Ann. Sci. Math. Québec **19** (1995), no. 1, 65–68.

ALTERNATIVE NON LINÉAIRE POUR LES APPLICATIONS CONTRACTANTES

M. FRIGON, A. GRANAS ET Z. E. A. GUENNOUN

RÉSUMÉ. Dans cette note, nous donnons une preuve élémentaire de l'existence d'une courbe lipschitzienne de points fixes d'applications contractantes. Comme conséquence, nous obtenons l'alternative non linéaire pour les applications contractantes dont la preuve connue jusqu'à ce jour utilise la notion de mesure de non compacité.

ABSTRACT. In this note, we give an elementary proof of the existence of a Lipschitz-continuous curve of fixed points of contractive maps. As a consequence, we obtain the Nonlinear Alternative for contractive maps. The previous proof of the last result uses the notion of measure of non-compactness.

Dans [1], l'auteur démontre que l'alternative non linéaire pour les applications compactes découle simplement du théorème de point fixe de Schauder. Dans cette note, nous exposons une preuve élémentaire et directe d'une généralisation de l'alternative non linéaire pour les applications contractantes.

Théorème 1. *Soit E un espace de Banach, $K_r = \{x \in E : \|x\| \leq r\}$, et soit $T : K_r \to E$ une application contractante c'est à dire qu'il existe $0 \leq \alpha < 1$ tel que $\|Tx - Ty\| \leq \alpha\|x - y\|$ pour tout $x, y \in K_r$. Alors il existe $\lambda^* \in (0, 1]$ et une courbe lipschitzienne $\lambda \mapsto x_\lambda$ définie de $[0, \lambda^*]$ dans K_r tels que $x_\lambda = \lambda T x_\lambda$ pour tout $\lambda \in [0, \lambda^*]$, et $(\lambda^*, x_{\lambda^*})$ est sur la frontière de $[0, 1] \times K_r$.*

Preuve. On pose $Q = \{\lambda \in [0, 1] : \lambda T$ admet un point fixe x tel que $\|x\| < r\}$. On remarque que Q est non vide car $0 \in Q$. Montrons maintenant que Q est ouvert dans $[0, 1]$. Soient $\lambda_0 \in Q$ et x le point fixe de $\lambda_0 T$ tel que $\|x\| = s < r$. Pour $\lambda \in [0, 1]$ tel que $|\lambda - \lambda_0|\|Tx\| < (r - s)(1 - \alpha)$, l'application λT de la boule $K(x, r - s) = \{y \in E : \|y - x\| \leq r - s\}$ est à valeur dans celle-ci. En effet

$$\begin{aligned} \|x - \lambda T y\| &\leq \|\lambda_0 T x - \lambda T x\| + \|\lambda T x - \lambda T y\| \\ &\leq |\lambda - \lambda_0|\|Tx\| + \alpha\|x - y\| \\ &< (r - s)(1 - \alpha) + \alpha(r - s) = r - s. \end{aligned}$$

En vertu du théorème de Banach, l'application λT admet un point fixe y. De l'inégalité précédente, $\|y\| < r$, et donc $\lambda \in Q$.

Reçu le 15 avril 1994 et, sous forme définitive, le 1er février 1995.

Notons par $[0, \lambda^*)$ le plus grand intervalle contenu dans Q. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, \lambda^*)$ et x_1, x_2 respectivement les points fixes de $\lambda_1 T$ et $\lambda_2 T$. Fixons une constante M telle que $\|Tx\| \leq M$ pour tout $x \in K_r$. Alors, on a l'estimation suivante:

$$\begin{aligned}\|x_1 - x_2\| &\leq \|\lambda_1 Tx_1 - \lambda_2 Tx_1\| + \|\lambda_2 Tx_1 - \lambda_2 Tx_2\| \\ &\leq M\,|\lambda_1 - \lambda_2| + \alpha\,\|x_1 - x_2\|,\end{aligned}$$

et donc

$$\|x_1 - x_2\| \leq \frac{M}{1-\alpha}|\lambda_1 - \lambda_2|.$$

Il s'ensuit que x_λ converge vers un point fixe x_{λ^*} de $\lambda^* T$ lorsque λ converge vers λ^* et la courbe $\lambda \mapsto x_\lambda$ définie sur $[0, \lambda^*]$ est liptshizienne.

Finalement, d'après ce qui précède, l'une des conditions suivantes est verifiée:

$$\lambda^* = 1 \quad \text{ou} \quad \|x\| = r$$

et la preuve du théorème est complète. □

Comme conséquence du théorème 1, nous obtenons les résultats suivants.

Théorème 2. (Alternative non linéaire). *Soient E un espace de Banach et $T : K_r \to E$ une application contractante. Alors au moins l'un des énoncés suivants est vérifié:*

(i) *il existe $x_0 \in K_r$ tel que $x_0 = Tx_0$;*
(ii) *il existe $y_0 \in \partial K_r$ et $\lambda \in (0,1)$ tel que $y_0 = \lambda T y_0$.*

Théorème 3. *Soit $T : K_r \to E$ une application contractante telle que sur la frontière ∂K_r de K_r, une des conditions suivantes est satisfaite:*

(i) $\|T(x)\| \leq \|x\|$; *E. Rothe*
(ii) $\|T(x)\| \leq \|x - Tx\|$;
(iii) $\|T(x)\| \leq \left(\|x\|^2 + \|x - Tx\|^2\right)^{1/2}$; *M. Altman*
(iv) $\|T(x)\| \leq \max\{\|x\|, \|x - Tx\|\}$.

