Topological methods in differential equations and inclusions, NATO ASI Series, Ser. C : Math. and Phys. Sci., Kluwer, Dordrecht, 1995, pp. 51-87

THÉORÈMES D'EXISTENCE DE SOLUTIONS D'INCLUSIONS DIFFÉRENTIELLES

M. FRIGON

RÉSUMÉ. Dans ce texte, on présente quelques applications de méthodes topologiques permettant d'obtenir l'existence de solutions d'inclusions différentielles ordinaires. Trois types de fonctions multivoques sont distinguées et un principe général d'existence de solutions est établi pour chacun d'eux. Des résultats sont obtenus pour des systèmes d'inclusions différentielles du second ordre et pour des inclusions différentielles dans des espaces de Banach. Les principaux théoèmes obtenus découlent soit de théorèmes de point fixe, soit de la théorie de la transversalité topologique pour des opérateurs compacts ou contractants, univoques ou multivoques.

ABSTRACT. In this text, we present applications of topological methods to ordinary differential inclusions. Three types of multivalued functions are considered and a general existence principle is established for each of them. Results are obtained for second order systems of differential inclusions, and for differential inclusions in Banach spaces. Main theorems rely either on fixed point theorems or on topologigal transversality theories for compact or contractive, univalued or multivalued operators.

1. INTRODUCTION

Dans ce texte, on présente quelques applications de méthodes topologiques permettant d'obtenir l'existence de solutions d'inclusions différentielles telles que

$$y'(t) \in F(t, y(t)) \quad \text{p.p. } t \in I,\ y \in \mathcal{B};$$

$$y''(t) \in F(t, y(t), y'(t)) \quad \text{p.p. } t \in I,\ y \in \mathcal{B},$$

ou plus généralement

$$\begin{aligned} &y^{(k)}(t) - \varepsilon y(t) \in F(t, y(t), \dots, y^{(k-1)}(t)) \quad \text{p.p. } t \in I, \\ &y \in \mathcal{B}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

où I est un intervalle compact, $F : I \times E^k \to E$ est une fonction multivoque à valeurs non vides, compactes et parfois convexes, E est un espace de Banach séparable, et $\mathcal{B}$ désigne une condition initiale, périodique ou aux limites. Plus précisément, les principaux résultats découleront soit de théorèmes de point fixe, soit de la théorie de la transversalité topologique pour des opérateurs compacts ou contractants, univoques ou multivoques. Ces théories, plus simples que celles du degré topologique, ont été introduites par Granas en 1959 et 1976 pour les opérateurs compacts univoques et multivoques respectivement (voir [11]). Celles pour les opérateurs contractants, beaucoup plus récentes, sont présentées dans [17], [21], [25].

Le problème (1.1) a été étudié par de nombreux auteurs dans le cas particulier où la fonction F est univoque; dans ce cas, il s'agit en fait d'une équation différentielle. La littérature est cependant beaucoup moins volumineuse pour les inclusions différentielles et l'est encore moins pour les problèmes d'ordre supérieur, voir par exemple [1], [2], [4], [10], [44] et leurs références.

Les principaux résultats connus reposent sur des théorèmes de point fixe, des méthodes de continuation, des théorèmes de sélection, d'approximation, ou par construction. Il est cependant important de mentionner que les arguments de preuve utilisés varient beaucoup suivant les hypothèses de continuité imposées à la fonction multivoque F. Les trois plus fréquentes sont la semi-continuité supérieure, la semi-continuité inférieure et une condition de Lipschitz. En raison de cela, trois types de fonctions multivoques seront distingués ici, à savoir les fonctions de type scs, sci et T-contractant. Les deux premiers types ont été introduits par [19] en une version légèrement différente alors que le troisième est nouveau. Pour chacun de ces trois types de fonctions, un principe général d'existence de solutions du problème (1.1) est établi. Le principe pour les fonctions de type scs, (resp. sci, T-contractant) repose sur le théorème de point fixe de Kakutani (resp. théorème de Schauder, théorème de Nadler) et sur la théorie de la transversalité topologique pour les opérateurs multivoques semi-continus supérieurement à valeurs convexes, compactes, non vides, (resp. opérateurs univoques compacts, opérateurs multivoques contractants à valeurs fermées non vides). Ces principes, présentés à la section 4, sont la partie centrale de ce texte. Par la suite, on en donne quelques applications.

Le problème aux limites pour une inclusion différentielle du second ordre est ensuite étudié. A notre connaissance, Pruszko (voir [44]) a été le premier à s'intéresser à ce problème et à y appliquer la méthode du degré topologique pour des fonctions multivoques semi-continues supérieurement, compactes, à valeurs convexes, compactes, non vides. Relativement peu de résultats sur ce problème ont été obtenus jusqu'ici. En outre, la méthode de sous et sur-solutions, largement répandue dans l'étude des équations différentielles, ne l'est toutefois pas pour les inclusions différentielles. Cette méthode d'abord rencontrée dans [18] est présentée ici. D'autre part, quelques généralisations de cette notion ont été données pour les systèmes d'équations différentielles, voir par exemple [15], [16], [24], [30], [45]. Celle présentée ici, appelée "tube-solution" est très simple et naturelle. Il est intéressant de mentionner qu'en plus de généraliser la notion de sous et sur-solutions à des systèmes d'inclusions différentielles, elle contient comme cas particulier l'hypothèse utilisée par plusieurs auteurs :

$$\langle y, f(t,y,p)\rangle + \|p\|^2 \geq 0 \quad \text{pour } \|x\| = M \text{ et } \langle x, p\mathbb{R}angle = 0.$$

Par ailleurs, il est bien connu que cette condition et une condition de croissance de Nagumo ne sont pas suffisantes pour garantir l'existence d'une solution à un problème aux limites pour un système d'équations différentielles du second ordre. Une hypothèse supplémentaire est nécessaire. Une des plus fréquemment imposée est celle due à Hartman [31]. Ici, elle sera remplacée par une qui a l'avantage d'être trivialement satisfaite dans le cas scalaire. Gaprindashvili [24] introduisit une hypothèse semblable dans le contexte des équations différentielles.

Ce texte se divise en sept sections. Les notations et préliminaires sont donnés à la section suivante. Entre autre, on y rappelle quelques définitions et résultats sur la théorie des fonctions multivoques ; pour plus de détails sur ce sujet, on pourra consulter [2], [4], [5], [8], [10], [34] et leurs références. Aux sections 3 et 4, trois types de fonctions multivoques sont distingués et un principe d'existence est établi pour chacun d'eux. On applique ces principes à des problèmes aux limites pour des inclusions différentielles du second ordre à la section 5, et à des inclusions différentielles dans des espaces de Banach à la section suivante. Cette dernière a pour but d'illustrer une application du principe d'existence pour les fonctions multivoques de type T-contractant. Par la suite, le théorème de point fixe de Kakutani est utilisé pour obtenir l'existence d'une solution à un problème aux limites pour une inclusion différentielle du second ordre avec impulsions. En annexe, on retrouve les principaux résultats utilisés dans ce texte tels les théorèmes de point fixe, de transversalité topologique et de sélection.

2. Préliminaires

2.1. **Notations.** Soit E un espace de Banach séparable, on définit la *métrique de Hausdorff généralisée* sur l'ensemble des sous-ensembles fermés non vides de E par

$$D(A_1, A_2) = \inf\{\varepsilon > 0 : A_1 \subset B(A_1, \varepsilon), A_2 \subset B(A_2, \varepsilon)\} \in [0, \infty],$$

où A_1 et A_2 sont deux sous-ensembles fermés, non vides de E et

$$B(A, \varepsilon) = \{z \in E : \text{ il existe } y \in A \text{ tel que } \|y - z\| < \varepsilon\}.$$

Par ailleurs, soit $I = [a, b]$ un intervalle réel. On note $C^k(I, E)$ l'espace de Banach des fonctions k-fois continûment différentiables, muni de la norme :

$$\|y\|_k = \max\{\|y\|_0, \dots, \|y^{(k)}\|_0\} \text{ où } \|y\|_0 = \max\{\|y(t)\| : t \in I\}.$$

Aussi, on note $C_0^k(I, E) = \{y \in C^k(I, E) : y(a) = 0\}$ et $C_b^k(I, E) = \{y \in C^k(I, E) : y \in \mathcal{B}\}$ où $\mathcal{B}$ désignera une condition initiale ou aux limites. L'espace de Banach des fonctions intégrables (au sens de Bochner si E est de dimension infinie, voir [47] pour plus de détails) est noté $L^1(I, E)$. Un ensemble $\mathcal{E} \subset L^1(I, E)$ est *décomposable* si pour $u, v \in \mathcal{E}$ et pour $A \subset I$ mesurable, $u\chi_A + v\chi_{A^c} \in \mathcal{E}$.

