Canad. Math. Bull. Vol. **47** (4), 2004 pp. 515–529

Remarques sur l′enlacement en théorie des points critiques pour des fonctionnelles continues

M. Frigon

Résumé. Dans cet article, à partir de la notion d'enlacement introduite dans [7] entre des paires d'ensembles (B, A) et (Q, P), nous établissons l'existence d'un point critique d'une fonctionnelle continue sur un espace métrique lorsqu'une de ces paires enlace l'autre. Des renseignements sur la localisation du point critique sont aussi obtenus. Ces résultats conduisent à une généralisation du théorème des trois points critiques. Finalement, des applications à des problèmes aux limites pour une équation quasi-linéaire elliptique sont présentées.

Abstract. In this paper, from the linking notion for pairs (B, A) and (Q, P) introduced in [7], the existence of a critical point of a continuous functional defined on a metric space is established when one of these pairs links the other. Information on the location of the critical point leads to a generalization of the three critical points Theorem. Finally, applications to elliptic quasi-linear equations are presented.

1 Introduction

Il est bien connu que la notion d'enlacement est cruciale en théorie des points critiques. En 1992, Schechter et Tintarev [12] proposaient une nouvelle définition d'enlacement motivée en bonne partie par le souci d'obtenir la réciprocité. Ainsi ils ont obtenus plusieurs cas d'ensemble A enlaçant un ensemble Q et réciproquement. Aussi, cette définition a conduit à quelques nouveaux enlacements dont $\partial B_2(R)$ qui enlace E_1 où $E = E_1 \oplus E_2$ et $\dim E_1 < \infty$, E_2 pouvant être de dimension infinie.

Par ailleurs, une autre notion d'enlacement a été introduite dans [7] pour des paires d'ensembles. Cette dernière avait l'avantage d'unifier plusieurs notions d'enlacement existantes dont celle d'enlacement local introduite par Liu et Li [10]. On constate qu'en limitant l'ensemble des déformations considérées dans la définition d'enlacement de [7], des nouveaux cas obtenus par Schechter et Tintarev [12] sont récupérés.

Dans cet article, étant données deux paires d'ensembles (B, A) et (Q, P) vérifiant

$$\sup f(A) \leq \inf f(Q) \leq \sup f(B) \leq \inf f(P),$$

nous établissons l'existence d'un point critique de la fonctionnelle f dès qu'une de ces paires enlace l'autre. Un résultat de localisation est aussi obtenu généralisant, entre autres, un résultat de [8]. De ce résultat découle plusieurs théorèmes établissant une

Reçu par la rédaction le 5 mars, 2002; revu le 22 octobre, 2002.
Travail subventionné partiellement par le CRSNG du Canada
Classification (AMS) par sujet: 58E05, 35J20.

multiplicité de points critiques. Ainsi, avec cette définition d'enlacement, il apparaît alors naturellement que la multiplicité découle de la présence de plusieurs situations d'enlacement et non pas de la réciprocité de l'enlacement.

Ici, les fonctionnelles considérées sont définies sur un espace métrique complet et sont continues. Nos résultats reposent sur les lemmes de déformation présentés dans [5] et sur une légère modification de la notion de pente faible introduite par Degiovanni et Marzocchi [6]. Cette modification nous assure qu'un maximum local de f est un point critique.

Dans un deuxième temps, nous considérons le cas où $X = \overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha}$ et f vérifie une condition de type $(PS)^*_c$. En utilisant de nouveau la notion d'enlacement de paires, non seulement un théorème d'existence est établi mais aussi un résultat de localisation de points critiques. A notre connaissance, il s'agit du premier résultat de localisation dans ce contexte. En outre, le résultat est nouveau même dans le cas classique. Il concerne le cas où deux paires (B, A) et (Q, P) ne s'enlacent pas forcément mais $(B \cap X_\alpha, A \cap X_\alpha)$ et $(Q \cap X_\alpha, P \cap X_\alpha)$ s'enlacent pour tous les α suffisamment grands. Remarquons aussi que dans ce contexte, $f|_{X_\alpha}$ peut ne pas satisfaire la condition de Palais-Smale et donc les lemmes de déformations connus ne peuvent être appliqués directement. Afin de mettre en évidence les éléments communs aux preuves faites respectivement avec les conditions $(PS)_c$ et $(PS)^*_c$ et dans le but de donner une démonstration aussi simple que possible de ce théorème, une propriété de déformation est introduite à la section 3. Celle-ci conduit au lemme 3.2 qui jouera un rôle clé dans les preuves des résultats d'existence et de multiplicité.

Aussi, les théorèmes d'existence de trois points critiques de Brezis et Nirenberg [2], Li et Willem [9] et Picard [11] seront généralisés ; les résultats étant nouveaux aussi dans le cas classique.

Finalement, en se basant sur des résultats de Canino et Degiovanni [3], nous illustrons comment les résultats précédents peuvent permettre d'établir l'existence de solutions à des problèmes aux limites pour une équation quasi-linéaire elliptique. Le premier résultat repose sur l'enlacement entre $(E_1, \varnothing)$ et $(B_2(r), \partial B_2(r))$ avec E_1 de dimension finie et E_2 pouvant être de dimension infinie. Le deuxième donne des conditions suffisantes assurant l'existence d'au moins trois solutions.

2 Enlacement

Soit (X, d) un espace métrique complet. Dans [7], on introduisait la notion d'enlacement suivante :

Pour un sous-ensemble A de X, on note

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ \eta \in C(X \times [0,1], X) : \eta = id \text{ sur } X \times \{0\} \cup A \times [0,1] \right\}.$$

Définition 2.1 Soient $A \subset B \subset X$, $P \subset Q \subset X$ tels que $B \cap Q \neq \varnothing$, $A \cap Q = \varnothing$, et $B \cap P = \varnothing$. Soit $\mathcal{N}_0$ un sous-ensemble non vide de $\mathcal{N}(A)$. On dit que (B, A) *enlace* (Q, P) *via* $\mathcal{N}_0$ si pour tout $\eta \in \mathcal{N}_0$ un des énoncés suivants est vérifié :

(1) $\eta(B, 1) \cap Q \neq \varnothing$;
(2) $\eta\big(B,]0, 1[\big) \cap P \neq \varnothing$.

Dans ce qui suit, nous considérerons le cas particulier où $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}_0(A)$, avec

$$\mathcal{N}_0(A) = \left\{ \eta \in \mathcal{N}(A) : \sup\{d(x, \eta(x,t)) : (x,t) \in X \times [0,1]\} < \infty \right\},$$

et nous dirons simplement que (B, A) *enlace* (Q, P) pour signifier l'enlacement via $\mathcal{N}_0(A)$.

