Ann. Sci. Math. Québec **22** (1998), no. 2, 161–168.

RÉSULTATS DE TYPE LERAY-SCHAUDER POUR DES CONTRACTIONS SUR DES ESPACES DE FRÉCHET

MARLÈNE FRIGON ET ANDRZEJ GRANAS

À la douce mémoire de Gilles Fournier

RÉSUMÉ. Dans cette note, on considère des familles $\{F_t : X \to E\}_{t\in[0,1]}$ de contractions définies sur un fermé quelconque d'un espace de Fréchet. On donne des conditions pour lesquelles $Fix(F_{t_0}) \neq \emptyset$ pour un certain t_0 implique que $Fix(F_t) \neq \emptyset$ pour tout $t \in [0,1]$. De cela, on déduit des théorèmes de point fixe de type Leray-Schauder. Ces résultats sont ensuite appliqués aux équations différentielles et intégrales dans un espace de Banach sur un intervalle non compact.

ABSTRACT. In this Note, we consider families of contractions $\{F_t : X \to E\}_{t\in[0,1]}$ defined on any closed subset of a Fréchet space. We give conditions under which $Fix(F_{t_0}) \neq \emptyset$ for some t_0 implies that $Fix(F_t) \neq \emptyset$ for every $t \in [0,1]$. From that, we deduce fixed point theorems of the Leray-Schauder type. Finally, we apply those results to differential and integral equations on non compact intervals.

1. Introduction et préliminaires. Dans cette note, on présente des résultats d'existence de points fixes pour des contractions $F : X \to X$ et des familles de contractions $\{F_t : X \to E\}_{t\in[0,1]}$ définies sur un fermé quelconque d'un espace de Fréchet. Les démonstrations sont élémentaires et ne reposent pas sur la théorie de la mesure de noncompacité.

Plusieurs auteurs ont obtenu des théorèmes d'existence de points fixes pour des familles de contractions via des familles d'applications condensantes, mentionnons Nussbaum [12], Fournier [6], Fournier et Martelli [7], Sadovskii [1] (voir aussi [3, 5, 13, 14] pour des résultats dans des espaces de Fréchet). Dans ce contexte, il est cependant nécessaire d'imposer des restrictions sur le domaine. De ce fait, nos résultats ne peuvent être obtenus de ces derniers. De plus, ils sont aussi valables dans des espaces topologiques dont la topologie est engendrée par une famille d'écarts, bien qu'afin d'alléger la présentation, nous ayons préféré énoncer les théorèmes dans des espaces de Fréchet. Mentionnons qu'ils généralisent des résultats de [9] et [10].

Dans cette note, on désigne par $E = (E, \{|\cdot|_n\})$ un espace de Fréchet dont la topologie est engendrée par une famille de semi-normes $\{|\cdot|_n : n \in \mathbb{N}\}$. Pour tout sous-ensemble X de E, on note $\overline{X}$ et ∂X respectivement la fermeture et la frontière

Reçu le 6 janvier 1998 et, sous forme définitive, le 6 juillet 1998.

de X dans E. On dira que X est *borné* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $M_n \geq 0$ tel que $|x|_n \leq M_n$ pour tout $x \in X$.

On associe à E une suite d'espaces de Banach $\{(\mathbb{E}^n, |\cdot|_n)\}$ de la façon suivante: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère sur E la relation d'équivalence $\sim_n$ définie par $x \sim_n y$ si et seulement si $|x - y|_n = 0$. On note $E^n = (E/\sim_n, |\cdot|_n)$ l'espace quotient, et on pose $(\mathbb{E}^n, |\cdot|_n)$ la complétion de E^n par rapport à $|\cdot|_n$. Ici, la norme sur E^n induite par $|\cdot|_n$ et son prolongement à $\mathbb{E}^n$ sont encore notées $|\cdot|_n$. Cela étant, à tout sous-ensemble X de E, on associe une suite $\{X^n\}$ de sous-ensembles $X^n \subset E^n$ de la façon suivante : Pour $x \in E$, on désigne par $[x]_n$ la classe d'équivalence de x dans E^n et on pose $X^n = \{[x]_n : x \in X\}$. On note $\overline{X^n}$, $\operatorname{int}_n(X^n)$ et $\partial_n X^n$, respectivement, la fermeture, l'intérieur et la frontière de X^n par rapport à $|\cdot|_n$ dans $\mathbb{E}^n$. Dans la suite, on désigne les éléments de $\mathbb{E}^n$ par z.

