condition aux limites* (4.1) *possède une solution* x *telle que* $\varphi(t)\leqslant x(t)\leqslant\psi(t)$ *et* $s_1(t, x(t))\leqslant x'(t)\leqslant s_0(t, x(t))$, $t\in[0, 1]$.

Les résultats suivants donnent l'existence d'une solution du problème (P) lorsqu'il existe des surfaces supérieure et inférieure à D pour (P) où D est un domaine rectangulaire $[0, 1]\times[r_1, r_0]$ suffisamment grand.

4.2. COROLLAIRE. — *Soit* f *une fonction de Carathéodory. Supposons qu'il existe des constances* $r_1<\alpha_i<r_0$, $i=0, 1$; *et* S_0, S_1 *respectivement surfaces supérieure et inférieure à* $D=D(r_1, r_0)$ *pour* (P) *telles que*

$$\frac{s_1 c_1(0)-s_0 c_0(1)+s_0 s_1}{s_1-s_0}\leqslant r_0,\qquad \frac{s_0 c_0(0)-s_1 c_1(1)+s_0 s_1}{s_0-s_1}\geqslant r_1;$$

où

$$s_0\geqslant\max\{s_0(t, x);\ (t, x)\in D(r_1, r_0)\},\ s_1\leqslant\min\{s_1(t, x);\ (t, x)\in D(r_1, r_0)\}$$

et $c_{1-i}(i)+(t-i)s_i>c_j(t)>c_i(i)+(t-i)s_{1-i}$ *pour tout* $t\in(0, 1)$, $i, j=0, 1$.

Alors le problème (P) *où* $\mathscr{B}$ *désigne la condition aux limites* (4.1) *possède une solution.*

Preuve. — Posons

$$\psi(t)=\begin{cases} c_1(0)+s_0 t, & 0\leqslant t\leqslant(c_1(0)-c_0(1)+s_1)/(s_1-s_0)\\ c_0(1)+s_1(t-1), & (c_1(0)-c_0(1)+s_1)/(s_1-s_0)<t\leqslant 1,\end{cases}$$

$$\varphi(t)=\begin{cases} c_0(0)+s_1 t, & 0\leqslant t\leqslant (c_0(0)-c_1(1)+s_0)/(s_0-s_1)\\ c_1(1)+s_0(t-1), & (c_0(0)-c_1(1)+s_0)/(s_0-s_1)<t\leqslant 1,\end{cases}$$

On vérifie aisément que les hypothèses du théorème (4.1) sont satisfaites, d'où l'existence d'une solution du problème (P). □

4.3. Corollaire. — *Soit f une fonction de Carathéodory. Supposons qu'il existe des constantes $s_1<0<s_0$ telles que $xf(t, x, s_i)\geqslant 0$, si $|x|\leqslant s_0 s_1 (s_1-s_0)^{-1}$, $i=0, 1$. Alors le problème $x''(t)=f(t, x(t), x'(t))$ p. p. $t\in[0, 1]$, $x(0)=x(1)=0$, possède une solution x telle que $s_1\leqslant x'(t)\leqslant s_0$.*

Remarque. — Ce théorème a été démontré par Rodriguez et Tineo [17] dans le cas où f est continue et différentiable à $(t, 0, s_i)$, $i=0, 1$.

4.4. Corollaire [11]. — *Supposons que $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ est une fonction continue telle que $f(0)\neq 0$ et ayant deux zéros de signe opposé. Alors le problème $x''(t)=f(x'(t))$, $t\in[0, 1]$, $x(0)=x(1)=0$, possède une solution.*

La preuve du théorème (4.1) sera donnée plus loin. Tout d'abord, nous allons considérer une nouvelle famille de problèmes qui nous permettra de déduire l'existence d'une solution de notre problème.

Nous définissons la projection de $[0, 1]\times\mathbf{R}$ sur $D(\varphi, \psi)$ par $\pi(t, x)=(t, y)$ si $\min\{|x-z|;\,(t, z)\in D(\varphi, \psi)\}$ est atteint à y. Définissons la fonction $f_2:[0, 1]\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ par

$$f_2(t, x, p)=\begin{cases} f(\pi(t, x), s_i(\pi(t, x))), & \text{si}\quad (\pi(t, x), p)\in R_i,\quad i=0, 1,\\ f(\pi(t, x), p), & \text{ailleurs}\end{cases}$$

4.5. Proposition. — *Sous les hypothèses du théorème (4.1), l'opérateur $\mathscr{F}_2: C^1[0, 1]\to L^1[0, 1]$ défini par : $\mathscr{F}_2(x(t)=f_2(t, x(t), x'(t))$ est bien défini, continu et intégrablement borné sur les bornés.*

Nous ne donnons pas la preuve puisqu'elle s'obtient par le même type d'arguments utilisés dans la preuve de la proposition (3.8).

