Théorèmes d'existence pour des inclusions différentielles sans convexité

PAR

Marlène FRIGON et Andrzej GRANAS

Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*
7 juin 1990

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 310, Série I, p. 819-822, 1990

Équations différentielles/*Ordinary Differential Equations*

Théorèmes d'existence pour des inclusions différentielles sans convexité

Marlène FRIGON et Andrzej GRANAS

Résumé – Dans cette Note ([1]), grâce au récent théorème de sélection de Bressan et Colombo [1], nous énonçons des théorèmes d'existence pour des inclusions différentielles de la forme :

$(\mathscr{P}_F)$ $$y^{(k)}\in F(t, y, \ldots, y^{(k-1)}),\qquad y\in\mathscr{B},$$

où $\mathscr{B}$ désigne une certaine condition aux limites ou initiale homogène, et où la fonction multivoque $F:[0, T]\times\mathbb{R}^{kn}\to 2^{\mathbb{R}^n}$ satisfait certaines conditions de mesurabilité et de semi-continuité, et est à valeurs non vides compactes mais en général non convexes.

Existence theorems for differential inclusions without convexity

Abstract – *In this Note, using the recent selection theorem of Bressan-Colombo* [1], *we establish some general existence results for differential inclusions of the form*

$(\mathscr{P}_F)$ $$y^{(k)}\in F(t, y, \ldots, y^{(k-1)}),\qquad y\in\mathscr{B},$$

where $\mathscr{B}$ *denotes homogeneous boundary or initial value data, and the multivalued function* $F:[0, T]\times\mathbb{R}^{kn}\to 2^{\mathbb{R}^n}$ *satisfies some hypotheses of measurability and semi-continuity, and has non-empty, compact values which are not necessarily convex.*

1. PRÉLIMINAIRES. – (*a*) *Notations.* – Soient $I=[0, T]$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ et $(C^k(I, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_k)$ l'espace de Banach des fonctions y k-fois continûment différentiables, dont la norme est : $\|y\|_k=\max\{\|y^{(i)}\|_0 : i=0, \ldots, k\}$ où $y^{(i)}$ est la i-ième dérivée de y ($y^{(0)}$ signifie y) et $\|y\|_0=\max\{|y(t)| : t\in I\}$. Nous dirons qu'une forme linéaire continue $g: C^k(I, \mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^n$ est *admissible* s'il existe une forme linéaire continue non triviale $\tilde{g}: C^k(I, \mathbb{R})\to\mathbb{R}$ telle que $g(\varphi(t)v)=\tilde{g}(\varphi(t))v$ pour toute fonction $\varphi\in C^k(I, \mathbb{R})$ et pour tout $v\in\mathbb{R}^n$.

Dans la suite, nous utiliserons les abréviations suivantes : $C^k=C^k(I, \mathbb{R}^n)$, $C_0^k=\{y\in C^k : y(0)=0\}$, $C=C^0$, $C_0=C_0^0$.

Soit $k\in\mathbb{N}$. Pour tout $i\in\{1, \ldots, k\}$, fixons une forme linéaire continue admissible $g_i: C^{k-1}\to\mathbb{R}^n$ et posons

$$\mathscr{B}=\{y\in C^{k-1} : g_i(y)=0,\ i=1, \ldots, k\},\qquad C^j_{\mathscr{B}}=\{y\in C^j : y\in\mathscr{B}\},\quad j\geqq k-1.$$

Considérons maintenant l'opérateur linéaire $\Lambda: C^k_{\mathscr{B}}\to C$ donné par $\Lambda(y)=y^{(k)}$ et examinons les deux cas suivants :

(1) Λ est *inversible.* – On définit l'opérateur linéaire $L: C^{k-1}_{\mathscr{B}}\to C_0$ par

$$L(y)(t)=y^{(k-1)}(t)-y^{(k-1)}(0);$$

(2) Λ n'est *pas inversible.* – Fixons $\varepsilon\neq 0$ qui n'est pas une valeur propre de Λ et définissons l'opérateur $\tilde{L}: C^{k-1}_{\mathscr{B}}\to C_0$ par :

$$\tilde{L}(y)(t)=L(y)(t)-\varepsilon\int_0^t y(s)\,ds.$$

LEMME 1. – *Dans le cas* (1), L *est inversible. Dans le cas* (2), $\tilde{L}$ *est inversible.*

(*b*) *Ensembles décomposables.* – Un ensemble $A\subset L^1(I, \mathbb{R}^n)$ est *décomposable* si pour tout $u, v\in A$ et $E\subset I$ mesurable, on a $u\chi_E+v\chi_{I\setminus E}\in A$.

Note présentée par Jean LERAY.