Remarquons que si $X = E_1 \oplus E_2$ où E_1 et E_2 sont deux espaces de Banach non triviaux tels que $\dim E_1 < \infty$ alors $(E_1, \varnothing)$ enlace $(B_2(r), \partial B_2(r))$, où $B_2(r)$ et $\partial B_2(r)$ sont respectivement la boule fermée et la sphère centrées en 0 et de rayon r dans E_2.

Mentionnons également que lorsque E_1 et E_2 sont tous deux de dimension infinie, une nouvelle classe de déformation η peut être considérée comme l'ont fait Benci et Rabinowitz [1], voir aussi Schechter [13].

La notion d'enlacement introduite par Schechter et Tintarev [12] était motivée en partie par le souci d'obtenir la réciprocité de l'enlacement. Quoiqu'allant dans une direction différente, nous énonçons la définition suivante puisque les résultats que nous obtiendrons aux sections 5 et 6 seront valides dès qu'une paire enlacera l'autre.

Définition 2.2 Soient $A \subset B \subset X$, $P \subset Q \subset X$ des fermés tels que $B \cap Q \neq \varnothing$, $A \cap Q = \varnothing$, et $B \cap P = \varnothing$. On dit qu'*il y a enlacement entre* (B, A) *et* (Q, P) si (B, A) enlace (Q, P) ou si (Q, P) enlace (B, A). On dit aussi que (B, A) *et* (Q, P) *s'enlacent*.

Exemple 2.3 (1) Soit $E = E_1 \oplus E_2$ où E_1, E_2 sont des espaces de Banach non triviaux tels que $\dim E_i < \infty$ pour $i = 1$ ou 2. Alors il y a enlacement

- entre $\big(B_1(r), \partial B_1(r)\big)$ et $\big(B_2(s), \partial B_2(s)\big)$;
- entre $\big(B_1(r), \partial B_1(r)\big)$ et $\big(E_2, \varnothing\big)$;
- entre $\big(E_1, \varnothing\big)$ et $\big(E_2, \varnothing\big)$;

où $B_i(r)$ et $\partial B_i(r)$ sont respectivement la boule fermée et la sphère centrées en 0 et de rayon r dans E_i, $i = 1, 2$.

(2) Soit $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \mathbb{R}e$ un espace de Banach où $e \neq 0$, $\dim E_1 < \infty$ ou $\dim E_2 < \infty$, et notons pour $i = 1, 2$,

$$B_{i,e}(x, r) = \{v \in E_i \oplus \mathbb{R}e : \|v - x\| \leq r\};$$
$$\partial B_{i,e}(x, r) = \{v \in E_i \oplus \mathbb{R}e : \|v - x\| = r\};$$
$$E_{i,e}^+ = \{v + te : v \in E_i, t \geq 0\}.$$

Alors il y a enlacement

- entre $\big(B_{1,e}(0, s_1), \partial B_{1,e}(0, s_1)\big)$ et $\big(\partial B_{2,e}(e, s_2), \varnothing\big)$,
- entre $\big(\partial B_{1,e}(0, s_1), \varnothing\big)$ et $\big(B_{2,e}(e, s_2), \partial B_{2,e}(e, s_2)\big)$,
- entre $\big(B_{1,e}(0, r), \partial B_{1,e}(0, r)\big)$ et $\big(E_2, \varnothing\big)$,
- entre $\big(\partial B_{1,e}(0, r), \varnothing\big)$ et $\big(E_{2,e}^+, E_2\big)$,
- entre $\big(e + B_1(r), e + \partial B_1(r)\big)$ et $\big(E_{2,e}^+, E_2\big)$;

où $|s_1 - s_2| < \|e\| < s_1 + s_2$.

3 Propriétés de déformation

Voici une propriété de déformation qui nous permettra de mettre en évidence des éléments communs aux preuves des différents résultats d'existence et de multiplicité de points critiques qui seront présentés. Dans toute la suite, (X,d) est un espace métrique complet.

Définition 3.1 Soient $f\colon X\to\mathbb{R}$ une fonction continue, $a_0\le a_1\in\mathbb{R}$, $\lambda>0$ et $S_0,S_1\subset X$. On dit que f vérifie $\mathcal{D}^+([a_0,a_1],S_0,S_1,\lambda)$ s'il existe $\gamma>0$, $\varepsilon\in\ ]0,\lambda[$ et une fonction continue $\eta\colon X\times[0,1]\to X$ tels que

(a) $d(u,\eta(u,t))\le\gamma$;
(b) $f(\eta(u,t))\le f(u)$;
(c) si $u\in f^{-1}[a_0-\varepsilon,a_1+\varepsilon]\backslash B(S_1,\lambda)$, alors

$$\eta(u,1)\in f^{-1}]-\infty,a_0-\varepsilon]\cup\big(f^{-1}]-\infty,a_0+\varepsilon]\cap B(S_0,\lambda)\big)\,;$$

(d) $d(u,\eta(u,t))\le\lambda$ si $\{u,\eta(u,t)\}\subset f^{-1}[a_i-\varepsilon,a_i+\varepsilon]$ pour $i=0,1$.

On dit que f vérifie $\mathcal{D}([a_0,a_1],S_0,S_1,\lambda)$ si f vérifie $\mathcal{D}^+([a_0,a_1],S_0,S_1,\lambda)$ et $-f$ vérifie $\mathcal{D}^+([-a_1,-a_0],S_1,S_0,\lambda)$. Si $a=a_0=a_1$ et $S=S_0=S_1$, on dit simplement que f vérifie $\mathcal{D}(a,S,\lambda)$.

Les théorèmes d'existence de points critiques obtenus plus loin utiliseront de façon cruciale le lemme suivant. Par convention, $\inf(\varnothing)=\infty$, $\sup(\varnothing)=-\infty$ et $d(\varnothing,S)=\infty$ pour tout $S\subset X$.

Lemme 3.2 *Soit $f\colon X\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons qu'il existe des réels a,b, deux paires (B,A) et (Q,P) qui s'enlacent et $\delta>0$ tels que*

$$\sup f(A)\le a\le\inf f(Q)\le\sup f(B)\le b\le\inf f(P),$$

et

$$\begin{aligned}\xi=\min\Big\{&d\big(A\cap f^{-1}(a),Q\cap f^{-1}[a,a+\delta]\big),\\&d(B\cap f^{-1}[b-\delta,b],P\cap f^{-1}(b)\big)\Big\}>0.\end{aligned}$$

Pour tout $c\in[a,b]$, soit $S_c\subset X$. Alors au moins un des énoncés suivants est vrai :

(1) *$a=b$ et $d(S_b,B)=d(S_a,Q)=0$;*
(2) *$a=b$ et pour tout $\lambda<\min\big\{\delta,\xi,\max\{d(S_a,Q),d(S_b,B)\}/2\big\}$, f ne vérifie pas $\mathcal{D}(b,S_b,\lambda)$;*
(3) *$a<b$ et $S_c\neq\varnothing$ pour un certain $c\in\ ]a,b[$;*
(4) *$a<b$ et $d(S_b,B)=0$ ou $d(S_a,Q)=0$;*
(5) *$a<b$ et pour tout $\lambda<\min\{\delta,\xi,d(S_a,Q),d(S_b,B)\}$, la fonction f ne vérifie pas $\mathcal{D}([a,b],S_a,S_b,\lambda)$.*