On dira que la condition $(\star)$ est satisfaite si la famille de semi-normes $\{|\cdot|_n\}$ vérifie

$$|x|_1 \leq |x|_2 \leq |x|_3 \leq \cdots \quad \text{pour tout } x \in E. \tag{$\star$}$$

Ainsi, si la condition $(\star)$ est satisfaite, la semi-norme $|\cdot|_n$ induit une semi-norme (encore notée $|\cdot|_n$) sur $\mathbb{E}^m$ pour tout $m > n$. De nouveau, pour $z, \hat{z} \in \mathbb{E}^m$, on dira que $z \sim_n \hat{z}$ si $|z - \hat{z}|_n = 0$.

Dans la preuve de notre résultat principal, on utilisera le lemme suivant dans lequel on identifie chaque élément d'un fermé X de E à une suite appropriée d'éléments de X^n.

Lemme 1.1. *Supposons que la condition $(\star)$ soit satisfaite, et soit X un fermé de E. Alors, pour chaque n, on a des injections continues $(\overline{X^m}/\sim_n) \hookrightarrow \overline{X^n}$ pour tout $m > n$, et*

$$\begin{array}{c} \{z^n \in \overline{X^n}\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ est tel que pour chaque } n, \\ |z^n - z^m|_n = 0 \text{ pour tout } m > n \end{array} \iff \begin{array}{c} \text{il existe } x \in X \text{ tel que pour} \\ \text{tout } n \in \mathbb{N},\ [x]_n = z^n \in X^n. \end{array}$$

Définition 1.2. Une fonction $F : X \to E$ est appelée *contraction* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $k_n < 1$ tel que $|F(x) - F(y)|_n \leq k_n|x - y|_n$ pour tous $x, y \in X$.

Remarquons qu'une fonction F peut être une contraction au sens de la définition précédente sans être une contraction au sens usuel lorsque X est muni de la métrique $d(x, y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x - y|_n/2^n(1 + |x - y|_n)$.

Le théorème suivant est une généralisation du principe des contractions de Banach [2].

Théorème 1.3. *Soit X un fermé de E. Alors toute contraction $F : X \to X$ a un point fixe unique.*

Preuve. Soit $x_0 \in X$. On définit inductivement $x_i = F(x_{i-1})$, et on vérifie que $\{x_i\}$ est une suite de Cauchy par rapport à $|\cdot|_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque X est complet, il existe $x \in X$ tel que $x_i \to x$. Il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|x - F(x)|_n \leq |x - x_i|_n + |F(x_{i-1}) - F(x)|_n \leq |x - x_i|_n + k_n|x_{i-1} - x|_n.$$

En passant à la limite lorsque $i \to \infty$, on déduit que $|x - F(x)|_n = 0$. D'où, $x = F(x)$. $\square$

Définition 1.4. Soit X un fermé de E. Une famille $\{F_t : X \to E\}_{t\in[0,1]}$ est appelée *famille admissible de contractions* si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(a) il existe $k_n < 1$ tel que $|F_t(x) - F_t(y)|_n \leq k_n|x - y|_n$ pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tous $x, y \in X$;

(b) il existe $L_n > 0$ tel que $|F_t(x) - F_s(x)|_n \leq L_n|t - s|$ pour tout $x \in X$, et pour tous $s, t \in [0, 1]$.

2. Familles de contractions définies sur un fermé quelconque. Dans ce paragraphe, nous supposons que la condition $(\star)$ est satisfaite.

À partir d'une contraction $F : X \to E$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit de façon évidente la contraction $F^n : X^n \to E^n$ et son prolongement $\mathbb{F}^n : \overline{X^n} \to \mathbb{E}^n$. Afin d'alléger la notation, on écrira $|z - F(z)|_n$ pour $|z - \mathbb{F}^n(z)|_n$ pour tout $z \in \overline{X^n}$.

Nous présentons maintenant le résultat principal de cette note.

