

Sur l'existence de solutions pour l'équation différentielle $u'(z) = f(z, u(z))$ dans un domaine complexe

Marlène FRIGON

Résumé – Dans cette Note⁽¹⁾, en utilisant une alternative bien connue de Leray-Schauder, nous présentons un résultat concernant l'existence globale d'une solution $u(z)$ pour l'équation différentielle dans un domaine complexe : $u'(z) = f(z, u(z))$, $z \in B_T(\mathbb{C})$, $u(0) = \alpha \in \mathbb{C}^n$ où $f: B_T(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ vérifie des conditions convenables.

**On the existence of solutions to the differential equation $u'(z) = f(z, u(z))$
in a complex domain**

Abstract – In this Note, using a well known alternative of Leray-Schauder, we present a result on the global existence of a solution $u(z)$ to the differential equation in a complex domain: $u'(z) = f(z, u(z))$, $z \in B_T(\mathbb{C})$, $u(0) = \alpha \in \mathbb{C}^n$.

Soit $\|\cdot\|$ une norme hermitienne sur \mathbb{C}^n et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forme sesquilinéaire définissant le produit scalaire associé à cette norme. Notons $B_T = \{z \in \mathbb{C} : |z| < T\}$. Soit $A^m(\bar{B}_T; \mathbb{C}^n)$ l'espace de Banach des fonctions $u: \bar{B}_T \rightarrow \mathbb{C}^n$ holomorphes sur B_T , dont les dérivées $d^i u/dz^i$ [notées $u^{(i)}$] sont continues sur \bar{B}_T jusqu'à l'ordre m , et dont la norme est $\|u\|_m = \sup\{\|u\|_0, \dots, \|u^{(m)}\|_0\}$ où $\|u\|_0 = \sup\{\|u(z)\| : z \in \bar{B}_T\}$, ($m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). Écrivons u' pour $u^{(1)}$ et A pour A^0 .

Le lemme suivant sera utilisé de façon essentielle dans la suite :

LEMME. – Soient $u \in A^1(\bar{B}_T; \mathbb{C}^n)$ et $z_0 \in \bar{B}_T \setminus \{0\}$. Alors, pour tout $t \in [0, 1]$ tel que $\|u(tz_0)\| > 0$, $(d/dt)\|u(tz_0)\|$ existe et $|d/dt\|u(tz_0)\|| \leq |z_0| \|u'(tz_0)\|$.

Preuve. – Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(tz_0)\|^2 &= \frac{1}{2} \left\langle u(tz_0), \frac{d\bar{u}}{dt}(tz_0) \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \frac{du}{dt}(tz_0), \bar{u}(tz_0) \right\rangle \\ &= \operatorname{Re} \left\langle \frac{du}{dt}(tz_0), \bar{u}(tz_0) \right\rangle = \operatorname{Re} (z_0 \langle u'(tz_0), \bar{u}(tz_0) \rangle). \end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in [0, 1]$ tel que $\|u(tz_0)\| > 0$, $(d/dt)\|u(tz_0)\|$ existe et

$$\left| \frac{d}{dt} \|u(tz_0)\| \right| \leq |z_0| \|u'(tz_0)\|.$$

Nous sommes en mesure d'énoncer et de démontrer notre résultat de base.

THÉORÈME 1. – Soit $f: \bar{B}_T \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ une application vérifiant les hypothèses suivantes :
(a) $f(z, u)$ est holomorphe sur $B_T \times \mathbb{C}^n$ et continue sur $\bar{B}_T \times \mathbb{C}^n$;
(b) il existe $\varphi: [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ continue telle que $\|f(z, u)\| \leq \varphi(\|u\|)$ pour tout $(z, u) \in \bar{B}_T \times \mathbb{C}^n$.

Fixons $\alpha \in \mathbb{C}^n$ et supposons que $T < T_\alpha = \int_{\|\alpha\|}^\infty ds/\varphi(s)$.

Alors le problème

$$(*) \quad \begin{cases} u'(z) = f(z, u(z)), & z \in B_T \\ u(0) = \alpha \end{cases}$$

Note présentée par Jean LERAY.

possède une unique solution $u \in A^1(\bar{B}_T; \mathbb{C}^n)$.

Preuve. — Considérons la famille de problèmes suivants :

$$(*)_\lambda \quad \begin{cases} u'(z) = \lambda f(z, u(z)), & z \in B_T \\ u(0) = \alpha \end{cases}$$

où $\lambda \in [0, 1]$.