Preuve Supposons que (B,A) enlace (Q,P).
1*er cas :* $a=b$. Supposons que la conclusion soit fausse. Il existe donc

$$\lambda \in \left]0, \min\left\{\delta, \xi, \max\{d(S_b,Q), d(S_b,B)\}/2\right\}\right[$$

tel que f vérifie $\mathcal{D}(b,S_b,\lambda)$. Ainsi, il existe $\eta\colon X\times[0,1]\to X$ et $\varepsilon>0$ vérifiant les conditions de la définition 3.1. Observons que

$$\eta(B,]0,1])\cap P=\varnothing. \tag{3.1}$$

En effet, si $u\in B$ est tel que $\eta(u,t)\in P$ alors $\{u,\eta(u,t)\}\in f^{-1}(b)$. Par hypothèse, $d(u,\eta(u,t))\geq\xi$. D'autre part, la propriété (d) de la définition précédente implique que $d(u,\eta(u,t))\leq\lambda<\xi$; contradiction.

Soit $\theta\colon X\to[0,1]$ une fonction d'Urysohn telle $\theta(u)=0$ si $u\in A$, et $\theta(u)=1$ si $u\in B(Q\cap f^{-1}[a,a+\delta],\lambda)\cap f^{-1}[a,\infty[$. On définit $\widetilde{\eta}\in\mathcal{N}_0(A)$ par $\widetilde{\eta}(u,t)=\eta\big(u,\theta(u)t\big)$. De (3.1) et du fait que (B,A) enlace (Q,P), on déduit l'existence de $u\in B$ tel que $\widetilde{\eta}(u,1)\in Q$. Il découle des propriétés (b) et (d) que $u\in B(Q\cap f^{-1}[a,a+\delta],\lambda)\cap f^{-1}[a,\infty[$ et donc $\theta(u)=1$. Conséquemment,

$$\eta(u,1)\in Q,\quad u\in B,\quad d(u,\eta(u,1))\leq\lambda. \tag{3.2}$$

Ainsi, $f(\eta(u,1))\geq b$ et la condition (c) implique que $\eta(u,1)\in B(S_b,\lambda)$ ou $u\in B(S_b,\lambda)$ et donc, $d(Q,S_b)\leq\lambda$ ou $d(B,S_b)\leq\lambda$. Ceci combiné à (3.2) implique que $d(Q,S_b)\leq 2\lambda$ et $d(B,S_b)\leq 2\lambda$; contradiction.
2*ième cas :* $a<b$. De nouveau, si on suppose que la conclusion soit fausse, il existe $\lambda\in\left]0,\min\{\delta,\xi,d(S_a,Q),d(S_b,B)\}\right[$ tel que f vérifie $\mathcal{D}([a,b],S_a,S_b,\lambda)$. Il existe donc $\varepsilon>0$ et $\eta\colon X\times[0,1]\to X$ vérifiant les conditions de la définition 3.1. Soit $\theta\colon X\to[0,1]$ une fonction d'Urysohn telle que $\theta(u)=0$, si $u\in A$, et

$$\theta(u)=1,\quad \text{si } u\in\big(B(Q\cap f^{-1}[a,a+\delta],\lambda)\cap f^{-1}[a,\infty[\big)\cup f^{-1}[a+\varepsilon,\infty[.$$

On définit $\widetilde{\eta}\in\mathcal{N}_0(A)$ par $\widetilde{\eta}(u,t)=\eta(u,\theta(u)t)$. En procédant comme dans le premier cas, on déduit que $\widetilde{\eta}(B,]0,1])\cap P=\varnothing$.

Par ailleurs, supposons qu'il existe $u\in B$ tel que $\widetilde{\eta}(u,1)\in Q$. Si $f(u)\geq a+\varepsilon$ alors $\theta(u)=1$. Sinon, $a+\delta>a+\varepsilon>f(u)\geq f(\widetilde{\eta}(u,1))\geq a$. La propriété (d) de la définition 3.1 implique que $d(u,\widetilde{\eta}(u,1))\leq\lambda$ et donc

$$u\in B(Q\cap f^{-1}[a,a+\delta],\lambda)\cap f^{-1}[a,\infty[,$$

d'où $\theta(u)=1$. Ainsi, $\widetilde{\eta}(u,1)=\eta(u,1)$. Comme $u\in B$ et $d(B,S_b)>\lambda$, $u\notin B(S_b,\lambda)$. De (c) et du fait que $f(\eta(u,1))\geq a$, on déduit que $\eta(u,1)\in B(S_a,\lambda)$. D'où $d(Q,S_a)\leq\lambda$; contradiction. On a donc montré que $\widetilde{\eta}(B,1)\cap Q=\varnothing$, ce qui contredit le fait que (B,A) enlace (Q,P).

Le cas où (Q,P) enlace (B,A) se traite similairement en raisonnant avec $-f$. ■

Remarque 3.3 Du lemme précédent, on constate que pour obtenir $S_c\neq\varnothing$ pour au moins un $c\in[a,b]$, il suffit que $\mathcal{D}([a,b],S_a,S_b,\lambda)$ soit vérifié pour au moins un λ suffisamment petit. Il n'est pas nécessaire que ce soit vérifié pour tout $\lambda>0$. Comme nous le verrons, ce fait est crucial dans la démonstration du théorème 6.1. Il explique aussi pourquoi les lemmes de déformation connus ne peuvent être appliqués directement dans ce cas.

4 Pente

En 1994, Degiovanni et Marzocchi [6] introduisait la notion de pente faible suivante.

Définition 4.1 Soient $f\colon X \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $u \in X$. La *pente faible de f au point u*, notée $|df|(u)$, est le suprémum des $\sigma \geq 0$ tel qu'il existe $\delta > 0$ et une fonction continue $H\colon B(u,\delta) \times [0,\delta] \to X$ tels que

(1) $d(v, H(v,t)) \leq t$ pour $t \leq \delta$;
(2) $f(H(v,t)) \leq f(v) - \sigma t$ pour $t \leq \delta$.

Étant donnée une fonction continue $f\colon X \to \mathbb{R}$, si x est un maximum local de f alors la pente faible de f en x peut être non nulle. Par exemple, si $a < b$ et $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est la fonction identité, alors b est un maximum global de f et $|df|(b) = 1$. Toutefois, a est un minimum global de f et $|df|(a) = 0$. Afin de remédier à ce problème, il est utile d'utiliser la notion de pente suivante.