Théorème 2.1. *Soit X un fermé de E et considérons une famille admissible de contractions $\{F_t : X \to E\}_{t\in[0,1]}$ telle que $|z - F_t(z)|_n \neq 0$ pour tout $z \in \partial_n X^n$, tout $t \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si F_t a un point fixe pour un $t \in [0, 1]$, alors F_t a un unique point fixe pour tout $t \in [0, 1]$.*

Preuve. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1]$, soit $\mathbb{F}_t^n : \overline{X^n} \to \mathbb{E}^n$ la fonction obtenue à partir de F_t. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\{\mathbb{F}_t^n\}_{t\in[0,1]}$ est une famille admissible de contractions. Si F_t a un point fixe pour un certain t, $\mathbb{F}_t^n$ en a un aussi qui est dans $\mathrm{int}_n(X^n)$ par hypothèse. Le théorème 3.1 de [10] (ou encore le théorème 3.1 qui suit) implique que pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $z_t^n \in \overline{X^n}$ tel que $|z_t^n - F_t(z_t^n)|_n = 0$. On déduit que

$$|z_t^m - z_t^l|_n = 0 \quad \text{pour tous } l, m \geq n.$$

L'existence d'un $x_t \in X$ tel que $x_t = F_t(x_t)$ découle du Lemme 1.1. □

Du théorème précédent, nous déduisons les résultats suivants.

Théorème 2.2. (ALTERNATIVE NON LINÉAIRE) *Soit X un fermé de E tel que $0 \in X$, et soit $F : X \to E$ une contraction telle que $F(X)$ soit borné. Alors un des deux énoncés suivants est vérifié:*

(a) *F a un unique point fixe;*

(b) *il existe $t \in [0, 1)$, $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \partial_n X^n$ tels que $|z - tF(z)|_n = 0$.*

Corollaire 2.3. *Soit X un fermé de E tel que $0 \in \mathrm{int}_n(X^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et soit $F : X \to E$ une contraction telle que $F(X)$ soit borné. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $z \in \partial_n X^n$, une des conditions suivantes soit satisfaite:*

(i) $|F(z)|_n \leq \max\{|z|_n, |z - F(z)|_n\}$;

(ii) $-z \in \overline{X^n}$ *et* $|F(z) + F(-z)|_n = 0$ (*i.e.* $\mathbb{F}^n(z) = -\mathbb{F}^n(-z)$).

Alors F a un unique point fixe.

3. Familles de contractions définies sur la fermeture d'un ouvert. Lorsqu'une famille admissible de contractions est définie sur la fermeture d'un ouvert de E, les hypothèses du théorème 2.1 peuvent être affaiblies.

Dans ce paragraphe, on ne suppose pas que la condition $(\star)$ est satisfaite.

Théorème 3.1. *Soient U un ouvert de E, et $\{F_t : \overline{U} \to E\}_{t\in[0,1]}$, une famille admissible de contractions telle que $F_t(x) \neq x$ pour tout $x \in \partial U$, et tout $t \in [0,1]$. Alors, si F_t a un point fixe pour un $t \in [0,1]$, F_t a un unique point fixe pour tout $t \in [0,1]$.*

Preuve. Posons $Q = \{t \in [0,1] : F_t \text{ a un point fixe}\}$. Par hypothèse, $Q \neq \emptyset$. On montre que Q est à la fois fermé et ouvert. La connexité de $[0,1]$ implique que $Q = [0,1]$. □

Du théorème précédent, nous déduisons les résultats suivants.

Théorème 3.2. *Soit U un ouvert de E tel que $0 \in U$, et soit $F : \overline{U} \to E$ une contraction telle que $F(U)$ soit borné. Alors un des deux énoncés suivants est vérifié:*

(a) *F a un unique point fixe;*
(b) *il existe $t \in (0,1)$ et $x \in \partial U$ tel que $x = tF(x)$.*

Corollaire 3.3. *Soit U un ouvert de E tel que $0 \in U$, et soit $F : \overline{U} \to E$ une contraction telle que $F(U)$ soit borné. Supposons que pour tout $x \in \partial U$, il existe $n \in \{i : |x|_i \neq 0\}$ tel qu'un des énoncés suivants soit vérifié:*

(a) $|F(x)|_n \leq \max\{|x|_n, |x - F(x)|_n\}$*;*
(b) $-x \in \overline{U}$ *et* $|F(x) + F(-x)|_n = 0$.

Alors F a un unique point fixe.

4. Applications. Nous présentons deux exemples d'applications de l'alternative non linéaire 2.2. Le lecteur est referé à [11] pour une application des résultats précédents aux algèbres de fonctions généralisées.