On introduit un opérateur $\mathcal{I} : L^1(I, E) \to C_0(I, E)$ défini par

$$\mathcal{I}(y)(t) = \int_a^t y(s)\, ds.$$

Par $W^{k,1}(I, E)$, on désigne l'ensemble

$$\{y \in C^{k-1}(I, E) : \text{il existe } v \in L^1(I, E) \text{ tel que } y^{(k-1)} - y^{(k-1)}(a) = \mathcal{I}(v),$$
$$\text{i.e. } y^{(k-1)}(t) - y^{(k-1)}(a) = \int_a^t v(s)\, ds \text{ pour tout } t \in I\};$$

$W_b^{k,1}(I, E) = \{y \in W^{k,1}(I, E) : y \in \mathcal{B}\}$. Rappelons que si $y \in W^{k,1}(I, E)$, alors $y^{(k-1)}$ est dérivable presque partout et $y^{(k)}(t) = v(t)$ presque pour tout $t \in I$. Une *solution du problème* (1.1) est une fonction $y \in W_b^{2,1}(I, E)$ satisfaisant (1.1).

Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}$ fixé, on définit

$$\Lambda : W_b^{k,1}(I, E) \to L^1(I, E) \quad \text{et} \quad L : C_b^{k-1}(I, E) \to C_0(I, E)$$

par

$$\Lambda(y) = y^{(k)} - \varepsilon y$$

et

$$L(y) = y^{(k-1)} - y^{(k-1)}(a) - \varepsilon\mathcal{I}(y)$$

c'est-à-dire

$$L(y)(t) = y^{(k-1)}(t) - y^{(k-1)}(a) - \varepsilon \int_a^t y(s)\, ds \quad \text{pour tout } t \in I.$$

On suppose que ε et $\mathcal{B}$ sont tels que l'opérateur L est inversible.

2.2. **Fonctions multivoques.** Soient E et E_1 des espaces de Banach séparables, X un sous-ensemble fermé, non vide de E_1, et T un espace mesurable. Soient $G : T \to E$ et $H : X \to E$ deux fonctions multivoques à valeurs fermées, non vides. On dira que

- G est *mesurable* si $\{t \in T : G(t) \cap B \neq \emptyset\}$ est mesurable pour tout $B \subset E$ fermé ;
- H est *semi-continue supérieurement* (*s.c.s.*) si $\{x \in X : H(x) \cap B \neq \emptyset\}$ est fermé pour tout $B \subset E$ fermé ;
- H est *semi-continue inférieurement* (*s.c.i.*) si $\{x \in X : H(x) \subset B\}$ est fermé pour tout $B \subset E$ fermé ;
- H est *continue* si elle est semi-continue inférieurement et supérieurement ;
- H est *lipschitzienne* s'il existe une constante $\zeta \geq 0$ telle que $D(H(x), H(y)) \leq \zeta \|x - y\|$ pour $x, y \in X$;
- H est *contractante* si H est lipschitzienne avec une constante $\zeta < 1$;
- H est *compacte* si $\mathrm{cl}\big(H(X)\big)$ est compact dans E ;
- H est *complètement continue* si, pour tout $r > 0$, $\mathrm{cl}\big(H(X \cap \overline{B(0,r)}\,)\big)$ est compact dans E.

2.3. **Opérateurs de Carathéodory et de Niemytzki.** Soit $F : I \times X \to E$ une fonction multivoque à valeurs compactes, non vides. Nous utiliserons les notations ci-dessous pour désigner les conditions suivantes sur F :

(m-t) la fonction F est mesurable en t, i.e. $t \mapsto F(t, x)$ est mesurable pour tout $x \in X$;

(m-tx) la fonction F est $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$-mesurable en (t, x), i.e. $(t, x) \mapsto F(t, x)$ est $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$ mesurable (ici $I \times X$ est muni de la σ-algèbre engendrée par les ensembles $C \times D$ où $C \subset I$ et $D \subset X$ sont mesurables au sens de Lebesgue et Borel respectivement) ;

(scs) la fonction F est semi-continue supérieurement en x, i.e. $x \mapsto F(t, x)$ est s.c.s. presque pour tout $t \in I$;

(sci) la fonction F est semi-continue inférieurement en x, i.e. $x \mapsto F(t, x)$ est s.c.i. presque pour tout $t \in I$;

(cont) la fonction F est continue en x, i.e. $x \mapsto F(t, x)$ est continue presque pour tout $t \in I$;

(l-lip) la fonction F est intégrablement localement lipschitzienne, i.e. pour tout $r > 0$, il existe $l_r \in L^1(I)$ telle que
$$D(F(t, x),\ F(t, y)) \leq l_r(t)\|x - y\|$$
presque pour tout $t \in I$ et pour $x, y \in X \cap \overline{B(0, r)}$;

(I-c) la fonction F est intégrablement compacte, i.e. il existe $h \in L^1(I)$ et un ensemble compact $K \subset \overline{B(0, 1)}$ tels que $F(t, x) \subset h(t)K$ presque pour tout $t \in I$ et pour tout $x \in X$;

(I-cc) la fonction F est intégrablement complètement continue, i.e. pour tout $r > 0$, il existe $h_r \in L^1(I)$ et un ensemble compact $K_r \subset \overline{B(0, 1)}$ tels que l'ensemble $F(t, x) \subset h_r(t)K_r$ presque pour tout $t \in I$ et pour tout $x \in X \cap \overline{B(0, r)}$;

(I-b) la fonction F est intégrablement bornée, i.e. il existe $h \in L^1(I)$ telle que $\|F(t,x)\| \leq h(t)$ presque pour tout $t \in I$ et pour tout $x \in X$;

(I-bb) la fonction F est intégrablement bornée sur les bornés, i.e. pour tout $r > 0$, il existe $h_r \in L^1(I)$ telle que $\|F(t,x)\| \leq h_r(t)$ presque pour tout $t \in I$ et pour tout $x \in X \cap \overline{B(0,r)}$.

Remarque 2.1. Les conditions (I-c) et (I-b), respectivement (I-cc) et (I-bb) sont équivalentes lorsque E est de dimension finie. La condition (I-cc) a été introduite par [22] dans le cadre des fonctions univoques. Il y est défini qu'une fonction f est de $\mathcal{K}$-Carathéodory si elle est de Carathéodory et satisfait (I-cc).

A partir de cette fonction F, on introduit deux opérateurs, soient les *opérateurs de Niemytzki* et de *Carathéodory*

$$\mathcal{F} : C(I,X) \to L^1(I,E) \quad \text{et} \quad \mathcal{N} : C(I,X) \to C_0(I,E)$$

définis par

$$\mathcal{F}(y) = \{w \in L^1(I,E) : w(t) \in F(t,y(t)) \text{ p.p. } t \in I\}$$

et $\mathcal{N} = \mathcal{I} \circ \mathcal{F}$ c'est-à-dire

$$\mathcal{N}(y) = \{v \in C_0(I,E) : \exists w \in \mathcal{F}(y) \text{ tel que } v(t) = \int_a^t w(s)\, ds, \forall t \in I\}.$$

Les conditions précédentes impliquent certaines propriétés sur les fonctions $\mathcal{F}$ et $\mathcal{N}$.

Lemme 2.2. *Soit $F : I \times X \to E$ une fonction multivoque à valeurs compactes, non vides, satisfaisant (I-bb) et l'un des ensembles de conditions suivants :*

(2.2.1) *(m-tx) et (sci) ;*

(2.2.2) *(m-t) et (cont).*

Alors l'opérateur de Niemytzki associé $\mathcal{F} : C(I,X) \to L^1(I,E)$ est semi-continu inférieurement, à valeurs fermées, décomposables, non vides.