Majoration a priori des solutions. — Soit $T < T_\alpha$ et soit $u \in A^1(\bar{B}_T; \mathbb{C}^n)$ une solution du problème $(*)_\lambda$ pour un certain $\lambda \in [0, 1]$. Alors $\|u'(z)\| \leq \|f(z, u(z))\| \leq \varphi(\|u(z)\|)$ pour tout $z \in \bar{B}_T$. Soit $z_0 \in \bar{B}_T$ pour lequel $\|u(z)\|$ atteint son maximum. Supposons que $\|u(z_0)\| > \|\alpha\|$. Puisque $u(0) = \alpha$, il existe $a \in [0, 1]$ tel que $\|u(tz_0)\| > \|\alpha\|$ pour tout $t \in (a, 1]$ et $\|u(az_0)\| = \|\alpha\|$. Vu le lemme précédent,

$$\frac{d}{dt} \|u(tz_0)\| \leq T \|u'(tz_0)\| \leq T \varphi(\|u(tz_0)\|) \quad \text{pour tout } t \in (a, 1].$$

D'où

$$\frac{(d/dt) \|u(tz_0)\|}{\varphi(\|u(tz_0)\|)} \leq T.$$

En intégrant de a à 1 et par la règle de changement de variables, il vient :

$$\int_{\|\alpha\|}^{\|u(z_0)\|} \frac{1}{\varphi(s)} ds = \int_a^1 \frac{(d/dt) \|u(tz_0)\|}{\varphi(\|u(tz_0)\|)} dt \leq T < T_\alpha.$$

Il existe donc une constante $M > \|\alpha\|$ telle que $\|u\|_0 < M$ pour toutes les solutions des problèmes $(*)_\lambda$.

Réduction au problème de point fixe. — Définissons l'opérateur

$$H : A(\bar{B}_T; \mathbb{C}^n) \rightarrow A(\bar{B}_T; \mathbb{C}^n) \quad \text{par} \quad H(u)(z) = \int_0^z f(z', u(z')) dz'.$$

L'opérateur H est continu et complètement continu. Les solutions de $(*)_\lambda$ pour $\lambda \in [0, 1]$ sont des points fixes de l'opérateur $\lambda H(\cdot) + \alpha$ et sont majorées dans $A(\bar{B}_T; \mathbb{C}^n)$ par la même constante M . Par conséquent, en utilisant l'alternative bien connue de Leray-Schauder (voir [1]) pour les applications continues et complètement continues, on obtient l'existence d'une solution du problème $(*)$. Cette solution est unique d'après la théorie des équations différentielles (voir [3]).

THÉORÈME 2. — Soit $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ une fonction holomorphe telle qu'il existe une fonction continue $\varphi : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ satisfaisant

$$\|f(z, u)\| \leq \varphi(\|u\|) \quad \text{pour tout } (z, u) \in B_{T_0} \times \mathbb{C}^n \text{ où } T_0 = \int_0^\infty ds/\varphi(s).$$

Alors le problème $(*)$ possède une unique solution holomorphe en (z, α) sur

$$\left\{ (z, \alpha) \in \mathbb{C}^{n+1} : |z| < \int_{\|\alpha\|}^\infty (1/\varphi(s)) ds \right\}.$$

Preuve. — Pour $s \in [0, \infty)$, notons $T_s = \int_s^\infty ds'/\varphi(s')$.

Soient $\alpha \in \mathbb{C}^n$, et $\tilde{T} < \hat{T} < T_{\|\alpha\|}$. Vu le théorème 1, $(*)$ possède des solutions uniques \tilde{u} et \hat{u} holomorphes dans $B_{\tilde{T}}$ et $B_{\hat{T}}$ respectivement. Vu l'unicité de ces solutions, \tilde{u} est la restriction de \hat{u} à $B_{\tilde{T}}$. Il existe donc une unique fonction u_α holomorphe dans $B_{T_{\|\alpha\|}}$ telle que pour tout $\tilde{T} < T_{\|\alpha\|}$, \tilde{u} est la restriction de u_α à $B_{\tilde{T}}$. Évidemment, u_α est une solution

de (*). Vu la théorie des équations différentielles (voir [3]), $u(z, \alpha) = u_\alpha(z)$ est holomorphe en (z, α) sur $\{(z, \alpha) \in \mathbb{C}^{n+1} : |z| < T_{\|\alpha\|}\}$.

Nous présentons maintenant un théorème général de domaine d'existence de solution d'une équation différentielle.