(1) *Équations différentielles dans les espaces de Hilbert.*

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} &x'(t) = f(t, x(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0,\infty), \\ &x(0) = 0 \in H, \end{aligned} \tag{4.1}$$

où H est un espace de Hilbert, et $f : [0,\infty) \times H \to H$ est une fonction localement Carathéodory; i.e. (a) $t \mapsto f(t,x)$ est mesurable pour tout $x \in H$; (b) $x \mapsto f(t,x)$ est continue pour presque tout $t \in [0,\infty)$; (c) pour tout $R > 0$, il existe une fonction $h_R \in L^1_{loc}[0,\infty)$ telle que $\|f(t,x)\| \leq h_R(t)$ pour presque tout $t \in [0,\infty)$ et pour tout $x \in H$ tel que $\|x\| \leq R$.

Théorème 4.1. *Soient $(H, \|\cdot\|)$ un espace de Hilbert, et $f : [0,\infty) \times H \to H$ une fonction localement Carathéodory. Supposons que*

(a) *pour tout $R > 0$, il existe $l_R \in L^1_{loc}[0,\infty)$ telle que pour presque tout $t \in [0,\infty)$, et pour tous x, $y \in H$ vérifiant $\|x\|$, $\|y\| \leq R$, on ait*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq l_R(t)\|x - y\|;$$

(b) *il existe $\theta \in L^1_{loc}[0,\infty)$ et $\psi : [0,\infty) \to (0,\infty)$, une fonction mesurable au sens de Borel, telles que $\|f(t,x)\| \leq \theta(t)\psi(\|x\|)$ p.p. $t \in [0,\infty)$, et tout $x \in H$, avec $1/\psi \in L^1_{loc}[0,\infty)$; et*

$$\int_0^\infty \frac{dz}{\psi(z)} > \|\theta\|_{L^1[0,r]} \quad \textit{pour tout } r > 0.$$

Alors le problème (4.1) *a une solution unique dans* $W^{1,1}_{loc}([0,\infty),H)$.

Preuve. Définissons $F : C([0,\infty),H) \to C([0,\infty),H)$ par

$$F(x)(t) = \int_0^t f(s,x(s))\,ds.$$

En utilisant l'hypothèse (b), on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout x vérifiant pour un certain $\lambda \in [0,1]$, $x(t) = \lambda F(x)(t)$ pour tout $t \leq n$, on a

$$\|x(s)\| < M(s) \quad \text{pour tout } s \leq n, \quad \text{où} \quad \int_0^{M(s)} \frac{dz}{\psi(z)} = \|\theta\|_{L^1[0,s]} + 1.$$

Posons $l(s) = l_{M(n)}(s)$ pour $s \in (n-1,n]$, $n \in \mathbb{N}$, où $l_{M(n)}$ est donnée en (a). Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $C([0,\infty),H)$ la semi-norme

$$|x|_n = \sup\{e^{-\int_0^t l(s)\,ds}\|x(t)\| : t \in [0,n]\}.$$

On pose $X = \{x \in C([0,\infty),H) : \|x(t)\| \leq M(t) \text{ pour } t \in [0,\infty)\}$. Ainsi, l'énoncé (b) du théorème 2.2 ne peut avoir lieu.

Vu l'hypothèse (a), $F : X \to C([0,\infty),H)$ est une contraction. L'existence d'une solution au problème (4.1) découle alors du théorème 2.2. □

(2) *Équations intégrales dans les espaces de Banach.*

Théorème 4.2. *Soient* $(B,\|\ \|)$ *un espace de Banach et* $k : \mathbb{R}^2 \times B \to B$ *une fonction continue. Supposons que*

(a) *pour tout* $r > 0$, *il existe une fonction positive* $A_r \in L^1(-\infty,0] \cap L^1_{loc}[0,\infty)$ *telle que*

$$\|k(t,s,x) - k(t,s,y)\| \leq A_r(s)\|x-y\|$$

pour $s \leq t$ *et* $\|x\|, \|y\| \leq r$;

(b) *il existe des fonctions positives* C *et* $D \in L^1(-\infty,0] \cap L^1_{loc}[0,\infty)$ *telles que*

$$\|k(t,s,x)\| \leq C(s)\|x\| + D(s),$$

pour tout $x \in B$ *et pour* $s \leq t$.

Alors l'équation intégrale

$$x(t) = \int_{-\infty}^t k(t,s,x(s))\,ds \tag{4.2}$$

a une solution unique.