Démonstration. Puisque F satisfait (2.2.1) ou (2.2.2), pour tout $y \in C(I,X)$, la fonction $t \mapsto F(t,y(t))$ est mesurable à valeurs fermées, non vides ; voir par exemple [33]. Par le théorème de sélection de Kuratowski, Ryll-Nardzewski [35], cette fonction possède une sélection mesurable et donc intégrable en vertu de (I-bb). En d'autres termes, $\mathcal{F}$ est à valeurs non vides. On vérifie aisément que $\mathcal{F}$ est à valeurs fermées, décomposables. Reste à montrer la semi-continuité inférieure de $\mathcal{F}$.

Soit $B \subset L^1(I,E)$ un ensemble fermé et soit $\mathcal{A} = \{y \in C(I,X) : \mathcal{F}(y) \subset B\}$. On veut montrer que $\mathcal{A}$ est fermé. Soit $(y_n) \in \mathcal{A}$ une suite convergeant vers y dans $C(I,X)$ et soit $v \in \mathcal{F}(y)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction $v_n \in \mathcal{F}(y_n)$ telle que

$$\|v_n(t) - v(t)\| = \operatorname{dist}(v(t), F(t,y_n(t))); \tag{2.1}$$

voir par exemple [10, prop. 3.4]. La condition (sci) ou (cont) implique que

$$\operatorname{dist}(v(t), F(t,y_n(t))) \to 0 \qquad \text{p.p. } t \in I. \tag{2.2}$$

Vu (I-bb), (2.1), (2.2) et le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, il s'avère que $v_n \to v$ dans $L^1(I,E)$. D'où $y \in \mathcal{A}$. $\square$

Lemme 2.3. *Soient E un espace de Banach séparable, réflexif et $F : I \times X \to E$ une fonction multivoque à valeurs compactes, convexes, non vides et satisfaisant (m-t), (scs) et (I-bb). Alors l'opérateur de Carathéodory associé $\mathcal{N} : C(I,X) \to C_0(I,E)$ est à graphe fermé, à valeurs convexes, fermées, non vides. De plus, si $\mathcal{N}$ est complètement continu alors il est semi-continu supérieurement.*

Démonstration. Puisque F satisfait (m-t) et (scs), pour tout $y \in C(I,X)$, la fonction $t \mapsto F(t, y(t))$ possède une sélection mesurable donc intégrable en vertu de (I-bb) ; voir par exemple [7] ou [10, prop. 3.5]. En d'autres termes, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{N}$ sont à valeurs non vides. Par ailleurs, $\mathcal{N}$ est à valeurs fermées, convexes ; voir [9]. Montrons que $\mathcal{N}$ est à graphe fermé.

Soit une suite (y_n) convergeant vers y dans $C(I,X)$ et soient $v_n \in \mathcal{N}(y_n)$ tels que la suite (v_n) converge vers v dans $C(I,E)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction $w_n \in \mathcal{F}(y_n)$ telle que $v_n = \mathcal{I}(w_n)$. Vu (I-bb), il existe $h_r \in L^1(I)$ telle que $\|w_n(t)\| \leq h_r(t)$ presque pour tout $t \in I$. Il s'ensuit que $\{w_n : n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans la topologie faible de $L^1(I,E)$; voir par exemple [9]. Il existe donc w et une sous-suite encore notée (w_n) convergeant faiblement vers w. En conséquence, il existe $z_n \in \operatorname{co}\{w_n, w_{n+1}, \dots\}$ tel que la suite (z_n) converge fortement vers w dans $L^1(I,E)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $z_n(t) \to w(t)$ presque pour tout $t \in I$. Or, puisque F est à valeurs convexes et satisfait (scs),

$$w(t) \subset \bigcap_{n \geq 1} \overline{\operatorname{co}} \Big\{ \bigcup_{m \geq n} w_m(t) \Big\} \subset \bigcap_{n \geq 1} \overline{\operatorname{co}} \Big\{ \bigcup_{m \geq n} F(t, y_m(t)) \Big\} \subset F(t, y(t)) \qquad \text{p.p. } t \in I.$$

On a donc que $w \in \mathcal{F}(y)$. D'autre part, on déduit que $v = \mathcal{I}(w)$ du fait que $\mathcal{I}(w_n) = v_n \to v$ et $w_n \mathbb{R}ightharpoonup w$. D'où, $v \in \mathcal{N}(y)$.

Finalement, montrons que si $\mathcal{N}$ est complètement continu, il est semi-continu supérieurement. Soient $B \subset C_0(I,E)$ un ensemble fermé et $\mathcal{A} = \{y \in C(I,X) : \mathcal{N}(y) \cap B \neq \emptyset\}$. Soit (y_n) une suite dans $\mathcal{A}$ convergeant vers y dans $C(I,X)$. Soit $v_n \in \mathcal{N}(y_n) \cap B$; il existe une sous-suite de (v_n) convergeant vers $v \in B \cap \mathcal{N}(y)$ car $\mathcal{N}$ est complètement continu et à graphe fermé. D'où $y \in \mathcal{A}$. □

On montre les lemmes plus généraux suivants essentiellement de la même façon.

Lemme 2.4. *Soient E un espace de Banach séparable, réflexif et $F : I \times X \to E$ une fonction multivoque à valeurs compactes, convexes, non vides et satisfaisant (m-t), (scs) et (I-bb). Soient B un sous-ensemble fermé de $C(I,X)$ et $\mu : I \times X \to X$ une fonction telle que*

(2.4.1) *pour tout $x \in B$, $t \mapsto \mu(t, x(t))$ est mesurable ;*

(2.4.2) *pour toute suite (x_n) de B convergeant vers x_0, $\mu(t, x_n(t)) \to \mu(t, x_0(t))$ presque pour tout $t \in I$; et de plus, les fonctions $t \mapsto \mu(t, x_i(t))$ sont équi-essentiellement bornées c'est-à-dire qu'il existe $l \in L^\infty(I)$ telle que $\|\mu(t, x_i(t))\| \leq l(t)$ presque pour tout $t \in I$ et pour tout $i \geq 0$.*

Alors l'opérateur de Carathéodory $\mathcal{N} : B \to C_0(I,E)$ associé à la fonction $F \circ (id_I, \mu)$ est à graphe fermé, à valeurs convexes, fermées, non vides. De plus, si $\mathcal{N} : B \to C_0(I,E)$ est complètement continu alors il est semi-continu supérieurement.

Remarquons que la fonction $F \circ (\mathrm{id}_I, \mu)$ ne satisfait pas nécessairement les conditions remplies par F comme par exemple (scs).

Similairement, on a le lemme suivant.

Lemme 2.5. *Soient E un espace de Banach séparable et $F : I \times X \to E$ une fonction multivoque à valeurs compactes, non vides et satisfaisant (m-tx), (sci) et (I-bb). Soient B un sous-ensemble fermé de $C(I,X)$ et $\mu : I \times X \to X$ une fonction vérifiant les conditions* (2.4.1) *et* (2.4.2)*. Alors l'opérateur de Niemytzki $\mathcal{F} : B \to L^1(I,E)$ associé à la fonction $F \circ (id_I, \mu)$ est semi-continu inférieurement, à valeurs décomposables, fermées, non vides.*

Le prochain lemme donne des conditions sous lesquelles l'opérateur de Carathéodory sera localement lipschitzien.

Lemme 2.6. *Soient E un espace de Banach séparable, réflexif et $F : I \times X \to E$ une fonction multivoque à valeurs compactes, convexes, non vides et satisfaisant (m-t), (l-lip) et (I-bb). Alors l'opérateur de Carathéodory associé $\mathcal{N} : C(I,X) \to C_0(I,E)$ est à valeurs convexes, fermées, non vides, et pour x et $y \in C(I,X)$ avec $\|x\|_0$, $\|y\|_0 \le r$, $D(\mathcal{N}(x), \mathcal{N}(y)) \le \|l_r\|_{L^1} \|x - y\|_0$. Plus précisément, pour tout $v \in \mathcal{N}(x)$, il existe $w \in \mathcal{N}(y)$ tel que*

$$\|v(t) - w(t)\| \le \int_a^t l_r(s) \|x(s) - y(s)\| \, ds$$

pour tout $t \in I$.