Définition 4.2 Soient $f\colon X \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $u \in X$. La *pente de f au point u* est $|Df|(u) = \min\{|df|(u), |d(-f)|(u)\}$.

Cette pente possède évidemment plusieurs propriétés vérifiées par la pente faible, notamment, elle est semi-continue inférieurement et généralise la norme de la dérivée. En particulier, si X est une variété de Finsler de classe C^1 et si f est une fonction de classe C^1 alors $|Df|(u) = \|f'(u)\|$. Par aileurs, si u est un extrémum local de f, alors $|Df|(u) = 0$.

À partir de cette pente, on étend la notion de point critique et la condition de Palais-Smale.

Définition 4.3 Soient $f\colon X \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $u \in X$. On dit que u est un *point critique de f* si $|Df|(u) = 0$; dans ce cas $c = f(u)$ est appelé *valeur critique de f*. On note $K_c = \{u \in f^{-1}(c) : |Df|(u) = 0\}$.

Définition 4.4 Soit $f\colon X \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit qu'elle vérifie la *condition de Palais-Smale au niveau c* notée $(PS)_c$, si toute suite $\{u_n\}$ telle que $f(u_n) \to c$ et $|Df|(u_n) \to 0$ possède une sous-suite convergente.

Le théorème suivant combine en quelque sorte les théorèmes de déformation et d'intervalle non critique en considérant une fonctionnelle dont les seules valeurs critiques dans un intervalle $[a,b]$ sont sur la frontière. Il découle directement des théorèmes de déformation 2.14 et 2.15 de [5] et d'une analyse de leurs démonstrations.

Théorème 4.5 *Soient $f\colon X \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \leq b \in \mathbb{R}$. Supposons que f vérifie $(PS)_c$ pour tout $c \in [a,b]$, et $K_c = \varnothing$ pour tout $c \in\ ]a,b[$ alors f vérifie $\mathcal{D}([a,b], K_a, K_b, \lambda)$ pour tout $\lambda > 0$.*

Nous voulons aussi considérer le cas où une fonctionnelle satisfait une condition de type Palais-Smale étoile analogue à celle introduite dans [10]. Le lecteur intéressé pourra aussi consulter [4] où une condition $(PS)^*$ est introduite utilisant la notion de pente faible et les suites généralisées.

Soit $(X_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ une famille de sous-espaces métriques fermés de X telle que

$$X_\alpha \subset X_\beta \text{ si } \alpha \leq \beta \quad \text{et} \quad X = \overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha}, \tag{4.1}$$

où Λ est un ensemble ordonné filtrant à droite. Pour $f\colon X \to \mathbb{R}$ une fonction continue, on pose $f_\alpha\colon X_\alpha \to \mathbb{R}$ la restriction de f à X_α.

Définition 4.6 Soit $c \in \mathbb{R}$. La fonction f vérifie la *condition de Palais-Smale étoile au niveau c* notée $(PS)^*_c$, si on peut extraire une sous-suite convergeant vers un point critique de f de toute suite $\{u_{\alpha_n}\}$ telle que $u_{\alpha_n} \in X_{\alpha_n}$, $f(u_{\alpha_n}) \to c$, $|Df_{\alpha_n}|(u_{\alpha_n}) \to 0$ et telle que pour tout $\alpha \in \Lambda$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha_n \geq \alpha$ pour tout $n \geq m$.

Si on a la famille d'espaces $(X_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ vérifiant (4.1) et f_α la restriction de f à X_α, on obtient le théorème de déformation suivant.

Théorème 4.7 *Soient X vérifiant* (4.1), $f\colon X \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $a \leq b \in \mathbb{R}$. *Supposons que f vérifie* $(PS)^*_c$ *pour tout* $c \in [a,b]$, *et* $K_c = \varnothing$ *pour tout* $c \in\,]a,b[$. *Alors, pour tous* λ, $\lambda_0 > 0$, *il existe* $\beta \in \Lambda$ *tel que pour tout* $\alpha \geq \beta$, f_α *vérifie* $\mathcal{D}([a,b], S^\alpha_a, S^\alpha_b, \lambda)$ *uniformément en* α, *c'est-à-dire que* $\gamma > 0$ *et* $\varepsilon > 0$ *peuvent être choisis indépendamment de* α *; ici* $S^\alpha_c = B(K_c, \lambda_0) \cap X_\alpha$ *pour* $c \in \{a,b\}$.

Preuve La condition $(PS)^*_c$ implique qu'il existe $\beta \in \Lambda$, $\sigma > 0$ et $\delta > 0$ tels que $B(K_c, 2\delta) \subset B(K_c, \lambda_0)$ pour $c \in \{a,b\}$ et pour tout $\alpha \geq \beta$, on a

$$|Df_\alpha|(u) > \sigma \quad \text{pour tout } u \in f_\alpha^{-1}[a-2\delta, b+2\delta] \backslash \big(B(K_a,\delta) \cup B(K_b,\delta)\big)\,.$$

En procédant comme dans la preuve du théorème 2.14 et 2.15 de [5], on obtient l'existence de $\varepsilon, \gamma > 0$ (indépendants de α) et de η_α voulus. ■

Remarque 4.8 Il est important de constater que dans le théorème précédent β dépend aussi de λ. En outre, il est possible qu'aucune fonction f_α vérifie $\mathcal{D}([a,b], S^\alpha_a, S^\alpha_b, \lambda)$ pour tout $\lambda > 0$. Conséquemment, il est possible qu'aucune fonction f_α vérifie les conclusions des lemmes de déformation obtenus dans [5]. De plus, il est important de remarquer que dans le théorème précédent, on n'a pas $S^\alpha_c = K_c \cap X_\alpha$, ni $S^\alpha_c = \{x \in X_\alpha : |Df_\alpha|(x) = 0, f(x) = c\}$ pour $c \in \{a,b\}$, puisque ces ensembles n'auraient pas permis d'obtenir les résultats de la section 6.

Corollaire 4.9 *Soient X vérifiant* (4.1), $f\colon X \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $b \geq a = \inf f(X) > -\infty$. *Supposons que f vérifie* $(PS)^*_c$ *pour tout* $c \in [a,b]$, *et* $K_c = \varnothing$ *pour tout* $c \in\ ]a,b[$. *Alors, pour tout* $\lambda > 0$, *il existe* $k > 0$ *tel que*

$$\{u \in X \backslash B(K_b, \lambda) : f(u) \leq b\} \subset B(K_a, k).$$

5 Existence et multiplicité de points critiques

Voici maintenant notre théorème principal qui généralise un résultat de [7]. Ce théorème est une conséquence directe du lemme 3.2 et du théorème 4.5.