0764-4442/90/03100819 $ 2.00

Soient X un espace métrique et $F : X \to L^1(I, \mathbb{R}^n)$ un opérateur multivoque; on dira que F a *la propriété* (BC) si :

(i) F est semi-continu inférieurement [2];

(ii) F est à valeurs non vides, fermées et décomposables.

Dans la suite, le résultat suivant [1] sera utilisé de façon essentielle.

Lemme 2. — *Soient* X *un espace métrique séparable et* $F : X \to L^1(I, \mathbb{R}^n)$ *un opérateur multivoque possédant la propriétés* (BC). *Alors* F *a une sélection continue*, i.e. *il existe une fonction continue* $f : X \to L^1(I, \mathbb{R}^n)$ *telle que* $f(x) \in F(x)$ *pour tout* $x \in X$.

(*c*) *Fonctions multivoques de type s.c.i.* — Étant donné un espace normé $(E, \|\ \|)$, l'espace métrique des sous-ensembles compacts non vides de E sera noté K(E) (et muni de la métrique de Hausdorff); pour $A \in K(E)$, soit $\|A\| = \sup\{\|a\| : a \in A\}$.

Étant donnée une fonction $F : I \times \mathbb{R}^{kn} \to K(\mathbb{R}^n)$, on définit une fonction multivoque $\mathscr{F} : C(I, \mathbb{R}^{kn}) \to L^1(I, \mathbb{R}^n)$ par $\mathscr{F}(x) = \{v \in L^1(I, \mathbb{R}^n) : v(t) \in F(t, x(t))$ p.p. $t \in I\}$; $\mathscr{F}$ est appelée *l'opérateur de Niemytzki associé à* F.

Définition. — Une fonction multivoque $F : I \times \mathbb{R}^{kn} \to K(\mathbb{R}^n)$ sera dite *de type semi-continue inférieurement* (*s.c.i.*), si l'opérateur de Niemytzki $\mathscr{F} : C(I, \mathbb{R}^{kn}) \to L^1(I, \mathbb{R}^n)$ associé à F possède la propriété (BC).

Étant donnée une fonction multivoque $F : I \times \mathbb{R}^{kn} \to K(\mathbb{R}^n)$, considérons les conditions suivantes :

(H1) (i) $(t, x) \mapsto F(t, x)$ est $\mathscr{L} \otimes \mathscr{B}$ mesurable [2] [3];

(ii) $x \mapsto F(t, x)$ est semi-continue inférieurement p.p. $t \in I$ [2];

(H1)* (i)* $t \mapsto F(t, x)$ est mesurable pour tout $x \in \mathbb{R}^{kn}$;

(ii)* $x \mapsto F(t, x)$ est continue p.p. $t \in I$;

(H2) pour tout $r > 0$, il existe une fonction $m_r \in L^1(I)$ telle que $\|F(t, x)\| \leqq m_r(t)$ p.p. $t \in I$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^{kn}$ avec $\|x\| \leqq r$.

Proposition. — *Soit* $F : I \times \mathbb{R}^{kn} \to K(\mathbb{R}^n)$ *une fonction multivoque vérifiant les conditions* (H1) *et* (H2), *ou bien* (H1)* *et* (H2). *Alors* F *est de type s.c.i.*

2. Principes généraux. — Nous énonçons d'abord deux principes généraux.

Supposons que $F : I \times \mathbb{R}^{kn} \to K(\mathbb{R}^n)$ est une fonction multivoque de type s.c.i.; considérons le problème suivant :

$$(\mathscr{P}_F) \qquad y^{(k)}(t) \in F(t, y(t), \ldots, y^{(k-1)}(t)) \quad \text{p.p. } t \in I, \quad y \in \mathscr{B}.$$

Soit Λ l'opérateur linéaire introduit précédemment.

(1) Dans le cas où Λ *est inversible*, notons $(\mathscr{P}_F)_\lambda$, $\lambda \in [0,1]$, la famille de problèmes

$$(\mathscr{P}_F)_\lambda \qquad y^{(k)}(t) \in \lambda F(t, y(t), \ldots, y^{(k-1)}(t)), \qquad y \in \mathscr{B}.$$

(2) Dans le cas où Λ *est non inversible*, notons $(\tilde{\mathscr{P}}_F)_\lambda$, $\lambda \in [0,1]$ la famille de problèmes

$$(\tilde{\mathscr{P}}_F)_\lambda \qquad y^{(k)}(t) \in \lambda F(t, y(t), \ldots, y^{(k-1)}(t)) + (1-\lambda)\varepsilon y(t), \qquad y \in \mathscr{B},$$

où $\varepsilon \neq 0$ n'est pas une valeur propre de Λ.