Démonstration. Puisque F satisfait (l-lip), il satisfait (scs) et du lemme précédent, on déduit que $\mathcal{N}$ est à valeurs convexes, fermées, non vides.

Fixons $r > 0$. Soient $x, y \in C(I,X)$ tels que $\|x\|_0 \le r$, $\|y\|_0 \le r$, et soit $v \in \mathcal{N}(x)$. Ainsi, il existe $z \in \mathcal{F}(x)$ tel que $v = \mathcal{I}(z)$. En procédant comme dans la preuve du lemme 2.2, on montre qu'il existe $u \in \mathcal{F}(y)$ tel que

$$\|z(t) - u(t)\| = \operatorname{dist}(z(t), F(t, y(t))) \qquad \text{p.p. } t \in I. \tag{2.3}$$

Or, étant donnée la condition (l-lip),

$$\begin{aligned} &\operatorname{dist}(z(t), F(t, y(t))) \\ &\qquad \le D(F(t, x(t)), F(t, y(t))) \le l_r(t) \|x(t) - y(t)\| \qquad \text{p.p. } t \in I \end{aligned} \tag{2.4}$$

Notons $w = \mathcal{I}(u) \in \mathcal{N}(y)$. De (2.3) et (2.4), il découle que, pour tout $t \in I$,

$$\|v(t) - w(t)\| \le \int_a^t \|z(s) - u(s)\| \, ds \le \int_a^t l_r(s) \|x(s) - y(s)\| \, ds \le \|l_r\|_{L^1} \|x - y\|_0.$$

□

Le prochain lemme concerne la compacité de $\mathcal{N}$. La preuve est essentiellement celle donnée dans [22].

Lemme 2.7. *Soit $F : I \times X \to E$ une fonction multivoque à valeurs compactes, non vides.*

(2.7.1) *Si F satisfait (I-c) alors $\mathcal{N}$ est compact.*

(2.7.2) *Si F satisfait (I-cc) alors $\mathcal{N}$ est complètement continu.*

Démonstration. Montrons (2.7.1). Par le théorème d'Arzela-Ascoli, pour montrer que $\operatorname{cl}(\mathcal{N}(C(I,X)))$ est compact dans $C(I,E)$, il suffit de vérifier que $\mathcal{N}(C(I,X))$ est borné, équi-continu et que, pour chaque $t \in I$, l'ensemble

$$\{\mathcal{N}(x)(t) : x \in C(I,X)\} = \left\{ \int_a^t v(s) \, ds : v \in \mathcal{F}(x), \ x \in C(I,X) \right\}$$

est relativement compact dans E.

En vertu de la propriété (I-c), il existe $h \in L^1(I)$ et un ensemble compact $K \subset \overline{B(0,1)} \subset E$ tel que $F(t, y(t)) \subset h(t)K$ presque pour tout $t \in I$ et pour tout $y \in C(I, X)$. Il est alors immédiat que $\mathcal{N}(C(I, X))$ est borné et équi-continu.

Soit $b^* \in E^*$ et supposons que K est contenu dans le demi-espace où $b^* \leq c$ c'est-à-dire $b^*(x) \leq c$ pour tout $x \in K$. Il s'avère que pour $v \in \mathcal{F}(y)$,

$$v(s) = h(s)\eta(s) \quad \text{p.p. } s \in I \text{ pour un certain } \eta(s) \in K.$$

D'où, presque pour tout $s \in I$,

$$b^*(v(s)) = b^*(h(s)\eta(s)) = h(s)b^*(\eta(s)) \leq h(s)c.$$

Maintenant, supposons que $\int_a^t h(s)\, ds > 0$. Alors, en utilisant les propriétés de l'intégrale, on obtient

$$b^*\left(\frac{1}{\int_a^t h(s)\, ds} \int_a^t v(s)\, ds\right) = \frac{1}{\int_a^t h(s)\, ds} \int_a^t b^*\big(v(s)\big)\, ds \leq c.$$

Et donc $(1/\int_a^t h(s)\, ds)\, \{\mathcal{N}(x)(t) : x \in C(I, X)\}$ est contenu dans le demi-espace où $b^* \leq c$. Puisque l'intersection de tous les sous-espaces contenant K est son enveloppe convexe fermée, on obtient que

$$\{\mathcal{N}(x)(t) : x \in C(I, X)\} \subset \left(\int_a^t h(s)\, ds\right) \overline{\mathrm{co}}(K) = K_1$$

qui est compact par le théorème de Mazur. Finalement, si $\int_a^t h(s)\, ds = 0$,

$$\big\{\mathcal{N}(x)(t) : x \in C(I, X)\big\} = \{0\} = K_1.$$

La preuve de (2.7.2) est similaire. □

3. Trois types de fonctions multivoques

Parmi les fonctions multivoques, on en distingue trois types. Plus généralement, trois types de familles de fonctions.

Soit une famille de fonctions multivoques à valeurs compactes, non vides, paramètrisée par $\lambda \in [0, 1]$, $F_\lambda : I \times X \to E$. On note respectivement par $\mathcal{F}_\star : C(I, X) \times [0, 1] \to L^1(I, E)$ et $\mathcal{N}_\star : C(I, X) \times [0, 1] \to C_0(I, E)$ les fonctions définies par $\mathcal{F}_\star(y, \lambda) = \mathcal{F}_\lambda(y)$ et $\mathcal{N}_\star(y, \lambda) = \mathcal{N}_\lambda(y)$ où $\mathcal{F}_\lambda$ et $\mathcal{N}_\lambda$ sont respectivement les opérateurs de Niemytzki et de Carathéodory associés à F_λ. Les fonctions $\mathcal{F}_\star$ et $\mathcal{N}_\star$ seront aussi appelées opérateurs de Niemytzki et de Carathéodory respectivement.

Soit un ensemble fermé $B \subset C(I, X)$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. Introduisons maintenant les trois types de familles de fonctions multivoques qui seront considérés dans ce texte.

Définition 3.1. La famille de fonctions multivoques $\{F_\lambda\}_{\lambda \in [0,1]}$ est dite de *type scs sur* B si l'opérateur de Carathéodory associé $\mathcal{N}_\star : B \times [0, 1] \to C_0(I, E)$ est semi-continu supérieurement, compact, à valeurs fermées, convexes, non vides.

Définition 3.2. La famille de fonctions multivoques $\{F_\lambda\}_{\lambda \in [0,1]}$ est dite de *type sci sur* B si l'opérateur de Niemytzki associé $\mathcal{F}_\star : B \times [0, 1] \to L^1(I, E)$ est semi-continu inférieurement, à valeurs fermées, non vides, décomposables, et si l'opérateur de Carathéodory $\mathcal{N}_\star$ restreint à $B \times [0, 1]$ est compact.

Définition 3.3. Soient Y un sous-ensemble fermé d'un espace de Banach et un opérateur univoque continu $T : C_0(I, E) \to Y$. La famille de fonctions multivoques $\{F_\lambda\}_{\lambda\in[0,1]}$ est dite de *type T-contractant sur B* si

(3.3.1) il existe $\zeta < 1$ tel que pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $T \circ \mathcal{N}_\lambda$ est à valeurs fermées, non vides et
$$D(T \circ \mathcal{N}_\lambda(x), T \circ \mathcal{N}_\lambda(y)) \leq \zeta\|x - y\|$$
pour $x, y \in B$;

(3.3.2) il existe une fonction continue, strictement croissante $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telle que
$$D\left(T \circ \mathcal{N}_\lambda(x), T \circ \mathcal{N}_\theta(x)\right) \leq |\phi(\lambda) - \phi(\theta)|$$
pour $\lambda, \theta \in [0, 1]$ et pour $x \in B$.

Après avoir défini trois types de familles de fonctions multivoques, on définit similairement des types de fonctions multivoques.

Définition 3.4. Une fonction multivoque $F : I \times X \to E$ à valeurs compactes, non vides est dite de *type scs* (resp. *sci, contractant*) *sur B* si la famille $\{F_\lambda \equiv F\}_{\lambda\in[0,1]}$ l'est aussi.

On présente maintenant quelques cas particuliers de familles de fonctions de chacun de ces trois types.