Théorème 5.1 *Soit $f\colon X \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons qu'il existe deux paires (B, A) et (Q, P) qui s'enlacent et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\sup f(A) \leq a = \inf f(Q) \leq \sup f(B) = b \leq \inf f(P),$$

et $d(A \cap f^{-1}(a), Q \cap f^{-1}[a, a+\delta]) > 0$, $d(B \cap f^{-1}[b-\delta, b], P \cap f^{-1}(b)) > 0$ pour un certain $\delta > 0$. Si f vérifie $(PS)_c$ pour tout $c \in [a, b]$, alors au moins un des énoncés suivants est vérifié :

(1) *$a = b$ et $d(K_a, Q) = d(K_b, B) = 0$;*
(2) *$a < b$ et $K_c \neq \varnothing$ pour un certain $c \in\ ]a, b[$;*
(3) *$a < b$ et, $d(K_b, B) = 0$ ou $d(K_a, Q) = 0$.*

Démonstration Le théorème 4.5 implique que f vérifie $\mathcal{D}([a, b], K_a, K_b, \lambda)$ pour tout $\lambda > 0$. En particulier, les énoncés (2) et (5) du lemme 3.2 ne peuvent être vérifiés. ■

Le théorème précédent conduit à l'établissement de plusieurs résultats de multiplicité. Le premier que nous énonçons présente une certaine analogie avec un résultat de multiplicité en présence d'enlacement mutuel obtenu par Schechter et Tintarev [12]. Il généralise un résultat de [7].

Corollaire 5.2 *Soit $f\colon X \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons qu'il existe deux paires (B, A) et (Q, P) telles qu'il y ait enlacement entre (B, A) et $(P, \varnothing)$, et entre $(A, \varnothing)$ et (Q, P), et telles que*

$$-\infty < m = \inf f(Q) \leq \sup f(A) = a \leq \inf f(P) \leq \sup f(B) = M < \infty,$$

et $d\big(A \cap f^{-1}[a-\delta, a], P \cap f^{-1}[a, a+\delta]\big) > 0$ pour un certain $\delta > 0$. Si f vérifie $(PS)_c$ pour tout $c \in [m, M]$ alors f possède au moins deux points critiques.

Théorème 5.3 *Soient f, (B, A) et (Q, P) vérifiant les hypothèses du théorème* 5.1. *Si f est bornée inférieurement et vérifie $(PS)_c$ pour tout $c \in [\inf f(X), b]$ et si $A \neq \varnothing$ (resp. f bornée supérieurement et vérifie $(PS)_c$ pour tout $c \in [a, \sup f(X)]$ et $P \neq \varnothing$), alors f possède au moins deux points critiques.*

Preuve La condition de Palais-Smale assure l'existence d'un point critique u_0 tel que $f(u_0) = c_0 = \inf f(X)$.

D'autre part, le théorème 5.1 garantit l'existence d'une valeur critique $c_1 \in [a, b]$ telle que $c_1 \in\ ]a, b[$, ou $c_1 = a$ et $d(K_{c_1}, Q) = 0$, ou $c_1 = b$ et $d(K_{c_1}, B) = 0$. Si $c_0 < c_1$, on a la conclusion. Sinon, $a = c_0 = c_1$, $d(K_a, Q) = 0$ et tous les éléments de A sont des points critiques. Puisque $d(A \cap f^{-1}(a), Q \cap f^{-1}[a, a+\delta]) > 0$, il existe donc au moins deux points critiques. ■

En précisant les ensembles qui s'enlacent et en imposant des hypothèses un peu plus fortes, un troisième point critique peut être obtenu. On généralise ainsi des résultats sur l'enlacement local de Brezis et Nirenberg [2], Liu et Li [10] et Picard [11].

Théorème 5.4 *Soit $E = E_1 \oplus E_2$ où E_1, E_2 sont des espaces de Banach non triviaux et* $\dim E_1 < \infty$ *(resp.* $\dim E_2 < \infty$*). Soit $f\colon E \to \mathbb{R}$ une fonction continue et supposons que*

(i) *il existe r et $R > 0$ tels que*

$$\sup f(\partial B_1(r)) \leq \inf f(B_2(R)) \leq \sup f(B_1(r)) \leq \inf f(\partial B_2(R));$$

(ii) *f est bornée inférieurement (resp. f est bornée supérieurement) ;*
(iii) *f vérifie $(PS)_c$ pour tout $c \in \mathbb{R}$.*

Alors f a au moins trois points critiques.

Preuve Posons $m = \inf f(B_2(R))$ et $M = \sup f(B_1(r))$. Il découle du théorème précédent l'existence de deux points critiques u_0, u_1 tels que $f(u_0) = c_0 = \inf f(E)$ et $f(u_1) = c_1 \in [m, M]$ où soit $c_1 \in \ ]m, M[$, soit $c_1 = m$ et $d(K_{c_1}, B_2(R)) = 0$, ou soit $c_1 = M$ et $d(K_{c_1}, B_1(r)) = 0$.

Supposons qu'il y ait exactement deux points critiques. En particulier, on a $c_0 < m$, $d(K_m, \partial B_1(r)) > 0$ et $d(K_M, \partial B_2(R)) > 0$. Soient $\delta, s > 0$ tels que

$$f(u) \leq c_0 + \delta < m \quad \text{pour tout } u \in B(u_0, s).$$

Soit $\lambda < \min\{\delta, s, r, R, d(K_m, \partial B_1(r)), d(K_M, \partial B_2(R))\}$. En vertu du théorème 4.5, f vérifie $\mathcal{D}([c_0, m], \{u_0\}, K_m, \lambda)$. Ainsi, il existe $\eta\colon E \times [0,1] \to E$ et $\varepsilon > 0$ vérifiant les conditions de la définition 3.1.

Définissons

$$\phi(u,t) = \begin{cases} u_0, & \text{si } u = 0 \text{ et } t = 1, \\ u, & \text{si } u \in B_1(r) \text{ et } t = 0, \\ \eta(u,t), & \text{si } u \in \partial B_1(r) \text{ et } t \in [0,1], \\ \frac{\|u\|}{r}\eta\big(\frac{ru}{\|u\|}, 1\big) + \big(1 - \frac{\|u\|}{r}\big)u_0, & \text{si } u \in B_1(r)\backslash\{0\} \text{ et } t = 1. \end{cases}$$

On déduit l'existence de $\xi > 0$ tel que

$$d\big(\phi\big(\partial(B_1(r) \times [0,1])\big) \cap f^{-1}(M), \partial B_2(R) \cap f^{-1}[M, M+\varepsilon]\big) \geq \xi.$$

Soit $\Phi\colon B_1(r) \times [0,1] \to E$ un prolongement continu de ϕ. On peut vérifier que

$$\Big(\Phi(B_1(r) \times [0,1]), \phi\big(\partial(B_1(r) \times [0,1])\big)\Big) \quad \text{enlace} \quad \big(\partial B_2(R), \varnothing\big).$$

De nouveau, le théorème 5.1 implique l'existence d'un $c_2 \geq M$ tel que $K_{c_2} \neq \varnothing$ et si $c_2 = M$ alors $d(K_{c_2}, \partial B_2(R)) = 0$; contradiction. ∎

Le même type d'arguments permet de démontrer le résultat suivant.