Considérons la famille de problèmes suivants :

$$(\mathrm{P})_\lambda^2\qquad \begin{cases} x''(t)=\lambda f_2(t, x(t), x'(t)), & \text{p. p. } t\in[0, 1]\\ x(0)=\alpha_0, & x(1)=\alpha_1\end{cases}$$

où $\lambda\in[0, 1]$.

L'existence d'une solution du problème $(P)_1^2$ nous permettra de déduire l'existence d'une solution de notre problème (P). Mais d'abord, nous allons majorer *a priori* les solutions de $(P)_\lambda^2$.

4.6. LEMME (majoration *a priori*). — *Sous les hypothèses du théorème* (4.1), *les solutions x de $(P)_\lambda^2$ pour $\lambda \in [0, 1]$ sont telles que :*

(*a*) $\varphi(t) \leqslant x(t) \leqslant \psi(t)$ *pour tout* $t \in [0, 1]$;

(*b*) $s_1(t, x(t)) \leqslant x'(t) \leqslant s_0(t, x(t))$ *pour tout* $t \in [0, 1]$.

Preuve. — (*a*) Montrons que $x(t) \leqslant \psi(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$; l'autre inégalité se démontrant analoguement. Supposons que $\{t \in [0, 1]; x(t) > \psi(t)\} \neq \varnothing$. Alors, en utilisant les définitions de π et de S_0 et S_1, on vérifie qu'une des deux affirmations suivantes est vraie :

1. il existe $\tau < t_\psi$ tel que $x(\tau) \geqslant \psi(\tau)$ et $x'(\tau) > D^+ \psi(\tau) (\geqslant s_0(\tau, \psi(\tau)) = s_0(\pi(\tau, x(\tau)))$; et il existe $\eta > \tau$ tel que $x(t) \geqslant c_0(t)$, $x'(t) > s_0(\pi(t, x(t)))$ pour tout $t \in [\tau, \eta)$ et $x'(\eta) \leqslant s_0(\pi(\eta, x(\eta))) \leqslant s_0(\pi(\tau, x(\tau)))$;

2. il existe $\tau > t_\psi$ tel que $x(\tau) \geqslant \psi(\tau)$ et $x'(\tau) < D_- \psi(\tau) (\leqslant s_1(\tau, \psi(\tau)) = s_1(\pi(\tau, x(\tau))))$; et il existe $\eta < \tau$ tel que $x(t) \geqslant c_1(t)$, $x'(t) < s_1(\pi(t, x(t)))$ pour tout $t \in (\eta, \tau]$ et $x'(\eta) \geqslant s_1(\pi(\eta, x(\eta))) \geqslant s_1(\pi(\tau, x(\tau)))$

Si 1. *a lieu,*

$$0 > x'(\eta) - x'(\tau) = \int_\tau^\eta x''(t)\,dt.$$

Or, $x''(t) \geqslant 0$ p. p. $t \in (\tau, \eta)$ par définition de f_2. Contradiction.

De même, si 2. a lieu, on aboutit à une contradiction.

(*b*) L'affirmation (*b*) découle directement de la proposition (1.4). □

4.7. PREUVE DU THÉORÈME (4.1). — Pour montrer l'existence d'une solution du problème (P), il suffit de montrer que le problème $(P)_1^2$ a une solution. En effet, si x est une solution de $(P)_1^2$, par le lemme (4.6), $(t, x(t)) \in D$ et $s_1(t, x(t)) \leqslant x'(t) \leqslant s_0(t, x(t))$. Or $f_2(t, x, p) = f(t, x, p)$, *sur* $\{(t, x, p) \in D \times \mathbf{R};\ s_1(t, x) \leqslant p \leqslant s_0(t, x)\}$. D'où x est une solution de (P).

L'existence d'une solution du problème $(P)_1^2$ découle directement de la proposition (4.5), du lemme (4.6) et du théorème (2.1) appliqués aux opérateurs $\lambda \mathcal{F}_2$. □

5. Avec hypothèses mixtes

Dans cette section, nous allons combiner les hypothèses des sections 3 et 4, *i.e.* nous allons supposer l'existence d'une sous-solution (ou sur-solution) de notre problème. Encore, nous allons considérer le problème (P) où $\mathscr{B}$ désigne la condition aux limites de Dirichlet, soit (4.1). Nous énonçons le théorème principal de cette section.