Lemme 3.5. *Soient E un espace de Banach réflexif, séparable et une famille $\{F_\lambda : I \times X \to E\}_{\lambda\in[0,1]}$ de fonctions multivoques à valeurs compactes, convexes, non vides telle que la fonction $F : I\times X\times[0, 1] \to E$ définie par $F(t, x, \lambda) = F_\lambda(t, x)$, satisfait (m-t), (scs) et (I-cc). Alors $\{F_\lambda\}_{\lambda\in[0,1]}$ est une famille de fonctions de type scs sur B pour tout ensemble fermé, borné $B \subset C(I, X)$.*

Démonstration. Il suffit de procéder comme dans les démonstrations des lemmes 2.3 et 2.7. □

Lemme 3.6. *Soient E un espace de Banach séparable et $\{F_\lambda : I \times X \to E\}_{\lambda\in[0,1]}$ une famille de fonctions multivoques à valeurs compactes, non vides telle que la fonction $F : I \times X \times [0, 1] \to E$ définie par $F(t, y, \lambda) = F_\lambda(t, y)$, satisfait (m-tx), (sci) et (I-cc). Alors $\{F_\lambda\}_{\lambda\in[0,1]}$ est une famille de fonctions de type sci sur B pour tout ensemble fermé, borné $B \subset C(I, X)$.*

Démonstration. Il suffit de procéder comme dans les démonstrations des lemmes 2.2 et 2.7. □

Lemme 3.7. *Soient E un espace de Banach séparable, réflexif et $F_1 : I \times E \to E$ une fonction multivoque à valeurs compactes, convexes, non vides satisfaisant (m-t), (I-bb) et (l-lip) avec $\|l_r\|_{L^1} < 1$ pour tout $r > 0$. Soit T l'inclusion de $C_0(I, E)$ dans $C(I, E)$. Alors $\{\lambda F_1\}_{\lambda\in[0,1]}$ est une famille de fonctions de type T-contractant sur B pour tout ensemble fermé, borné $B \subset C(I, E)$. En outre, pour x et $y \in B$ et pour tout $v \in \lambda\mathcal{N}_1(x)$, il existe $w \in \lambda\mathcal{N}(y)$ tel que*
$$\|v(t) - w(t)\| \leq \int_a^t l_r(s)\|x(s) - y(s)\|\, ds$$
pour tout $t \in I$.

Démonstration. Remarquons d'abord que $T \circ \mathcal{N}_\lambda = \lambda\mathcal{N}_1$. Maintenant, soit $r > 0$ tel que $\|x\| \le r$ pour tout $x \in B$. En vertu du lemme 2.6, pour tout $\lambda \in [0,1]$, $\lambda\mathcal{N}_1$ est à valeurs fermées, non vides ; et pour x et $y \in B$,

$$D(\lambda\mathcal{N}_1(x), \lambda\mathcal{N}_1(y)) \le \|l_r\|_{L^1}\|x-y\|_0 = \zeta\|x-y\|_0;$$

de plus, pour tout $v \in \lambda\mathcal{N}_1(x)$, il existe $w \in \lambda\mathcal{N}(y)$ tel que

$$\|v(t)-w(t)\| \le \int_a^t l_r(s)\|x(s)-y(s)\|\,ds \quad \text{pour tout } t \in I.$$

D'autre part,

$$D(\lambda\mathcal{N}_1(x), \theta\mathcal{N}_1(x)) \le |\lambda-\theta|\,\|\mathcal{N}_1(x)\| \le |\lambda-\theta|\,\|h_r\|_{L^1},$$

où h_r est la fonction donnée dans (I-bb). En prenant $\phi(\lambda) = \lambda\|h_r\|_{L^1}$, on obtient la conclusion. □

En fait, comme nous le verrons à la section 6, l'hypothèse $\|l_r\|_{L^1} < 1$ peut être enlevée modulo un changement de norme.

4. Principes généraux

Rappelons qu'on s'intéresse particulièrement à des problèmes du premier ordre

$$\begin{aligned} &y'(t) \in F(t, y(t)) \quad \text{p.p. } t \in I,\\ &y \in \mathcal{B}, \end{aligned}$$

où $\mathcal{B}$ désigne une condition initiale ou périodique, et à des problèmes du second ordre

$$\begin{aligned} &y''(t) \in F(t, y(t), y'(t)) \quad \text{p.p. } t \in I,\\ &y \in \mathcal{B}, \end{aligned}$$

où $\mathcal{B}$ désigne une condition périodique ou aux limites comme de Dirichlet, Neumann ou Sturm-Liouville.

Afin de traiter simultanément chacun de ces problèmes, on considère plutôt la famille de problèmes plus généraux suivants

$$\begin{aligned} &y^{(k)}(t) - \varepsilon y(t) \in F_\lambda(t, y(t), \ldots, y^{(k-1)}(t)) \quad \text{p.p. } t \in I,\\ &y \in \mathcal{B}, \end{aligned} \tag{4.1_λ}$$

où $\lambda \in [0,1]$, $I = [a,b]$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ est fixé, $F_\lambda : I \times E^k \to E$ est une fonction multivoque à valeurs compactes, non vides et où E est un espace de Banach séparable. Notons qu'on pourra avoir $F_\lambda \equiv F$ pour tout $\lambda \in [0,1]$. Une solution de (4.1_λ) est une fonction $y \in W_b^{k,1}(I,E)$ satisfaisant (4.1_λ).

Le problème (4.1_λ) peut aussi s'écrire

$$\Lambda(y) \in \mathcal{F}_\lambda(y) = \mathcal{F}_\star(y,\lambda), \quad y \in \mathcal{B},$$

et est équivalent au problème

$$L(y) \in \mathcal{N}_\lambda(y) = \mathcal{N}_\star(y,\lambda), \quad y \in \mathcal{B}, \tag{4.2_λ}$$

où Λ, L, $\mathcal{F}_\lambda$ et $\mathcal{N}_\lambda$ ont été définis à la section 2.

Voici maintenant trois principes généraux d'existence de solutions du problème (4.1_1) ; un pour chacun des types de fonctions distingués à la section 3.

Voici d'abord un principe d'existence pour les fonctions de type scs.

Théorème 4.1 (Principe 1). *Soit* $\{F_\lambda : I \times E^k \to E\}_{\lambda\in[0,1]}$ *une famille de fonctions multivoques. Supposons que l'opérateur* L *est inversible et qu'une des conditions suivantes est satisfaite :*

(4.1.1) F_1 *est de type scs sur* $C_b^{k-1}(I,E)$ *;*

(4.1.2) $F_0(\cdot) = \{0\}$ *; il existe un ouvert borné* $U \subset C_b^{k-1}(I,E)$ *contenant* y_0*, où* $L(y_0) = 0$*, et tel qu'aucune solution de* (4.1_λ) *n'appartient à* ∂U *; et de plus, la famille* $\{F_\lambda\}_\lambda$ *est de type scs sur* $\overline{U}$*.*

Alors le problème (4.1_1) *possède une solution.*

Démonstration. Il est clair que y est une solution de (4.1_λ) si et seulement si y est un point fixe de $L^{-1} \circ \mathcal{N}_\star(\cdot\,,\lambda)$.

1^er cas : *La condition (4.1.1) est satisfaite.* L'opérateur

$$L^{-1} \circ \mathcal{N}_1 : C_b^{k-1}(I,E) \to C_b^{k-1}(I,E)$$

est semi-continu supérieurement, compact et à valeurs compactes, convexes, non vides. Du théorème de Kakutani (théorème A.2), on déduit l'existence d'une solution.

2^e cas : *La condition (4.1.2) est satisfaite.* Par hypothèse,

$$H = L^{-1} \circ \mathcal{N}_\star : \overline{U} \times [0,1] \to C_b^{k-1}(I,E)$$

est une homotopie semi-continue supérieurement, compacte, à valeurs compactes, convexes, non vides et sans point fixe sur ∂U. Puisque $F_0(\cdot) = \{0\}$ et $y_0 \in U$, $H(\cdot\,,0)$ est essentielle en vertu du théorème A.5. D'après le théorème de la transversalité topologique pour les opérateurs multivoques compacts (théorème A.4), $H(\cdot\,,1)$ l'est aussi. Conséquemment, le problème (4.1_1) possède une solution. □

Le principe d'existence précédent est aussi vrai pour une famille de fonctions de type sci.