Théorème 5.5 *Soit $E = E_1 \oplus E_2 \oplus e\mathbb{R}$ où $e \neq 0$, E_1, E_2 sont des espaces de Banach non triviaux et* $\dim E_1 < \infty$. *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue et supposons que*

(i) *il existe r et $R > 0$ tels que*

$$\sup f(e + \partial B_1(r)) \leq \inf f(E^+_{2,e}) \leq \sup f(e + B_1(r)) \leq \inf f(E_2);$$

(ii) *f est bornée inférieurement ;*
(iii) *f vérifie $(PS)_c$ pour tout $c \in \mathbb{R}$.*

Alors f a au moins trois points critiques.

6 Résultats sous la condition de Palais-Smale étoile

Considérons maintenant le cas où X est un espace métrique complet vérifiant (4.1). Nous généralisons maintenant notre théorème principal.

Théorème 6.1 *Soient X vérifiant* (4.1) *et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ et deux paires (B, A) et (Q, P) tels que*

$$\sup f(A) \leq a = \inf f(Q) \leq \sup f(B) = b \leq \inf f(P),$$

$$\xi = \min\{d(A \cap f^{-1}(a), Q \cap f^{-1}[a, a + \delta]), d(B \cap f^{-1}[b - \delta, b], P \cap f^{-1}(b))\} > 0,$$

et il existe $\beta \in \Lambda$ tel que pour tout $\alpha \geq \beta$, $(B \cap X_\alpha, A \cap X_\alpha)$ et $(Q \cap X_\alpha, P \cap X_\alpha)$ s'enlacent. Si f vérifie $(PS)^*_c$ pour tout $c \in [a, b]$, alors au moins un des énoncés suivants est vérifié :

(1) *$a = b$ et $d(K_a, Q) = d(K_b, B) = 0$;*
(2) *$a < b$ et $K_c \neq \varnothing$ pour un certain $c \in \,]a, b[$;*
(3) *$a < b$ et, $d(K_b, B) = 0$ ou $d(K_a, Q) = 0$.*

Preuve Remarquons d'abord que pour $\alpha \geq \beta$, on déduit du fait que $(B \cap X_\alpha, A \cap X_\alpha)$ et $(Q \cap X_\alpha, P \cap X_\alpha)$ s'enlacent que $B \cap Q \cap X_\alpha \neq \varnothing$ et donc

$$\sup f(A \cap X_\alpha) \leq a \leq \inf f(Q \cap X_\alpha) \leq \sup f(B \cap X_\alpha) \leq b \leq \inf f(P \cap X_\alpha).$$

Soient $\lambda, \lambda_0 > 0$ qui seront précisés plus loin. Posons $S^\alpha_c = B(K_c, \lambda_0) \cap X_\alpha$. Supposons que $K_c = \varnothing$ pour tout $c \in \,]a, b[$. Le théorème 4.7 implique l'existence de $\tilde{\beta} \geq \beta$ tel que pour tout $\alpha \geq \tilde{\beta}$, f_α vérifie $\mathcal{D}([a, b], S^\alpha_a, S^\alpha_b, \lambda)$.
1*er cas* : $a = b$. Supposons que $\max\{d(K_b, B), d(K_a, Q)\} > 0$. Fixons

$$\lambda_0 = \max\{d(K_b, B), d(K_a, Q)\}/3 \quad \text{et} \quad \lambda < \min\{\delta, \lambda_0, \xi\}.$$

Remarquons que

$$\lambda < \max\{d(S^\alpha_a, Q \cap X_\alpha), d(S^\alpha_b, B \cap X_\alpha)\}/2.$$

Le lemme 3.2 appliqué à f_α pour $\alpha \geq \tilde{\beta}$ implique que

$$d(S_a^\alpha, Q \cap X_\alpha) = d(S_b^\alpha, B \cap X_\alpha) = 0$$

et conséquemment que $\max\{d(K_b, B), d(K_a, Q)\} \leq \lambda_0$; contradiction.

2ième cas: $a < b$. Supposons de plus que $\min\{d(K_b, B), d(K_a, Q)\} > 0$. Fixons $\lambda_0 = \min\{d(K_b, B), d(K_a, Q)\}/2$ et $\lambda < \min\{\delta, \lambda_0, \xi\}$. Ainsi,

$$\lambda < \min\{d(S_a^\alpha, Q \cap X_\alpha), d(S_b^\alpha, B \cap X_\alpha)\}.$$

De nouveau, le lemme 3.2 appliqué à f_α pour $\alpha \geq \tilde{\beta}$ implique que $d(S_a^\alpha, Q \cap X_\alpha) = 0$ ou $d(S_b^\alpha, B \cap X_\alpha) = 0$ et conséquemment, que $\min\{d(K_b, B), d(K_a, Q)\} \leq \lambda_0$; contradiction. ■

Nous considérons maintenant un espace $E = E_1 \oplus E_2$ où, pour $i = 1, 2$, E_i est un espace de Banach non trivial tel que

$$E_{i,1} \subset E_{i,2} \subset E_{i,3} \subset \cdots \subset E_i, \quad E_i = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_{i,n}}, \quad \text{et} \tag{6.1}$$

$$\dim E_{i,n} < \infty \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Introduisons sur $\mathbb{N}^2$ l'ordre suivant :

$$\beta = (\beta_1, \beta_2) \leq \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \iff \beta_1 \leq \alpha_1,\ \beta_2 \leq \alpha_2.$$

Voici une généralisation d'un résultat de Li et Willem [9] établissant l'existence de trois points critiques, voir aussi Picard [11].

Théorème 6.2 *Soit $E = E_1 \oplus E_2$ un espace de Banach vérifiant* (6.1) *et soit $f\colon E \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons que*

(i) *il existe r et $R > 0$ tels que*

$$\sup f(\partial B_1(r)) \leq \inf f(B_2(R)) \leq \sup f(B_1(r)) \leq \inf f(\partial B_2(R));$$

(ii) *f est bornée inférieurement (ou supérieurement) ;*
(iii) *f vérifie $(PS)_c^*$ pour tout $c \in \mathbb{R}$;*
(iv) *f envoie les bornés sur les bornés.*

Alors f a au moins trois points critiques.

Preuve Notons $X_\alpha = E_{1,\alpha_1} \oplus E_{2,\alpha_2}$ où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. On procède comme dans la preuve du théorème 5.4. Posons $m = \inf f(B_2(R))$ et $M = \sup f(B_1(r))$. La condition $(PS)_c^*$ implique l'existence d'un point critique u_0 tel que $f(u_0) = \inf f(E)$.

