C. R. Acad. Sci. Paris, t. 310, Série I, p. 371-374, 1990

Équations différentielles/*Ordinary Differential Equations*

Sur l'existence de solutions pour l'équation différentielle $u'(z)=f(z, u(z))$ dans un domaine complexe

Marlène FRIGON

Résumé – Dans cette Note [1], en utilisant une alternative bien connue de Leray-Schauder, nous présentons un résultat concernant l'existence globale d'une solution $u(z)$ pour l'équation différentielle dans un domaine complexe : $u'(z)=f(z, u(z))$, $z\in B_T(\mathbb{C})$, $u(0)=\alpha\in\mathbb{C}^n$ où $f: B_T(\mathbb{C})\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ vérifie des conditions convenables.

On the existence of solutions to the differential equation $u'(z)=f(z, u(z))$ in a complex domain

Abstract – *In this Note, using a well known alternative of Leray-Schauder, we present a result on the global existence of a solution $u(z)$ to the differential equation in a complex domain: $u'(z)=f(z, u(z))$, $z\in B_T(\mathbb{C})$, $u(0)=\alpha\in\mathbb{C}^n$.*

Soit $\|\,.\,\|$ une norme hermitienne sur $\mathbb{C}^n$ et soit $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ la forme sesquilinéaire définissant le produit scalaire associé à cette norme. Notons $B_T=\{z\in\mathbb{C}:|z|<T\}$. Soit $A^m(\bar{B}_T;\mathbb{C}^n)$ l'espace de Banach des fonctions $u:\bar{B}_T\to\mathbb{C}^n$ holomorphes sur B_T, dont les dérivées $d^i u/dz^i$ [notées $u^{(i)}$] sont continues sur $\bar{B}_T$ jusqu'à l'ordre m, et dont la norme est $\|u\|_m=\sup\{\|u\|_0,\ldots,\|u^{(m)}\|_0\}$ où $\|u\|_0=\sup\{\|u(z)\|:z\in\bar{B}_T\}$, $(m\in\mathbb{N}\cup\{0\})$. Écrivons u' pour $u^{(1)}$ et A pour A^0.

Le lemme suivant sera utilisé de façon essentielle dans la suite :

LEMME. – *Soient $u\in A^1(\bar{B}_T;\mathbb{C}^n)$ et $z_0\in\bar{B}_T\setminus\{0\}$. Alors, pour tout $t\in[0, 1]$ tel que $\|u(tz_0)\|>0$, $(d/dt)\|u(tz_0)\|$ existe et $|d/dt\|u(tz_0)\||\leqq|z_0|\,\|u'(tz_0)\|$.*

Preuve. – Nous avons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(tz_0)\|^2=\frac{1}{2}\left\langle u(tz_0), \frac{d\bar{u}}{dt}(tz_0)\right\rangle+\frac{1}{2}\left\langle\frac{du}{dt}(tz_0), \bar{u}(tz_0)\right\rangle$$

$$=\operatorname{Re}\left\langle\frac{du}{dt}(tz_0), \bar{u}(tz_0)\right\rangle=\operatorname{Re}(z_0\langle u'(tz_0), \bar{u}(tz_0)\rangle).$$

Donc pour tout $t\in[0, 1]$ tel que $\|u(tz_0)\|>0$, $(d/dt)\,\|u(tz_0)\|$ existe et

$$\left|\frac{d}{dt}\|u(tz_0)\|\right|\leqq|z_0|\,\|u'(tz_0)\|.$$

Nous sommes en mesure d'énoncer et de démontrer notre résultat de base.

THÉORÈME 1. – *Soit $f:\bar{B}_T\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ une application vérifiant les hypothèses suivantes :*

(a) $f(z, u)$ est holomorphe sur $B_T\times\mathbb{C}^n$ et continue sur $\bar{B}_T\times\mathbb{C}^n$;

(b) il existe $\varphi:[0,\infty)\to(0,\infty)$ continue telle que $\|f(z, u)\|\leqq\varphi(\|u\|)$ pour tout $(z, u)\in\bar{B}_T\times\mathbb{C}^n$.

Fixons $\alpha\in\mathbb{C}^n$ et supposons que $T<T_\alpha=\int_{\|\alpha\|}^{\infty}ds/\varphi(s)$.

Alors le problème

$$(*)\qquad\begin{cases}u'(z)=f(z, u(z)), & z\in B_T\\ u(0)=\alpha\end{cases}$$

Note présentée par Jean LERAY.

0764-4442/90/03100371 $ 2.00 © Académie des Sciences

possède une unique solution $u\in A^1(\bar{B}_T;\mathbb{C}^n)$.

Preuve. — Considérons la famille de problèmes suivants :

$$(*)_\lambda \qquad \begin{cases} u'(z)=\lambda f(z, u(z)), & z\in B_T \\ u(0)=\alpha \end{cases}$$

où $\lambda\in[0, 1]$.