Théorème 4.2 (Principe 2). *Soit* $\{F_\lambda : I \times E^k \to E\}_{\lambda\in[0,1]}$ *une famille de fonctions multivoques. Supposons que l'opérateur* L *est inversible et qu'une des conditions suivantes est satisfaite :*

(4.2.1) F_1 *est de type sci sur* $C_b^{k-1}(I,E)$ *;*

(4.2.2) $F_0(\cdot) = \{0\}$ *; il existe un ouvert borné* $U \subset C_b^{k-1}(I,E)$ *contenant* y_0*, où* $L(y_0) = 0$*, et tel qu'aucune solution de* (4.1_λ) *n'appartient à* ∂U *; et de plus, la famille* $\{F_\lambda\}_\lambda$ *est de type sci sur* $\overline{U}$*.*

Alors le problème (4.1_1) *possède une solution.*

Démonstration. 1^er cas : *La condition (4.2.1) est satisfaite.* La fonction $\mathcal{F}_1 : C_b^{k-1}(I,E) \to L^1(I,E)$ satisfait les hypothèses du théorème de sélection de Bressan-Colombo (théorème A.8). Elle possède donc une sélection continue $f_1 : C_b^{k-1}(I,E) \to L^1(I,E)$. Considérons le problème

$$\begin{aligned} &L(y) = \mathcal{I} \circ f_1(y), \\ &y \in \mathcal{B}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Il est clair que y est un point fixe de $L^{-1} \circ \mathcal{I} \circ f_1$ si et seulement si y est une solution de (4.3), ce qui implique que y est une solution de (4.1_1).

Puisque $\mathcal{N}_1$ est compact, $\mathcal{I} \circ f_1$ est compact et donc $L^{-1} \circ \mathcal{I} \circ f_1$ l'est aussi. L'existence d'une solution découle du théorème de point fixe de Schauder (théorème A.1).

2^e cas : *La condition (4.2.2) est satisfaite.* En procédant comme dans le cas précédent, la fonction $\mathcal{F}_\star : \overline{U} \times [0,1] \to L^1(I,E)$ possède une sélection continue $f_\star$ telle que $\mathcal{I} \circ f_\star : \overline{U} \times [0,1] \to C_0(I,E)$ est compacte. De la condition (4.2.2), on déduit que $H = L^{-1} \circ \mathcal{I} \circ f_\star : \overline{U} \times [0,1] \to C_b^{k-1}(I,E)$ est une homotopie compacte sans point fixe sur ∂U. Puisque $F_0(\cdot) = \{0\}$ et $y_0 \in U$, le théorème A.5 implique que $H(\cdot\,,0)$ est essentielle. En vertu du théorème de la transversalité topologique pour les opérateurs univoques compacts (théorème A.3), $H(\cdot\,,1)$ l'est aussi et conséquemment le problème (4.3) et donc (4.1_1) possède une solution. □

Finalement, voici un principe d'existence pour les fonctions de type L^{-1}-contractant.

Théorème 4.3 (Principe 3). *Soit $\{F_\lambda : I \times E^k \to E\}_{\lambda\in[0,1]}$ une famille de fonctions multivoques. Supposons que l'opérateur L est inversible et qu'une des conditions suivantes est satisfaite :*

(4.3.1) *F_1 est de type L^{-1}-contractant sur $C_b^{k-1}(I,E)$;*

(4.3.2) *$0 \in F_0(\cdot)$; il existe un ouvert borné $U \subset C_b^{k-1}(I,E)$ contenant y_0, où $L(y_0) = 0$, et tel qu'aucune solution de (4.1_λ) n'appartient à ∂U ; et de plus, la famille $\{F_\lambda\}_\lambda$ est de type L^{-1}-contractant sur $\overline{U}$.*

Alors le problème (4.1_1) possède une solution.

Démonstration. 1^{er} cas : *La condition (4.3.1) est satisfaite.* Dans ce cas, l'opérateur $L^{-1} \circ \mathcal{N}_1 : C_b^{k-1}(I,E) \to C_b^{k-1}(I,E)$ est contractant. En vertu du théorème de Nadler (théorème A.6), on déduit l'existence d'une solution.

2^e cas : *La condition (4.3.2) est satisfaite.* De l'hypothèse (4.3.2), on déduit que $L^{-1} \circ \mathcal{N}_\star : \overline{U} \times [0,1] \to C_b^{k-1}(I,E)$ est une homotopie de contractions, à valeurs fermées, non vides. En vertu du théorème de la transversalité topologique pour les opérateurs multivoques contractants (théorème A.7), on obtient que $L^{-1} \circ \mathcal{N}_\star(\cdot\,,1)$ possède un point fixe car $y_0 \in L^{-1} \circ \mathcal{N}_\star(\cdot\,,0)$. Conséquemment le problème (4.1_1) possède une solution. □

Des applications de ces principes d'existence sont données aux sections 5 et 6.

5. Problèmes de second ordre

Dans cette section, on s'intéresse à des problèmes du second ordre. Afin d'alléger la notation le plus possible, on considère d'abord une condition aux limites de Dirichlet homogène. Ensuite, on indiquera les principales différences qui surviennent lorsqu'on considère d'autres conditions aux limites comme par exemple des conditions périodiques, de Neumann ou de Sturm-Liouville.

Considérons le problème

(5.1)

où F satisfera une condition de croissance de type Nagumo.

Dans un premier temps, F sera une fonction multivoque définie sur $I \times \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Le résultat qui sera présenté reposera sur l'existence de sous et sur-solutions de l'inclusion différentielle (5.1).

Dans un deuxième temps, ce résultat sera généralisé à un système d'inclusions différentielles, c'est-à-dire qu'on aura $F : I \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$. Pour ce faire, une notion équivalente à celle de sous et sur-solutions dans le cas scalaire sera introduite. Aussi, on sait que pour un système d'équations différentielles du second ordre, une condition de croissance de type Nagumo n'est pas suffisante pour borner a priori la dérivée des solutions. C'est pourquoi une condition supplémentaire sera imposée. Celle-ci aura l'avantage d'être trivialement satisfaite lorsque $n = 1$. Le résultat est récent dans le cas particulier d'un système d'équations différentielles [16].

5.1. **Inclusion différentielle dans $\mathbb{R}$.** Considérons d'abord l'inclusion différentielle (5.1) où $F : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Voici la définition de sous et sur-solutions de (5.1).

Définition 5.1. On dit que la fonction $\alpha \in W^{2,1}(I)$ est une *sous-solution* de (5.1) si

(5.1.1) presque pour tout $t \in I$, il existe $v \in F(t, \alpha(t), \alpha'(t))$ tel que $v \leq \alpha''(t)$ (i.e. $F(t, \alpha(t), \alpha'(t)) \cap (-\infty, \alpha''(t)] \neq \emptyset$) ;

(5.1.2) $\alpha(0) \leq 0$, $\alpha(1) \leq 0$.

La fonction $\beta \in W^{2,1}(I)$ est appelée une *sur-solution* de (5.1) si

(5.1.3) presque pour tout $t \in I$, il existe $v \in F(t, \beta(t), \beta'(t))$ tel que $v \geq \beta''(t)$ (i.e. $F(t, \beta(t), \beta'(t)) \cap [\beta''(t), \infty) \neq \emptyset$) ;

(5.1.4) $\beta(0) \geq 0$, $\beta(1) \geq 0$.

Les fonctions $\alpha \leq \beta$ sont dites sous et sur-solutions de (5.1) si elles sont respectivement sous et sur-solutions de (5.1), $\alpha(t) \leq \beta(t)$ pour tout $t \in I$, et

(5.1.5) $\alpha''(t) \in F(t, \alpha(t), \alpha'(t))$ presque partout dans $\{t \in I \mid \alpha(t) = \beta(t)\}$.

Remarquons que la condition (5.1.5) est automatiquement satisfaite lorsque F est à valeurs convexes. On énonce maintenant le théorème principal de cette soussection.

Théorème 5.2. *Soit $F : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction multivoque à valeurs compactes, convexes, non vides satisfaisant (m-t), (scs), (I-bb) et*

(5.2.1) *il existe $\alpha \leq \beta \in W^{2,1}(I)$ respectivement sous et sur-solutions de* (5.1) *;*

(5.2.2) *il existe $\psi : [0, \infty) \to (0, \infty)$ une fonction mesurable au sens de Borel telle que*

$$\int^{\infty} \frac{s}{\psi(s)}\, ds = \infty \quad \text{et} \quad |F(t, x, p)| \leq \psi(|p|)$$

presque pour tout $t \in I$, pour tout p et pour tout $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$.