D'autre part, le théorème 6.1 garantit l'existence d'une valeur critique $c_1 \in [m, M]$ telle que $c_1 \in\ ]m, M[$, ou $c_1 = m$ et $d(K_{c_1}, B_2(R)) = 0$, ou $c_1 = M$ et $d(K_{c_1}, B_1(r)) = 0$. Il existe donc au moins deux points critiques.

Supposons qu'il y ait exactement deux points critiques. En particulier, on a $c_0 < m$ et $\lambda_0 = \min\{d(K_m, \partial B_1(r)), d(K_M, \partial B_2(R))\}/2 > 0$. Soient $\delta, s > 0$ tels que

$$f(u) \leq c_0 + \delta < m \quad \text{pour tout } u \in B(u_0, 2s).$$

Fixons $\lambda < \min\{\delta, s, r, R, \lambda_0\}$. Le théorème 4.7 implique l'existence de $\beta \in \mathbb{N}^2$ tel que f_α vérifie $\mathcal{D}\big([c_0, m], B(u_0, s) \cap X_\alpha, B(K_m, \lambda_0) \cap X_\alpha, \lambda\big)$ pour tout $\alpha \geq \beta$. Aussi, il découle du corollaire 4.9 l'existence de $k > r$ tel que

$$\{u \in E : f(u) \leq m\} \subset B(0, k). \tag{6.2}$$

En procédant comme dans la preuve du théorème 5.4, on déduit l'existence de $\xi > 0$ et on construit pour tout $\alpha \geq \beta$ une paire (B_α, A_α) qui enlace $(\partial B_2(R) \cap E_\alpha, \varnothing)$ dans X_α et telle que $A_\alpha \backslash B_1(r) \subset \{u \in E : f(u) \leq m\}$, $B_\alpha \subset B(0, k)$,

$$d(A_\alpha \cap f^{-1}(M), \partial B_2(R) \cap E_\alpha \cap f^{-1}[M, M + \varepsilon]) \geq \xi,$$

et

$$\sup f_\alpha(A_\alpha) \leq M \leq \inf f(\partial B_2(R) \cap E_\alpha) \leq \sup f_\alpha(B_\alpha) \leq \sup f(B(0, k)).$$

En vertu de l'hypothèse (iv), on peut choisir $N \in \,]\sup f(B(0, k)), \infty[$.

Puisqu'il a été supposé que l'intervalle $]M, N]$ ne contenait aucune valeur critique, le théorème 4.7 implique l'existence de $\hat{\beta} \geq \beta$ tel que pour tout $\alpha \geq \hat{\beta}$, f_α vérifie $\mathcal{D}([M, N], B(K_M, \lambda_0) \cap X_\alpha, \varnothing, \lambda)$. Le lemme 3.2 appliqué à f_α implique que $d(B(K_M, \lambda_0) \cap X_\alpha, \partial B_2(R) \cap E_\alpha) = 0$ et donc que $d(K_M, \partial B_2(R)) \leq \lambda_0$; contradiction. ∎

7 Applications

Nous présentons des applications de résultats précédents à un problème aux limites pour une équation quasi-linéaire elliptique.

$$Qu + a(x)u = g(x, u) \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{7.1}$$

où

$$Qu = -\nabla \cdot (A(x, u)\nabla u) + \frac{1}{2}\nabla u \frac{\partial A}{\partial s}(x, u)\nabla u,$$

et $A(x, s) \in MS_n$ l'espace des matrices réelles symétriques $n \times n$.

Théorème 7.1 *Soient Ω un domaine borné lisse dans $\mathbb{R}^n$, $g \colon \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory, $a \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $A \colon \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to MS_n$. Supposons que les conditions suivantes soient vérifiées :*

(H1) *A est mesurable en x pour tout s et de classe C^1 en s presque pour tout x. De plus, il existe $m \geq 1$ et $C > 0$ tels que*

$$|A(x, s)| \leq C, \quad |\frac{\partial A}{\partial s}(x, s)| \leq C, \quad s\xi\frac{\partial A}{\partial s}(x, s)\xi \geq 0 \quad |\xi|^2 \leq \xi A(x, s)\xi \leq m|\xi|^2;$$

(H2) *l'ensemble des valeurs propres de* $-\Delta + a$ *est de la forme suivante :* $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_k < \lambda_{k+1} \leq \cdots$ *;*

(H3) *il existe* $b > 0$*,* $p < (n+2)/(n-2)$ *et* $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ *tels que*

$$|g(x,s)| \leq \alpha(x) + b|s|^p\ ;$$

(H4) *il existe* $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}$*,* $B > 0$*,* $q > 2$ *et* $w_i \in L^1(\Omega)$*,* $i = 1, 2$*, tels que*

$$\lambda_k < (\nu_1 - (m-1)\|a\|_\infty)/m, \quad \nu_2 < \lambda_{k+1}$$

et

$$\nu_1 s^2 - w_1(x) \leq 2G(x,s) \leq w_2(x) + \nu_2 s^2 + B|s|^q,$$

où $G(x,s) = \int_0^s g(x,t)\,dt$ *;*

(H5) *il existe* $\beta > 2$*,* $\gamma \in\,]0, \beta - 2[$ *et* $R > 0$ *tels que pour tout* $|s| \geq R$*,*

$$\beta G(x,s) \leq sg(x,s) + \left(\frac{\beta}{2} - 1\right) a(x)s^2 \quad \text{et} \quad \gamma\xi A(x,s)\xi \geq s\xi\frac{\partial A}{\partial s}(x,s)\xi.$$

Alors si $\int_\Omega w_1(x) + w_2(x)\,dx$ *est suffisamment petit, le problème* (7.2) *a au moins une solution faible.*

Preuve Définissons $f\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ par

$$f(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla u A(x,u)\nabla u + a(x)u^2\,dx - \int_\Omega G(x,u)\,dx.$$

La fonctionnelle f vérifie la condition $(PS)_c$ pour tout $c \in \mathbb{R}$ en vertu des résultats de [3, theorems 2.1.3, 2.2.4, Lemma 2.3.2] appliqués à $\tilde{g}(x,s) = g(x,s) - a(x)s$. Ainsi dans l'hypothèse (2.15) de [3], l'inégalité $\beta\tilde{G}(x,s) \leq s\tilde{g}(x,s)$ devient $\beta G(x,s) \leq sg(x,s) + \left(\frac{\beta}{2} - 1\right) a(x)s^2$. Aussi, dans [3], l'hypothèse $\tilde{G}(x,s) > 0$ pour $|s| \geq R$ n'est pas utilisée pour obtenir la condition $(\mathrm{PS})_c$.

Notons E_1 l'espace propre associé à l'ensemble des valeurs propres $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ de $-\Delta + a$ et E_2 son complémentaire orthogonal.