THÉORÈME 3. — Soient $R \in (0, \infty]$ et $f: B_R \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ une fonction holomorphe, et soit $\varphi: [0, R) \times [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ une fonction continue et croissante de sa première variable telle que $\|f(z, u)\| \leq \varphi(r, \|u\|)$ pour $|z| \leq r < R$ et $u \in \mathbb{C}^n$.

Alors le problème (*) possède une unique solution holomorphe en (z, α) sur

$$\left\{ (z, \alpha) \in B_R \times \mathbb{C}^n : |z| < \int_{\|\alpha\|}^{\infty} \frac{1}{\varphi(|z|, s)} ds \right\}.$$

Preuve. — Pour $(r, s) \in [0, R) \times [0, \infty)$, posons $T(r, s) = \int_s^{\infty} ds'/\varphi(r, s')$ et fixons $\alpha \in \mathbb{C}^n$.

La fonction $r \rightarrow T(r, \|\alpha\|)$ est continue, décroissante et $T(0, \|\alpha\|) > 0$. Soit $r_{\|\alpha\|} < R$ tel que $r_{\|\alpha\|} = T(r_{\|\alpha\|}, \|\alpha\|)$. Si un tel $r_{\|\alpha\|}$ n'existe pas, soit $r_{\|\alpha\|} = R$. Vu le théorème 1, le problème (*) a une unique solution holomorphe dans $B_{r_{\|\alpha\|}}$, pour tout $r < r_{\|\alpha\|}$. En utilisant le même type d'arguments que dans la preuve du théorème 2, on montre qu'il existe une unique solution de (*) holomorphe en (z, α) sur $\{(z, \alpha) \in B_R \times \mathbb{C}^n : |z| < T(|z|, \|\alpha\|)\}$.

COROLLAIRE. — Soient $R \in (0, \infty]$ et $f: B_R \times \mathbb{C}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{C}^n$ une fonction holomorphe. Supposons qu'il existe $\varphi(r, s)$ une fonction continue de $[0, R) \times [0, \infty)$ dans $(0, \infty)$, croissante en r , et telle que $\varphi(0, 0) \neq 0$ et

$$\|f(z, U)\| \leq \varphi(r, \|U\|) \quad \text{pour } |z| \leq r < R \quad \text{et } U \in \mathbb{C}^{m \times n}.$$

Alors le problème

$$(**) \quad \begin{cases} u^{(m)}(z) = f(z, u(z), \dots, u^{(m-1)}(z)), & z \in B_T \\ u^{(k)}(0) = \alpha_k, & k = 0, \dots, m-1 \end{cases}$$

possède une unique solution holomorphe en (z, α) sur

$$\left\{ (z, \alpha) \in B_R \times \mathbb{C}^{m \times n} : |z| < \int_{\|\alpha\|}^{\infty} \frac{ds}{\Phi(|z|, s)} \right\}$$

où

$$\Phi(r, s) = \sqrt{s^2 + \varphi(r, s)^2} \quad \text{et } \alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1}).$$

Preuve. — En posant $U = (u_0, \dots, u_{m-1}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$ et $F: B_R \times \mathbb{C}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{m \times n}$ définie par : $F(z, U) = (u_1, \dots, u_{m-1}, f(z, U))$, on vérifie que les hypothèses du théorème 3 sont satisfaites et donc le problème $U'(z) = F(z, U(z))$, $U(0) = \alpha$, possède une unique solution $U = (u_0, \dots, u_{m-1})$ holomorphe en (z, α) sur

$$\left\{ (z, \alpha) \in B_R \times \mathbb{C}^{m \times n} : |z| < \int_{\|\alpha\|}^{\infty} \frac{ds}{\Phi(|z|, s)} \right\}.$$

Clairement, u_0 est la solution cherchée.

(¹) Cette Note généralise quelques résultats de D. O'Regan [5].

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] J. DUGUNDJI et A. GRANAS, *Fixed point theory*, I, P.W.N., Warszawa, 1982.
- [2] M. FRIGON, Méthode de transversalité topologique appliquée à des problèmes non linéaires pour des équations différentielles ordinaires, *Thèse de Doctorat*, Université de Montréal, 1986.
- [3] E. HILLE, *Ordinary differential equations in the complex domain*, Wiley & Sons, New York, 1976.
- [4] E. L. INCE, *Ordinary differential equations*, Dover, New York, 1956.
- [5] D. O'REGAN, Ordinary differential equations in the complex domain via topological transversality, *J. Diff. Equations*, 67, 1987, p. 111-121.

*Département de Mathématiques, Université de Montréal,
C. P. 6128, succ. A, Montréal, Canada, H3C 3J7.*