Alors le problème (5.1) *possède une solution y telle que $\alpha(t) \leq y(t) \leq \beta(t)$ pour tout $t \in I$.*

Pour prouver ce théorème, on introduira une fonction F_+ de type scs sur $C_b^1(I, \mathbb{R})$. Le principe d'existence 1 (théorème 4.1) fournira l'existence d'une solution au problème

$$\begin{aligned} &y''(t) \in F_+(t, y(t), y'(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0,1] = I, \\ &y(0) = 0, y(1) = 0. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Il s'avèrera que cette solution sera aussi une solution de (5.1).

Soit $M > \max\{M_1, \|\alpha'\|_0, \|\beta'\|_0\}$ où

$$\int_0^{M_1} \frac{s}{\psi(s)}\, ds > \sup\{\beta(t_2) - \alpha(t_1) : t_1, t_2 \in I\}.$$

On définit $h : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $\Gamma_+ : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$h(t,x,p) = \begin{cases} (\alpha(t), \alpha'(t)), & \text{si } x < \alpha(t), \\ (\beta(t), \beta'(t)), & \text{si } x > \beta(t), \\ (x, M), & \text{si } \alpha(t) \leq x \leq \beta(t),\ p > M, \\ (x, -M), & \text{si } \alpha(t) \leq x \leq \beta(t),\ p < -M, \\ (x,p), & \text{sinon}\,; \end{cases}$$

et

$$\Gamma_+(t,x,p) = \begin{cases} [\beta''(t), \infty), & \text{si } x > \beta(t), \\ \mathbb{R}, & \text{si } \alpha(t) \leq x \leq \beta(t), \\ (-\infty, \alpha''(t)], & \text{si } x < \alpha(t). \end{cases}$$

Finalement, on définit $F_+ : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$F_+(t,x,p) = F(t, h(t,x,p)) \cap \Gamma_+(t,x,p).$$

Remarque 5.3. La fonction F_+ est définie de sorte que

(5.3.1) pour $\alpha(t) \leq x \leq \beta(t)$ et $|p| \leq M$, $F_+(t,x,p) = F(t,x,p)$;

(5.3.2) pour $\alpha(t) \leq x \leq \beta(t)$ et $|p| \leq M$, $|F_+(t,x,p)| \leq \psi(|p|)$;

(5.3.3) pour tout $x > \beta(t)$, on a $v \geq \beta''(t)$ pour tout $v \in F_+(t,x,p)$; et, pour tout $x < \alpha(t)$, on a $v \leq \alpha''(t)$ pour tout $v \in F_+(t,x,p)$;

(5.3.4) F_+ est à valeurs convexes, compactes, non vides, et est intégrablement bornée, ou encore satisfait (I-b).

Mentionnons que F_+ ne satisfait pas nécessairement (scs). Cependant, pour pouvoir appliquer le principe d'existence 1, il faut vérifier que F_+ est de type scs sur $C_b^1(I, \mathbb{R})$. Pour ce faire, on utilisera le lemme suivant.

Lemme 5.4. *La fonction $h : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie plus haut satisfait les conditions* (2.4.1) *et* (2.4.2) *du lemme* 2.4 *avec $B = C_b^1(I, \mathbb{R})$.*

Démonstration. Il s'agit de remarquer qu'en vertu du lemme de Banach (lemme A.9), on a

$$\text{mes}(\{t \in I : x_0(t) = \alpha(t), x_0'(t) \neq \alpha'(t)\}) = 0$$

et

$$\text{mes}(\{t \in I : x_0(t) = \beta(t), x_0'(t) \neq \beta'(t)\}) = 0.$$

De là, on déduit aisément que $h(t, x_n(t), x_n'(t)) \to h(t, x_0(t), x_0'(t))$ presque pour tout $t \in I$, lorsque $x_n \to x_0$ dans $C^1(I, \mathbb{R})$. □

Démonstration du théorème 5.2. Etant donné que α et β sont respectivement sous et sur-solutions de (5.1), on déduit que F_+ est à valeurs convexes, compactes, non vides. Remarquons aussi que Γ_+ satisfait (m-t) et (scs). Ceci, la remarque (5.3.4) et les lemmes 2.4, 2.7 et 5.4 impliquent que F_+ est de type scs sur $C_b^1(I, \mathbb{R})$, c'est-à-dire satisfait la condition (4.1.1). Le principe d'existence 1 (théorème 4.1) fournit l'existence d'une solution y au problème (5.2).

Reste à prouver que y est aussi solution de (5.1). Vu la remarque (5.3.1), il s'agit de montrer que $\alpha(t) \leq y(t) \leq \beta(t)$ et $|y'(t)| \leq M$ pour tout $t \in I$.

La remarque (5.3.3), les conditions aux limites et le principe du maximum (lemme A.11) impliquent que $\alpha(t) \leq y(t) \leq \beta(t)$ pour tout $t \in I$.

Maintenant, supposons que $\|y'\|_0 \not\leq M$. Alors, il existe t_0, $t_1 \in I$ tels que $|y'(t_0)| = 0$, $|y'(t_1)| = M$ et $0 < |y'(t)| < M$ pour tout t entre t_0 et t_1. Sans perte de généralité, supposons que $t_0 < t_1$ et $y'(t_1) = M$. De la remarque (5.3.2), il découle que $y''(t) \leq \psi(|y'(t)|) = \psi(y'(t))$ presque pour tout $t \in (t_0, t_1)$. En multipliant de chaque côté par $y'(t)$, en divisant par $\psi(y'(t))$, en intégrant de t_0 à t_1 et en utilisant la règle de changement de variables dans une intégrale (lemme A.10), on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^M \frac{s}{\psi(s)}\, ds &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{y'(t)y''(t)}{\psi(y'(t))}\, dt \\ &\leq \int_{t_0}^{t_1} y'(t)\, dt \\ &\leq \sup\{\beta(\tau) - \alpha(s) : \tau, s \in I\} \\ &< \int_0^M \frac{s}{\psi(s)}\, ds,\end{aligned}$$

une contradiction. □

On a l'analogue du théorème 5.2 pour une fonction F satisfaisant une condition de semi-continuité inférieure.

Théorème 5.5. *Soit $F : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction multivoque à valeurs compactes, non vides satisfaisant (m-tx), (sci), (I-bb),* (5.2.1) *et* (5.2.2). *Alors le problème* (5.1) *possède une solution y telle que $\alpha(t) \leq y(t) \leq \beta(t)$ pour tout $t \in I$.*

L'idée de la preuve est la même. On définit $\Gamma_- : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$\Gamma_-(t,x,p) = \begin{cases} [\beta''(t), \infty), & \text{si } x \geq \beta(t), \\ \mathbb{R}, & \text{si } \alpha(t) < x < \beta(t), \\ (-\infty, \alpha''(t)], & \text{si } x \leq \alpha(t). \end{cases}$$

Par là, on signifie que $\Gamma_-(t,x,p) = \alpha''(t)$ si $\alpha(t) = x = \beta(t)$.

Comme précédemment, on définit $F_- : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$F_-(t,x,p) = F(t, h(t,x,p)) \cap \Gamma_-(t,x,p)$$

où h est la fonction définie précédemment.

Démonstration du théorème 5.5. Etant donné que α et β sont respectivement sous et sur-solutions de (5.1), on déduit que F_- est à valeurs compactes, non vides. La définition de F_- et les lemmes 2.5, 2.7 et 5.4 impliquent que F_- est de type sci sur $C_b^1(I, \mathbb{R})$; c'est-à-dire satisfait la condition (4.2.1). Le principe d'existence 2 (théorème 4.2) fournit l'existence d'une solution y au problème (5.2) où F_+ est remplacée par F_-. On prouve que y est aussi solution de (5.1) comme dans la preuve du théorème 5.2. □

Ces résultats sont aussi vrais avec d'autres conditions aux limites comme celles de Sturm-Liouville, Neumann ou périodique.