Preuve. Posons

$$E = \{x \in C(\mathbb{R},B) : \sup\{\|x(t)\| : t \leq R\} < \infty \text{ pour tout } R \in \mathbb{R}\},$$

et définissons $F : E \to E$ par

$$F(x)(t) = \int_{-\infty}^t k(t,s,x(s))\,ds.$$

L'hypothèse (b) et l'inégalité de Gronwall impliquent l'existence pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'une constante positive N_n telle que pour tout $x \in E$ vérifiant pour un certain $\lambda \in [0,1]$, $x(t) = \lambda F(x)(t)$ pour tout $t \leq n$, on ait

$$\|x(t)\| < N_n \quad \text{pour tout } t \leq n.$$

Posons $A(s) = A_{N_n}(s)$ pour $s \in (n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$, où A_{N_n} est donnée en (a). Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit sur E la semi-norme

$$|x|_n = \sup\{e^{-\int_{-\infty}^{t} A(s)\,ds} \|x(t)\| : t \leq n\}.$$

On pose $X = \{x \in E : \|x(t)\| \leq N_n$ pour tout $t \leq n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}\}$. On vérifie que $F : X \to E$ est une contraction. La conclusion découle du théorème 2.2. □

Remarques 4.3. On peut aisément étendre les résultats précédents aux espaces localement convexes et complets, ou aux espaces topologiques dont la topologie est engendrée par une famille d'écarts $\{d_\alpha : \alpha \in I\}$, où I est une famille arbitraire d'indices (ou un ensemble préordonné filtrant (à droite) au §2), et qui sont complets. Pour les définitions, voir [4]. Extensions également aux familles de contractions $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, où (Λ, d) est un espace métrique connexe. Les résultats de cette note généralisent ceux de [8, 9, 10].

Remerciements. Les auteurs tiennent à remercier Messieurs Marc Lassonde et Jean-André Marti pour les fructueuses discussions lors de leurs visites à l'Université des Antilles et de la Guyane. Cette recherche est subventionnée en partie par le CRSNG du Canada et le KBN de Pologne, no. 2-P03A-08008.

English extended abstract. Let $E = (E, \{|\cdot|_n\})$ be a Fréchet space with a family of semi-norms $\{|\cdot|_n : n \in \mathbb{N}\}$. Let $X \subset E$, we say that X is *bounded* if for every $n \in \mathbb{N}$, there exists $M_n \geq 0$ such that $|x|_n \leq M_n$ for all $x \in X$.

To E, we associate a sequence of Banach spaces $\{(\mathbb{E}^n, |\cdot|_n)\}$ as follows: For every $n \in \mathbb{N}$, we consider the equivalence relation $\sim_n$ defined by $x \sim_n y$ if and only if $|x-y|_n = 0$. We denote $E^n = (E/\sim_n, |\cdot|_n)$ the quotient space, and we set $(\mathbb{E}^n, |\cdot|_n)$ the completion of E^n with respect to $|\cdot|_n$. To every $X \subset E$, we associate a sequence $\{X^n\}$ of subsets $X^n \subset E^n$ as follows: For $x \in E$, we denote $[x]_n$ the equivalence class of x in E^n and we define $X^n = \{[x]_n : x \in X\}$. We denote $\overline{X^n}$, $\mathrm{int}_n(X^n)$ and $\partial_n X^n$, respectively, the closure, the interior and the boundary of X^n with respect to $|\cdot|_n$ in $\mathbb{E}^n$.

We assume that the family of semi-norms $\{|\cdot|_n\}$ verifies

$$|x|_1 \leq |x|_2 \leq |x|_3 \leq \cdots \quad \text{for every } x \in E. \tag{$\star$}$$

Definition. Let X be a closed subset of E. A family $\{F_t : X \to E\}_{t \in [0,1]}$ is called *admissible family of contractions* if for every $n \in \mathbb{N}$,

(a) there exists $k_n < 1$ such that $|F_t(x) - F_t(y)|_n \leq k_n |x-y|_n$ for all $t \in [0,1]$ and all $x, y \in X$;

(b) there exists $L_n > 0$ such that $|F_t(x) - F_s(x)|_n \leq L_n |t-s|$ for all $x \in X$, and all $s, t \in [0,1]$.

From a contraction $F : X \to E$, for every $n \in \mathbb{N}$, we define a contraction $F^n : X^n \to E^n$ by $F^n([x]_n) = [F(x)]_n$, and we denote $\mathbb{F}^n : \overline{X^n} \to \mathbb{E}^n$ its extension. For simplicity, we write $|z - F(z)|_n$ instead of $|z - \mathbb{F}^n(z)|_n$ for every $z \in \partial_n X^n$.

The main result of this Note is the following theorem. Let us point out that X can have empty interior.