Alors T a un point fixe.

Preuve. Il suffit de vérifier que la propriété (ii) du théorème 2 n'est pas satisfaite. Cette vérification est laissée au lecteur.

Théorème 4. *Soit $T : E \to E$ une application telle que la restriction de T à n'importe quelle boule K_r est une contraction. Alors, il existe $\lambda^* \in (0, 1]$ et une courbe localement lipschitzienne sur $[0, \lambda^*)$ de points fixes $x_\lambda = \lambda T x_\lambda$ tels que au moins un des énoncés suivants est vérifié:*

(i) *l'ensemble $\mathcal{E}_T = \{x_\lambda \in E : \lambda \in [0, \lambda^*)\}$ est non borné;*
(ii) *l'application T admet un unique point fixe x_1, $\lambda^* = 1$ et $x_\lambda \to x_1$ lorsque $\lambda \to 1$.*

L'alternative de Leray-Schauder pour les applications contractantes découle directement de ce résultat.

En conclusion, nous remarquons que le théorème 1 ne peut être obtenu de la théorie de l'indice du point fixe pour les applications condensantes développée par R. Nussbaum dans [2].

Extended English Abstract. In [1], it is shown that the Nonlinear Alternative for compact operators follows simply from the Schauder Fixed Point Theorem. In this note, we provide a direct and elementary proof of a generalization of the Nonlinear Alternative for contractive maps.

Theorem 1. *Let E be a Banach space, $K_r = \{x \in E : \|x\| \leq r\}$, and let $T : K_r \to E$ be a contractive map, that is, there exists $0 \leq \alpha < 1$ such that $\|Tx - Ty\| \leq \alpha\|x - y\|$ for all $x, y \in K_r$. Then, there exist $\lambda^* \in (0, 1]$ and a Lipshitz-continuous curve of fixed points $x_\lambda = \lambda T x_\lambda$ from $[0, \lambda^*]$ to K_r such that $(\lambda^*, x_{\lambda^*})$ is on the boundary of $[0, 1] \times K_r$.*

As an immediate consequence of Theorem 1, we obtain the following results.

Theorem 2. (Nonlinear Alternative). *Let E be a Banach space, and let $T : K_r \to E$ be a contractive map. Then, one of the following statements is satisfied:*

(i) *there exists $x_0 \in K_r$ such that $x_0 = Tx_0$;*
(ii) *there exist $y_0 \in \partial K_r$ and $\lambda \in (0, 1)$ such that $y_0 = \lambda T y_0$.*

Theorem 3. *Let $T : K_r \to E$ be a contractive map such that on the boundary ∂K_r of K_r, one of the following conditions is satisfied:*

(i) $\|T(x)\| \leq \|x\|$; *E. Rothe*
(ii) $\|T(x)\| \leq \|x - Tx\|$;
(iii) $\|T(x)\| \leq \left(\|x\|^2 + \|x - Tx\|^2\right)^{1/2}$; *M. Altman*
(iv) $\|T(x)\| \leq \max\{\|x\|, \|x - Tx\|\}$.

Then T has a unique fixed point.

Theorem 4. *Let $T : E \to E$ be a map which is contractive on every ball K_r. Then there exist $\lambda^* \in (0, 1]$ and a locally Lipschitz-continuous curve of fixed points $x_\lambda = \lambda T x_\lambda$ defined on $[0, \lambda^*)$ such that one of the following statements is satisfied:*

(i) *the set $\mathcal{E}_T = \{x_\lambda \in E : \lambda \in [0, \lambda^*)\}$ is unbounded;*
(ii) *the map T has a unique fixed point x_1, $\lambda^* = 1$, and $x_\lambda \to x_1$ as $\lambda \to 1$.*

The Leray-Schauder Alternative is a direct consequence of Theorem 4.

In conclusion, we remark that Theorem 1 can not be obtained by means of the theory of fixed point index for condensing maps due to R. Nussbaum [2].

RÉFÉRENCES

1. A. Granas, *On the Leray-Schauder alternative*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **2** (1993), 225–230.
2. R. Nussbaum, *The fixed point index for local condensing maps*, Ann. Mat. Pura Appl. **89** (1971), 217–258.

M. FRIGON
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUE
UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CASE POSTALE 6128, SUCCURSALE CENTRE-VILLE
MONTRÉAL, H3C 3J7, CANADA

A. GRANAS
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUE
UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
CASE POSTALE 6128, SUCCURSALE CENTRE-VILLE
MONTRÉAL, H3C 3J7, CANADA
ET
FACULTY OF MATHEMATICS
UNIVERSITY NICOLAS COPERNICUS
12/18 CHOPINA
87100 TORUŃ, POLAND

Z. E. A. GUENNOUN
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ DE RABAT
RABAT, MAROC