Majoration a priori *des solutions.* — Soit $T<T_\infty$ et soit $u\in A^1(\bar{B}_T;\mathbb{C}^n)$ une solution du problème $(*)_\lambda$ pour un certain $\lambda\in[0, 1]$. Alors $\|u'(z)\|\leqq\|f(z, u(z))\|\leqq\varphi(\|u(z)\|)$ pour tout $z\in\bar{B}_T$. Soit $z_0\in\bar{B}_T$ pour lequel $\|u(z)\|$ atteint son maximum. Supposons que $\|u(z_0)\|>\|\alpha\|$. Puisque $u(0)=\alpha$, il existe $a\in[0, 1)$ tel que $\|u(tz_0)\|>\|\alpha\|$ pour tout $t\in(a, 1]$ et $\|u(az_0)\|=\|\alpha\|$. Vu le lemme précédent,

$$\frac{d}{dt}\|u(tz_0)\|\leqq T\|u'(tz_0)\|\leqq T\varphi(\|u(tz_0)\|) \quad \text{pour tout } t\in(a, 1].$$

D'où

$$\frac{(d/dt)\|u(tz_0)\|}{\varphi(\|u(tz_0)\|)}\leqq T.$$

En intégrant de a à 1 et par la règle de changement de variables, il vient :

$$\int_{\|\alpha\|}^{\|u(z_0)\|}\frac{1}{\varphi(s)}ds=\int_a^1\frac{(d/dt)\|u(tz_0)\|}{\varphi(\|u(tz_0)\|)}\leqq T<T_\infty.$$

Il existe donc une constante $M>\|\alpha\|$ telle que $\|u\|_0<M$ pour toutes les solutions des problèmes $(*)_\lambda$.

Réduction au problème de point fixe. — Définissons l'opérateur

$$H:\ A(\bar{B}_T;\mathbb{C}^n)\to A(\bar{B}_T;\mathbb{C}^n) \quad \text{par} \quad H(u)(z)=\int_0^z f(z', u(z'))\,dz'.$$

L'opérateur H est continu et complètement continu. Les solutions de $(*)_\lambda$ pour $\lambda\in[0, 1]$ sont des points fixes de l'opérateur $\lambda H(\cdot)+\alpha$ et sont majorées dans $A(\bar{B}_T;\mathbb{C}^n)$ par la même constante M. Par conséquent, en utilisant l'alternative bien connue de Leray-Schauder (*voir* [1]) pour les applications continues et complètement continues, on obtient l'existence d'une solution du problème $(*)$. Cette solution est unique d'après la théorie des équations différentielles (*voir* [3]).

THÉORÈME 2. — *Soit* $f:\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ *une fonction holomorphe telle qu'il existe une fonction continue* $\varphi:[0,\infty)\to(0,\infty)$ *satisfaisant*

$$\|f(z, u)\|\leqq\varphi(\|u\|) \quad \textit{pour tout } (z, u)\in B_{T_0}\times\mathbb{C}^n \textit{ où } T_0=\int_0^\infty ds/\varphi(s).$$

Alors le problème $(*)$ *possède une unique solution holomorphe en* (z,α) *sur*

$$\left\{(z,\alpha)\in\mathbb{C}^{n+1}:|z|<\int_{\|\alpha\|}^{\infty}(1/\varphi(s))\,ds\right\}.$$

Preuve. — Pour $s\in[0,\infty)$, notons $T_s=\int_s^\infty ds'/\varphi(s')$.

Soient $\alpha\in\mathbb{C}^n$, et $\tilde{T}<\hat{T}<T_{\|\alpha\|}$. Vu le théorème 1, $(*)$ possède des solutions uniques $\tilde{u}$ et $\hat{u}$ holomorphes dans $B_{\tilde{T}}$ et $B_{\hat{T}}$ respectivement. Vu l'unicité de ces solutions, $\tilde{u}$ est la restriction de $\hat{u}$ à $B_{\tilde{T}}$. Il existe donc une unique fonction u_α holomorphe dans $B_{T_{\|\alpha\|}}$ telle que pour tout $\tilde{T}<T_{\|\alpha\|}$, $\tilde{u}$ est la restriction de u_α à $B_{\tilde{T}}$. Évidemment, u_α est une solution

de (∗). Vu la théorie des équations différentielles (*voir* [3]), $u(z, \alpha)=u_\alpha(z)$ est holomorphe en (z, α) sur $\{(z, \alpha)\in\mathbb{C}^{n+1} : |z|<T_{\|\alpha\|}\}$.

Nous présentons maintenant un théorème général de domaine d'existence de solution d'une équation différentielle.