Sur E_2, on a

$$f(u) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + a(x)u^2 - \nu_2 u^2 - B|u|^q - w_2(x)\,dx.$$

Ainsi, il existe $r > 0$ et $d > 0$ tels que pour tout $u \in E_2$ vérifiant $\|u\| = r$, on a

$$f(u) \geq d - \frac{1}{2}\int_\Omega w_2(x)\,dx.$$

D'autre part, sur E_1 on a

$$f(u) \leq \frac{1}{2}\int_\Omega m|\nabla u|^2 + a(x)u^2 - \nu_1 u^2 + w_1(x)\,dx.$$

Il découle de (H4) que

$$f(u) \leq \frac{1}{2} \int_\Omega w_1(x)\, dx.$$

Ainsi donc, pour $\int_\Omega w_1(x) + w_2(x)\, dx \leq 2d$, on a

$$\sup f(E_1) \leq \inf f(\partial B_2(r)).$$

La conclusion découle du théorème 5.1 et du fait que $(E_1, \emptyset)$ enlace $(B_2(r), \partial B_2(r))$. ■

Considérons maintenant le problème quasi-linéaire suivant.

$$Qu + a(x)u = \lambda g(x, u) + h(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{7.2}$$

où Q est défini comme précédemment.

Théorème 7.2 *Soient Ω un domaine borné lisse dans $\mathbb{R}^n$, $g\colon \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory, $h \in L^r(\Omega)$ avec $r > 2n/(n+2)$, $a\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $A\colon \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to MS_n$. Supposons que* (H1),(H2),(H3) *et les conditions suivantes soient vérifiées :*

(H6) $\lambda_k < (1-m)\|a\|_\infty/m \leq 0 < \lambda_{k+1}$;

(H7) $\limsup_{|s|\to\infty} \frac{g(x,s)}{s} < 0$ *uniformément en* x ;

(H8) $\limsup_{s\to 0} \frac{G(x,s)}{s^2} = 0$ *uniformément en* x, *où* $G(x,s) = \int_0^s g(x,t)\, dt$.

Alors le problème (7.1) *possède au moins trois solutions faibles si λ est suffisamment grand, et si $\|h\|_{L^r}$ est suffisamment petit.*

Preuve Définissons $f\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ par

$$f(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \nabla u A(x,u) \nabla u + a(x)u^2\, dx - \int_\Omega \lambda G(x,u) + h(x)u\, dx.$$

Il découle des hypothèses (H3) et (H7) l'existence de $\varepsilon > 0$ et $\hat{\alpha} \in L^\infty(\Omega)$ tels que

$$G(x,s) \leq \hat{\alpha}(x)|s| - \varepsilon s^2. \tag{7.3}$$

Ceci combiné à (H1) implique que pour λ suffisamment grand f est bornée inférieurement.

Par ailleurs, la condition $(PS)_c$ pour tout $c \in \mathbb{R}$ découle directement de (H1), (7.3) et des théorèmes 2.1.3, 2.2.4 et 2.2.8 de [3] car les suites de Palais-Smale sont bornées.

Écrivons $H_0^1(\Omega) = E_1 \oplus E_2$ où E_1 est l'espace propre engendré par les valeurs propres négatives de $-\Delta + a$, et E_2 est son complémentaire orthogonal.

Des hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H8) et du fait que E_1 est de dimension finie, on déduit pour $\varepsilon > 0$, l'existence de $\theta_i, c_i, d_i > 0$, $i = 1, 2$ tels que

$$f(u) \leq \theta_1(m\lambda_k + (m-1)\|a\|_\infty + \varepsilon)\|u\|^2 + c_1\|u\|^{2n/n-2} + d_1\|h\|_{L^r}\|u\| \qquad \text{sur } E_1,$$

$$f(u) \geq \theta_2(\lambda_{k+1} - \varepsilon)\|u\|^2 - c_2\|u\|^{2n/n-2} - d_2\|h\|_{L^r}\|u\| \qquad \text{sur } E_2.$$

Ainsi, en fixant ε suffisamment petit, il existe $r, R > 0$ tels que

$$\sup f(\partial B_1(r)) \leq \inf f(B_2(R)) \leq \sup f(B_1(r)) \leq \inf f(\partial B_2(R))$$

lorsque $\|h\|_{L^r}$ est suffisamment petit. La conclusion découle du théorème 5.4. ■

Remerciements L'auteur exprime ses remerciements à l'arbitre pour ses remarques pertinentes.

Références

[1] V. Benci et P. H. Rabinowitz, *Critical point theorems for indefinite functionals.* Invent. Math. **52**(1979), 241–273.

[2] H. Brezis et L. Nirenberg, *Remarks on finding critical points.* Comm. Pure Appl. Math. **64**(1991), 939–963.

[3] A. Canino et M. Degiovanni, *Nonsmooth critical point theory and quasilinear elliptic equations*, Topological methods in differential equations and inclusions, NATO Adv. Sci. Inst. Series, Ser. C Math. and Phys. Sci., 472, Kluwer, Dordrecht, 1995, pp. 1–50.

[4] J.-N. Corvellec, *On critical point theory with the $(PS)^*$ condition*, Calculus of variations and differential equations. (A. Ioffe, S. Reich and I. Shafrir, eds.) Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics, 410, CRC Press, Boca Raton, FL, 2000, pp. 65–81.

[5] J.-N. Corvellec, M. Degiovanni et M. Marzocchi, *Deformation properties for continuous functionals and critical point theory.* Topol. Methods Nonlinear Anal. **1**(1993), 151–171.

[6] M. Degiovanni et M. Marzocchi, *A critical point theory for nonsmooth functionals.* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **167**(1994), 73–100.

[7] M. Frigon, *On a new notion of linking and application to elliptic problems at resonance.* J. Differential Equations **153**(1999), 96–120.

[8] N. Ghoussoub, *Location, multiplicity and Morse indices of min-max critical points.* J. Reine Angew. Math. **417**(1991), 27–76.

[9] S. Li et M. Willem, *Applications of local linking to critical point theory.* J. Math. Anal. Appl. **189**(1995), 6–32.

[10] J. Q. Liu et S. J. Li, *Some existence theorems on multiple critical points and their applications.* Kexue Tongbao **17**(1984), 1025–1027.

[11] F. Picard, *Généralisation de résultats sur l'enlacement local en théorie des points critiques.* Mémoire de maîtrise, Université de Montréal, Montréal, 1999. **65** Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

[12] M. Schechter et K. Tintarev, *Pairs of critical points produced by linking subsets with applications to semilinear elliptic problems.* Bull. Soc. Math. Belg. Sér. B **44**(1992), 249–261.

[13] M. Schechter, *Infinite dimensional linking.* Duke Math. J. **94**(1998), 573–595.

Département de mathématiques
et statistique
Université de Montréal
C. P. 6128, Succ. Centre-ville
Montréal, QC
H3C 3J7
e-mail: frigon@dms.umontreal.ca