Théorème 1. — *Soit* $F : I \times \mathbb{R}^{kn} \to K(\mathbb{R}^n)$ *une fonction de type s.c.i. Supposons que* Λ *est inversible et qu'on peut majorer* a priori *toutes les solutions de* $(\mathscr{P}_F)_\lambda$ *par rapport à la norme* $\|\cdot\|_{k-1}$ *dans* C^{k-1}. *Alors le problème* $(\mathscr{P}_F)$ *possède au moins une solution* [4].

Théorème 2. — *Soit* $F : I \times \mathbb{R}^{kn} \to K(\mathbb{R}^n)$ *une fonction de type s.c.i. Supposons que* Λ *n'est pas inversible et qu'on peut majorer* a priori *toutes les solutions de* $(\tilde{\mathscr{P}}_F)_\lambda$ *par rapport à la norme* $\|\cdot\|_{k-1}$ *dans* C^{k-1}. *Alors le problème* $(\mathscr{P}_F)$ *possède au moins une solution.*

Preuve du théorème 1. — Vu le lemme 2, il existe une fonction continue $f: C(I, \mathbb{R}^{kn}) \to L^1(I, \mathbb{R}^n)$ telle que pour tout $u \in C(I, \mathbb{R}^{kn})$, $f(u) \in \mathcal{F}(u)$ où $\mathcal{F}$ est l'opérateur de Niemytzki associé à F. Considérons la famille des problèmes suivants :

$$(1)_\lambda \qquad y^{(k)}(t) = \lambda f(y, \ldots, y^{(k-1)})(t) \quad \text{p.p. } t \in I, \qquad y \in \mathcal{B}, \quad \lambda \in [0, 1].$$

Par hypothèse, les solutions de $(1)_\lambda$ sont telles que $\|y\|_{k-1} < M$ pour un certain $M > 0$. Définissons l'opérateur $N : C_{\mathcal{B}}^{k-1} \to C_0$ par :

$$N(y)(t) = \int_0^t f(y, \ldots, y^{(k-1)})(s)\, ds.$$

Cet opérateur est continu et complètement continu. Remarquons que y est une solution de $(1)_\lambda$ si et seulement si $y = \lambda L^{-1} \circ N(y)$. Vu l'alternative bien connue de Leray-Schauder (*voir* [2]), on déduit que $(1)_1$ a une solution et par conséquent $(\mathcal{P}_F)$ a une solution.

Preuve du théorème 2. — Définissons l'opérateur $\tilde{N} : C_{\mathcal{B}}^{k-1} \to C_0$ par

$$\tilde{N}(y)(t) = N(y)(t) - \varepsilon \int_0^t y(s)\, ds.$$

où N est défini précédemment. La démonstration est analogue à celle du théorème 1 dans laquelle nous remplaçons les opérateurs L et N par $\tilde{L}$ et $\tilde{N}$ respectivement.

3. Applications. — Citons certaines applications immédiates des théorèmes 1 et 2.

Théorème 3 (problème de Cauchy). — *Soit* $F : I \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ *une fonction de type s.c.i. Supposons qu'il existe une fonction* $b \in L^1(I)$ *telle que*

$$x . F(t, x) \leqq b(t)(x^2 + 1) \quad \textit{p.p. } t \in I, \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

Alors le problème $y'(t) \in F(t, y(t))$ *p.p.* $t \in I$, $y(0) = 0$ *a une solution.*

Théorème 4 (intervalle d'existence de solutions pour le problème de Cauchy). — *Soit* $F : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ *une fonction de type s.c.i. Supposons qu'il existe une fonction Borel mesurable* $\varphi : [0, \infty) \to (0, \infty)$ *telle que :*

(*a*) $1/\varphi \in L^1_{\text{loc}}[0, \infty)$;

(*b*) $\|F(t, x)\| \leqq \varphi(\|x\|)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$ *et p. p.* $t \in [0, T]$;

Alors si $T < T_\infty = \int_0^\infty ds/\varphi(s)$, *le problème* $y'(t) \in F(t, y(t))$ *p.p.* $t \in [0, T]$, $y(0) = 0$ *a une solution dans l'intervalle* [0, T].

Théorème 5 (problème périodique). — *Soit* $F : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ *une fonction de type s.c.i. Supposons qu'il existe une constante* $r > 0$ *telle que* $x . F(t, x) \leqq 0$ *pour tout* $\|x\| \geqq r$. *Alors le problème* $y'(t) \in F(t, y(t))$ *p.p.* $t \in [0, 1]$, $y(0) = y(1)$ *a une solution.*

Théorème 6 (problème de Dirichlet). — *Soit* $F : [0, 1] \times \mathbb{R}^{2n} \to K(\mathbb{R}^n)$ *une fonction de type s.c.i. avec* $F(t, x, p) = G(t, x, p) + H(t, x, p)$ *où*

(*a*) $x . G(t, x, p) \geqq 0$ *et*

$\|G(t, x, p)\| \leqq c(t, x)\|p\|^2 + d(t, x)$ *pour tout* $(t, x, p) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^{2n}$, *où* $c(t, x)$ *et* $d(t, x)$ *sont des fonctions bornées sur les bornés;*

(*b*) $\|H(t, x, p)\| \leqq M(\|x\|^\alpha + \|p\|^\beta)$ *où* $\alpha \in [0, 1]$, $\beta \in [0, 1)$ *et* $M \geqq 0$.