5.1. Théorème. — *Soit* $f:[0,1]\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ *une fonction de Carathéodory et supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :*
(H 5.1) *il existe* φ *dans* $W^{2,1}[0,1]$ *une sous-solution du problème* (P);
(H 5.2) *il existe* $\psi\geqslant\varphi$ *dans* $C[0,1]$ *et* S_0 *et* S_1 *respectivement surfaces supérieure et inférieure à* $D(\varphi,\psi)$ *pour* (P) *telles que :*

(i) $\psi(t)>c_i(t)$ p.p. $t\in(0,1)$, $i=0,1$;

(ii) *il existe* $t_\psi\in[0,1]$ *tel que* ψ *est croissante sur* $[0,t_\psi]$ *et décroissante sur* $[t_\psi,1]$;

(iii) $s_0(t,\psi(t))\leqslant D^+\psi(t)$, $t\in[0,t_\psi)$; $s_1(t,\psi(t))\geqslant D_-\psi(t)$, $t\in(t_\psi,1]$.

Alors le problème (P) *où* $\mathscr{B}$ *désigne la condition aux limites* (4.1) *possède une solution telle que* $\varphi(t)\leqslant x(t)\leqslant\psi(t)$ *et* $s_1(t,x(t))\leqslant x'(t)\leqslant s_0(t,x(t))$, $t\in[0,1]$.

Analoguement, lorsqu'on connaît une sur-solution du problème (P), on a le théorème suivant :

5.2. Théorème. — *Soit* $f:[0,1]\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ *une fonction de Carathéodory et supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :*
(H 5.1)′ *il existe* ψ *dans* $W^{2,1}[0,1]$ *une sur-solution du problème* (P);
(H 5.2)′ *il existe* $\varphi\leqslant\psi$ *dans* $C[0,1]$ *et* S_0 *et* S_1 *respectivement surfaces supérieure et inférieure à* $D(\varphi,\psi)$ *pour* (P) *telles que :*

(i) $\varphi(t)<c_i(t)$ p.p. $t\in(0,1)$, $i=0,1$;

(ii) *il existe* $t_\varphi\in[0,1]$ *tel que* φ *est décroissante sur* $[0,t_\varphi]$ *et croissante sur* $[t_\varphi,t]$;

(iii) $s_0(t,\varphi(t))\leqslant D^+\varphi(t)$, $t\in(t_\varphi,1]$; $s_1(t,\varphi(t))\geqslant D_-\varphi(t)$, $t\in[0,t_\varphi)$.

Alors le problème (P) *où* $\mathscr{B}$ *désigne la condition aux limites* (4.1) *possède une solution telle que* $\varphi(t)\leqslant x(t)\leqslant\psi(t)$ *et* $s_1(t,x(t))\leqslant x'(t)\leqslant s_0(t,x(t))$.

5.3. Corollaire. — *Supposons que* $f:[0,1]\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ *est une fonction continue telle que* $f(t,0,0)\leqslant 0$ *et qu'il existe* $r>0$ *et deux fonctions décroissantes* $-s_1$, s_0 : $[0,r]\to[0,\infty)$ *telles que, pour* $i=0,1$,

$f(t, x, s_i(x)) \geqslant 0$ *si* $0 \leqslant x \leqslant r$ *et* $r \geqslant s_0 s_1 (s_1 - s_0)^{-1}$, *où* $s_0 = \max\{s_0(x);\ x \in [0, r]\}$, $s_1 = \min\{s_1(x);\ x \in [0, r]\}$.

Alors le problème $x''(t) = f(t, x(t), x'(t))$ p.p. $t \in [0, 1]$, $x(0) = x(1) = 0$, *possède une solution telle que* $s_1(x(t)) \leqslant x'(t) \leqslant s_0(x(t))$ *pour tout* $t \in [0, 1]$.

5.4. Exemple. — Le problème suivant a une solution.

$$\left\{\begin{array}{l} x''(t) = -(-2\,x'(t)^6 + 9\,x'(t)^4 - 12\,x'(t)^2 - 4\,x(t)^2 + 9)^2 \\ \qquad\qquad x(0) = x(1) = 0. \end{array}\right.$$

Posons $h(p) = -2p^6 + 9p^4 - 12p^2 + 9$, $r = 3/2, -s_1$, $s_0 : [0, 3/2] \to [0, \infty)$ définies par $s_0(x) = p \Leftrightarrow h(p) = 4x^2$ et $p \in [0, 1) \cup [(5/2)^{1/2}, 3^{1/2}]$, $s_1(x) = -s_0(x)$. Les hypothèses du corollaire (5.3) sont satisfaites. Remarquons qu'on peut prendre $r \in [(3^{1/2})/2, 3/2]$.

Analoguement à ce que nous avons fait précédemment, pour démontrer le théorème principal de cette section, nous considérons de nouvelles familles de problèmes. Nous utilisons les notations des sections précédentes.