Theorem 1. *Let X be a closed subset of E, and $\{F_t : X \to E\}_{t\in[0,1]}$ an admissible family of contractions such that $|z - F_t(z)|_n \neq 0$ for all $z \in \partial_n X^n$, all $t \in [0,1]$ and all $n \in \mathbb{N}$. If F_t has a fixed point for some $t \in [0,1]$, then F_t has a unique fixed point for every $t \in [0,1]$.*

From the previous theorem, we deduce the following results.

Theorem 2. (NONLINEAR ALTERNATIVE) *Let X be a closed subset of E such that $0 \in X$, and let $F : X \to E$ be a contraction such that $F(X)$ is bounded. Then one of the following statements holds:*

(a) *F has a unique fixed point;*
(b) *there exist $t \in [0,1)$, $n \in \mathbb{N}$, and $z \in \partial_n X^n$ such that $|z - tF(z)|_n = 0$.*

Corollary. *Let X be a closed subset of E such that $0 \in int_n(X^n)$ for every $n \in \mathbb{N}$, and let $F : X \to E$ be a contraction such that $F(X)$ is bounded. Assume that for every $n \in \mathbb{N}$ and every $z \in \partial_n X^n$, one of the following conditions is satisfied:*

(i) $|F(z)|_n \leq \max\{|z|_n, |z - F(z)|_n\}$;
(ii) $-z \in \overline{X^n}$, *and* $|F(z) + F(-z)|_n = 0$ (*i.e.* $\mathbb{F}^n(z) = -\mathbb{F}^n(-z)$).

Then F has a unique fixed point.

Finally, we illustrate how the previous results can be applied to differential and integral equations.

BIBLIOGRAPHIE

1. R. R. Akhmerov, M. I. Kamenskii, A. S. Potapov, A. E. Rodkina et B. N. Sadovskii, *Measures of noncompactness and condensing operators*, Birkhäuser, Basel, 1992.
2. G. L. Cain Jr. et M. Z. Nashed, *Fixed points and stability for a sum of two operators in locally convex spaces*, Pacific J. Math. **39** (1971), 581–592.
3. J. Carmona Alvárez, *Measure of noncompactness and fixed points of nonexpansive condensing mappings in locally convex spaces*, Rev Real Acad. Cienc. Exact. Fís. Natur. Madrid **79** (1985), 53–66.
4. J. Dugundji, *Topology*, Allyn & Bacon, Boston, 1966.
5. P. M. Fitzpatrick et W. V. Petryshyn, *Fixed point theorems and the fixed point index for multivalued mappings in cones*, J. London Math. Soc (2) **12** (1975/76), 75–85.
6. G. Fournier, *A good class of eventually condensing maps*, Topological methods in nonlinear functional analysis (Toronto, Ont., 1982), Contemp. Math., vol. 21, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983, pp. 99–113.
7. G. Fournier et M. Martelli, *Boundary conditions and vanishing index for α-contractions and condensing maps*, Nonlinear functional analysis (Newark, NJ, 1987), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 121, Dekker, New York, 1990, pp. 31–48.
8. M. Frigon, *On continuation methods for contractive and nonexpansive mappings*, Recent advances on metric fixed point theory (Seville, 1995), Cienca, vol. 48, Univ. Sevilla, Seville, 1996, pp. 19–30.

9. M. Frigon, A. Granas et Z. Guennoun, *Alternative non linéaire pour les applications contractantes*, Ann. Sci. Math. Québec **19** (1995), 65–68.
10. A. Granas, *Continuation method for contractive maps*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **3** (1994), 375–379.
11. J.-A. Marti, *Fixed point in algebras of generalized functions*, Proceedings of the International Congress CIMAF (Cuba, 1997); à paraître.
12. R. Nussbaum, *The fixed point index for local condensing maps*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **89** (1971), 217–258.
13. J. Polewczak, *Ordinary differential equations on closed subsets of Fréchet spaces with applications to fixed point theorems*, Proc. Amer. Math. Soc. **107** (1989), 1005–1012.
14. T. Sengadir, D. V. Pai et A. K. Pani, *A Leray-Schauder type theorem and applications to boundary value problems for neutral equations*, Nonlinear Anal. **28** (1997), 701–719.

M. Frigon et A. Granas
Département de mathématiques et statistique
Université de Montréal
Case postale 6128, succursale Centre-Ville
Montréal Qc H3C 3J7
Canada
E-mail: frigon@dms.umontreal.ca
granasa@ere.umontreal.ca