Alors le problème $y''(t) \in F(t, y(t), y'(t))$ *p. p.* $t \in [0, 1]$, $y(0) = y(1) = 0$ *a une solution.*

Les majorations *a priori* des solutions des familles de problèmes correspondant à ces théorèmes s'obtiennent comme dans [3] et [4].

4. GÉNÉRALISATIONS. — En s'aidant d'un résultant récent de Tolstonogov [5], nous pouvons appliquer la méthode de cette Note au cas plus général où la fonction multivoque F est à valeurs fermées non nécessairement compactes. A titre d'exemple, citons le théorème suivant.

THÉORÈME 7 (problème de Cauchy). — *Soit* $F : I \times \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ *une fonction multivoque à valeurs fermées non vides vérifiant* (H1) *et*

(H2)* *pour tout* $r>0$, *il existe une fonction* $m_r \in L^1(I)$ *telle que* $F(t, x) \cap \bar{B}(m_r(t)) \neq \varnothing$ ([5]) *p.p.* $t \in I$, *et pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$ *avec* $\|x\| \leqq r$.

Supposons de plus qu'il existe une fonction $b \in L^1(I)$ *telle que*

$$x \,.\, F(t, x) \leqq b(t)(x^2+1) \qquad p.p.\ t \in I,\ pour\ tout\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Alors le problème $y'(t) \in F(t, y(t))$ *p.p.* $t \in I$, $y(0)=0$ *a une solution.*

([1]) Les auteurs remercient M. A. Cellina pour des discussions fructueuses concernant ce travail.

([2]) Soient X et Y deux espaces métriques et $F : X \to 2^Y$ une fonction multivoque. Alors : (*a*) F est *semi-continue inférieurement* (s.c.i.) si l'ensemble $\{x \in X : F(x) \subset C\}$ est fermé pour tout C fermé dans Y. (*b*) Si X est un espace mesurable, F est *mesurable* si l'ensemble $\{t \in X : F(t) \cap C \neq \varnothing\}$ est mesurable pour tout C fermé dans Y.

([3]) Nous munirons $I \times \mathbb{R}^{kn}$ de la σ-algèbre $\mathscr{L} \otimes \mathscr{B}$ engendrée par les ensembles $E \times D$ où $E \subset I$ est Lebesgue mesurable et $D \subset \mathbb{R}^{kn}$ est Borel mesurable.

([4]) Par une solution d'un de ces problèmes, on entend une solution au sens de Carathéodory, *i.e.* une fonction $y \in C_{\mathscr{B}}^{k-1}$ telle que $y^{(k-1)}$ est absolument continue et que y vérifie l'équation correspondante presque partout. Notons que la formulation des résultats est la même que dans la cadre de Carathéodory (multivoque ou univoque) et que dans le cadre classique pour des équations différentielles.

([5]) Pour $m>0$, $\bar{B}(m)$ est la boule fermée dans $\mathbb{R}^n$ centrée en 0 et de rayon m.

Note remise le 5 février 1990, acceptée le 19 mars 1990.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] A. BRESSAN et G. COLOMBO, Extensions and selections of maps with decomposable values, *Studia Mathematica*, XC, 1988, p. 70-85.

[2] J. DUGUNDJI et A. GRANAS, *Fixed point theory*, I, Monografie Matematyczne, P.W.N., Warszawa, 1982.

[3] M. FRIGON, A. GRANAS et Z. E. A. GUENNOUN, Sur l'intervalle maximal d'existence de solutions pour des inclusions différentielles, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 306, série I, 1988, p. 747-750.

[4] A. GRANAS, R. B. GUENTHER et J. W. LEE, Some existence results for the differential inclusions $y^{(k)} \in F(x, y, \ldots, y^{(k-1)})$, $y \in \mathscr{B}$, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 307, série I, 1988, p. 391-396.

[5] A. A. TOLSTONOGOV, Solutions of a differential inclusion with unbounded right-hand side, *Siberian Mathematical Journal*, mai (1989), p. 857-868 (traduit de *Russian Sibirskii Matematicheskii Zhurnal*, 29, (5), 1988).

Département de Mathématiques, Université de Montréal,
C.P. 6128, succ. A, *Montréal, H3C 3J7, Canada.*