Définissons pour $\lambda \in [0, 1]$ et $\varepsilon \in (0, 1)$, les familles de fonctions $\hat{f}^{\varepsilon}_{\lambda} : [0, 1] \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ par

$$\hat{f}^{\varepsilon}_{\lambda}(t, x, p) = \begin{cases} f^{\varepsilon}_{\lambda}(t, x, p), & \text{si} \quad x \leqslant \varphi(t) + \varepsilon\, v_{\varphi}(t), \\ \lambda f_2(\pi(t, x), p), & \text{si} \quad x > \varphi(t) + \varepsilon\, v_{\varphi}(t). \end{cases}$$

Considérons les familles de problèmes suivants :

$$(\hat{\mathrm{P}})^{\varepsilon}_{\lambda} \qquad \left\{\begin{array}{ll} x''(t) = \hat{f}^{\varepsilon}_{\lambda}(t, x(t), x'(t)), & \text{p.p. } t \in [0, 1] \\ \qquad x(0) = \alpha_0, x(1) = \alpha_1 & \end{array}\right.$$

où $\lambda \in [0, 1]$ et $\varepsilon \in (0, 1)$.

Pour ces familles de fonctions et ces familles de problèmes, nous avons les analogues de la proposition (3.8) et des lemmes (3.12) et (3.13). Nous n'écrivons pas la preuve de ces résultats ainsi que du théorème (5.1) puisqu'elles sont similaires à celles des sections 3 et 4.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Baxley (J. V.) et Brown (S. E.). — Existence and uniqueness for two-point boundary value problems, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, sect. A, 88, 1981, p. 219-234.

[2] BENEDETTO (J. J.). — *Real variable and integration.* — Stuttgart, Teubner, 1976.

[3] BERNSTEIN (S. N.). — Sur les équations du calcul des variations, *Ann. Sc. École Norm. Sup.*, 29, 1912, p. 431-485.

[4] BREZIS (H.). — *Analyse fonctionnelle, théorie et applications.* — Paris, Masson, 1983.

[5] DUNGUNDJI (J.) and GRANAS (A.). — *Fixed point theory*, vol. I. Warszawa, P. W. N., 1982 (*Monograf. Mat.*, 61).

[6] FRIGON (M.). — Application de la thérorie de la transversalité topologique à des problèmes non linéaires pour des équations différentielles ordinaires, *Dissertationes Math.*, CCXCVI, 1990, p. 1-75.

[7] FRIGON (M.). — *Théorie de la transversalité topologique appliquée à des problèmes aux limites sans condition de croissance*, Rapport CRM-1632, Université de Montréal, septembre 1989.

[8] FRIGON (M.). — Problèmes aux limites pour des inclusions différentielles sans condition de croissance, *Ann. Polon. Mat.*, 54, 1991, p. 69-73.

[9] GRANAS (A.) et GUENNOUN (Z.). — Quelques résultats dans la théorie de Bernstein-Carathéodory de l'équation $y''=f(t, y, y')$, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 306, sér. I, 1988, p. 703-706.

[10] GRANAS (A.), GUENTHER (R. B.) et LEE (J. W.). — Nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations, *Dissertationes Math.*, CCXLIV, 1985, p. 1-128.

[11] GRANAS (A.), GUENTHER (R. B.) et LEE (J. W.). — Nonlinear boundary value problems for some classes of ordinary differential equations, *Rocky Mountain J. Math.*, 10, 1980, p. 35-58.

[12] GUENNOUN (Z.). — Existence de solutions au sens de Carathéodory pour le problème de Neumann $y''=f(t, y, y')$, *Rapport de recherche Math., Université de Moncton*, 11, 1990.

[13] HIMMELBERG (C. J.) and VAN VLECK (F. S.). — Lipschitzian generalized differential equations, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 48, 1973, p. 159-169.

[14] PALAMIDES (P. K.). — A topological method and its application on a general boundary value problem, *Nonlinear Analysis*, 7, 1983, p. 1101-1114.

[15] MAWHIN (J.). — The Bernstein-Nagumo problem and two-point boundary value problems for ordinary differential equations, *Qualitative theory of differential equations*, p. 709-740, Budapest, D. FARKAS éd, 1981, (*Coll. Math. Soc. Janos Bolyai*).

[16] NIREMBERG (L.). — *Functional Analysis.* — New York, Courant Institute of Mathematical Sciences, 1960, (*Lectures Notes*, 17).

[17] RODRIGUEZ (A.) et TINEO (A.). — Existence theorems for the Dirichlet Problem without growth restrictions, *J. Math. Anal. Appl.*, 135, 1988, p. 1-7.