THÉORÈME 3. — *Soient* $R\in(0, \infty]$ *et* $f : B_R\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ *une fonction holomorphe, et soit* $\varphi : [0, R)\times[0, \infty)\to(0, \infty)$ *une fonction continue et croissante de sa première variable telle que* $\|f(z, u)\|\leqq\varphi(r, \|u\|)$ *pour* $|z|\leqq r<R$ *et* $u\in\mathbb{C}^n$.

Alors le problème (∗) *possède une unique solution holomorphe en* (z, α) *sur*

$$\left\{(z, \alpha)\in B_R\times\mathbb{C}^n : |z|<\int_{\|\alpha\|}^{\infty}\frac{1}{\varphi(|z|, s)}\,ds\right\}.$$

Preuve. — Pour $(r, s)\in[0, R)\times[0, \infty)$, posons $T(r, s)=\int_s^{\infty} ds'/\varphi(r, s')$ et fixons $\alpha\in\mathbb{C}^n$.

La fonction $r\to T(r, \|\alpha\|)$ est continue, décroissante et $T(0, \|\alpha\|)>0$. Soit $r_{\|\alpha\|}<R$ tel que $r_{\|\alpha\|}=T(r_{\|\alpha\|}, \|\alpha\|)$. Si un tel $r_{\|\alpha\|}$ n'existe pas, soit $r_{\|\alpha\|}=R$. Vu le théorème 1, le problème (∗) a une unique solution holomorphe dans B_r, pour tout $r<r_{\|\alpha\|}$. En utilisant le même type d'arguments que dans la preuve du théorème 2, on montre qu'il existe une unique solution de (∗) holomorphe en (z, α) sur $\{(z, \alpha)\in B_R\times\mathbb{C}^n : |z|<T(|z|, \|\alpha\|)\}$.

COROLLAIRE. — *Soient* $R\in(0, \infty]$ *et* $f : B_R\times\mathbb{C}^{m\times n}\to\mathbb{C}^n$ *une fonction holomorphe. Supposons qu'il existe* $\varphi(r, s)$ *une fonction continue de* $[0, R)\times[0, \infty)$ *dans* $[0, \infty)$, *croissante en* r, *et telle que* $\varphi(0, 0)\neq 0$ *et*

$$\|f(z, U)\|\leqq\varphi(r, \|U\|)\quad \textit{pour}\quad |z|\leqq r<R\quad \textit{et}\quad U\in\mathbb{C}^{m\times n}.$$

Alors le problème

$$(**)\qquad \begin{cases} u^{(m)}(z)=f(z, u(z), \ldots, u^{(m-1)}(z)), & z\in B_T\\ u^{(k)}(0)=\alpha_k, \quad k=0, \ldots, m-1\end{cases}$$

possède une unique solution holomorphe en (z, α) *sur*

$$\left\{(z, \alpha)\in B_R\times\mathbb{C}^{m\times n} : |z|<\int_{\|\alpha\|}^{\infty}\frac{ds}{\Phi(|z|, s)}\right\}$$

où

$$\Phi(r, s)=\sqrt{s^2+\varphi(r, s)^2}\quad \textit{et}\quad \alpha=(\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}).$$

Preuve. — En posant $U=(u_0, \ldots, u_{m-1})\in\mathbb{C}^{m\times n}$ et $F : B_R\times\mathbb{C}^{m\times n}\to\mathbb{C}^{m\times n}$ définie par : $F(z, U)=(u_1, \ldots, u_{m-1}, f(z, U))$, on vérifie que les hypothèses du théorème 3 sont satisfaites et donc le problème $U'(z)=F(z, U(z))$, $U(0)=\alpha$, possède une unique solution $U=(u_0, \ldots, u_{m-1})$ holomorphe en (z, α) sur

$$\left\{(z, \alpha)\in B_R\times\mathbb{C}^{m\times n} : |z|<\int_{\|\alpha\|}^{\infty}\frac{ds}{\Phi(|z|, s)}\right\}.$$

Clairement, u_0 est la solution cherchée.

(1) Cette Note généralise quelques résultats de D. O'Regan [5].

Note remise le 18 décembre 1989, acceptée le 9 janvier 1990.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] J. DUGUNDJI et A. GRANAS, *Fixed point theory*, 1, P.W.N., Warszawa, 1982.

[2] M. FRIGON, Méthode de transversalité topologique appliquée à des problèmes non linéaires pour des équations différentielles ordinaires, *Thèse de Doctorat*, Université de Montréal, 1986.

[3] E. HILLE, *Ordinary differential equations in the complex domain*, Wiley & Sons, New York, 1976.

[4] E. L. INCE, *Ordinary differential equations*, Dover, New York, 1956.

[5] D. O'REGAN, Ordinary differential equations in the complex domain via topological transversality, *J. Diff. Equations*, 67, 1987, p. 111-121.

Département de Mathématiques, Université de Montréal, C. P. 6128, succ. A, Montréal, Canada, H3C 3J7.