(P) $y(0) = y(1)$, $y'(0) = y'(1)$,

(SL) $a_0 y(0) - b_0 y'(0) = r_0$, $a_1 y(1) + b_1 y'(1) = r_1$,

où a_i, $b_i \geq 0$, $\max\{a_i, b_i\} > 0$, $i = 0, 1$. Cependant, les conditions aux limites dans la définition (5.1) de sous et sur-solutions doivent alors être remplacées par

(5.1.2') $\alpha(0) = \alpha(1)$, $\alpha'(0) \geq \alpha'(1)$, si $\mathcal{B}$ désigne (P) ;
$a_0\alpha(0) - b_0\alpha'(0) \leq r_0$, $a_1\alpha(1) + b_1\alpha'(1) \leq r_1$, si $\mathcal{B}$ désigne (SL) ;

(5.1.4') $\beta(0) = \beta(1)$, $\beta'(0) \leq \beta'(1)$, si $\mathcal{B}$ désigne (P) ;
$a_0\beta(0) - b_0\beta'(0) \geq r_0$, $a_1\beta(1) + b_1\beta'(1) \geq r_1$, si $\mathcal{B}$ désigne (SL) ;

Si $\mathcal{B}$ désigne l'une de ces conditions aux limites, on fixe $\varepsilon \geq 0$ tel que l'opérateur L soit inversible. En considérant le problème

$$\begin{aligned}&y''(t) - \varepsilon y(t) \in F_{\pm}(t, y(t), y'(t)) - \varepsilon r(t, y(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0,1] = I,\\ &y \in \mathcal{B},\end{aligned}$$

où

$$r(t,x) = \begin{cases} \beta(t), & \text{si } x > \beta(t),\\ \alpha(t), & \text{si } x < \alpha(t),\\ x, & \text{sinon} \,; \end{cases}$$

et en procédant comme précédemment, on déduit l'existence d'une solution de (5.1).

Remarque 5.6. Les théorèmes 5.2 et 5.5 sont aussi vrais si dans la condition (5.2.2), on remplace

$$\int^{\infty} \frac{s}{\psi(s)}\, ds = \infty \quad \text{par} \quad \int_c^{\infty} \frac{s}{\psi(s)}\, ds > \sup\{\beta(t_2) - \alpha(t_1) : t_1, t_2 \in I\},$$

où

$$c = \begin{cases} 0, & \text{si } \mathcal{B} \text{ désigne (P)} \,;\\ \min\left\{ \dfrac{a_0 d + |r_0|}{b_0}, \dfrac{a_1 d + |r_1|}{b_1}, \left| \dfrac{r_1}{a_1} - \dfrac{r_0}{a_0} \right| \right\}, & \text{si } \mathcal{B} \text{ désigne (SL)}, \end{cases}$$

avec $d = \max\{\|\alpha\|_0, \|\beta\|_0\}$.

5.2. **Système d'inclusions différentielles.** Intéressons-nous maintenant à un système d'inclusions différentielles

$$\begin{aligned}&y''(t) \in F(t, y(t), y'(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0,1] = I,\\ &y(0) = 0, y(1) = 0,\end{aligned} \tag{5.1}$$

où $F : I \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ satisfera une condition de croissance de type Nagumo.

Un résultat contenant comme cas particulier le théorème 5.2 présenté plus tôt sera obtenu. Une version univoque de ce résultat a récemment été donnée dans [16]. Le lecteur pourra consulter [14], [15], [22], [24], [27], [30], [37], [45] pour d'autres résultats sur ce problème.

Un des résultats les plus connus sur les systèmes d'équations différentielles est celui de Hartman [31].

Théorème 5.7 (Hartman). *Soit $f : I \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Supposons que f satisfait*

(5.7.1) *il existe $M > 0$ tel que*

$$\langle x, f(t,x,p)\rangle + \|p\|^2 \geq 0$$

pour tout $(t,x,p) \in I \times \mathbb{R}^{2n}$ tel que $\|x\| = M$ et $\langle x, p\rangle = 0$;

(5.7.2) *il existe $k, K \geq 0$ tels que*

$$\|f(t,x,p)\| \leq 2k(\langle x, f(t,x,p)\rangle + \|p\|^2) + K$$

pour tout $(t,x,p) \in I \times \mathbb{R}^{2n}$ tel que $\|x\| \leq M$;

(5.7.3) *il existe une fonction continue* $\psi : [0,\infty) \to (0,\infty)$ *telle que*

$$\int^{\infty} \frac{s}{\psi(s)}\, ds = \infty \quad et \quad \|f(t,x,p)\| \le \psi(\|p\|)$$

pour tout (t,x,p) *tel que* $\|x\| \le M$.

Alors le problème

$$y''(t) = f(t,y(t),y'(t)) \quad p.p.\ t \in [0,1] = I,$$
$$y(0) = 0, y(1) = 0,$$

possède une solution telle que $\|y(t)\| \le M$ *pour tout* $t \in I$.

Dans le cas scalaire, la condition (5.7.1) signifie que $-M$ et M sont respectivement sous et sur-solutions de (5.1) ; et, on a vu (théorème 5.2) que cette condition et (5.7.3) impliquent l'existence d'une solution. Ce résultat n'est donc pas une conséquence du théorème de Hartman puisque la condition (5.7.2) pourrait ne pas être satisfaite. Dans les prochains résultats, la condition (5.7.2) sera remplacée par une qui sera trivialement satisfaite lorsque $n = 1$.

D'autre part, la condition (5.7.1) sera généralisée par une qui équivaudra à l'existence de sous et sur-solutions lorsque $n = 1$. Cette nouvelle notion s'appelle "tube-solution" dont voici la définition pour le système d'inclusions différentielles (5.1).

Définition 5.8. Un couple de fonctions $(\sigma, M) \in W^{2,1}(I,\mathbb{R}^n) \times W^{2,1}(I,[0,\infty))$ est un *tube-solution de* (5.1) si

(5.8.1) presque partout dans $\{t \in I : M(t) > 0\}$ et pour tout couple $(x,p) \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que $\|x - \sigma(t)\| = M(t)$ et $\langle x - \sigma(t), p - \sigma'(t)\rangle = M(t)M'(t)$, il existe $v \in F(t,x,p)$ tel que

$$\langle x - \sigma(t), v - \sigma''(t)\rangle + \|p - \sigma'(t)\|^2 \ge M(t)M''(t) + M'(t)^2;$$

(5.8.2) $\sigma''(t) \in F(t,\sigma(t),\sigma'(t))$ presque partout dans $\{t \in I : M(t) = 0\}$;

(5.8.3) $\|\sigma(0)\| \le M(0)$, $\|\sigma(1)\| \le M(1)$.

Il est à remarquer que dans le cas où $n = 1$, $\alpha \le \beta$ sont sous et sur-solutions de (5.1) si et seulement si $\big((\alpha+\beta)/2, (\beta-\alpha)/2\big)$ est un tube-solution de (5.1).

Voici maintenant le théorème principal de cette sous-section, il généralise le théorème 5.2 présenté plus tôt.

Théorème 5.9. *Soit* $F : I \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ *une fonction multivoque à valeurs compactes, convexes, non vides, satisfaisant (m-t), (scs), (I-bb) et*

(5.9.1) *il existe* (σ, M) *un tube-solution de* (5.1) *;*

(5.9.2) *il existe* $k, \theta > 0$, $l \in L^1(I)$ *tels que presque pour tout* $t \in I$ *et pour tout* $(x,p) \in \mathbb{R}^{2n}$ *satisfaisant* $\|x - \sigma(t)\| \le M(t)$ *et* $\|p - \sigma(t)\| \ge k$, *il existe* $v \in F(t,x,p)$ *tel que*

$$g(t,x,p,v) \ge \theta\,\|p - \sigma'(t)\| - l(t),$$

où

$$g(t,x,p,v) = \frac{\langle x - \sigma(t), v - \sigma''(t)\rangle + \|p - \sigma'(t)\|^2}{\|p - \sigma'(t)\|} - \frac{\langle x - \sigma(t), p - \sigma'(t)\rangle\langle p - \sigma'(t), v - \sigma''(t)\rangle}{\|p - \sigma'(t)\|^3};$$

(5.9.3) *il existe* $\psi : [0, \infty) \to (0, \infty)$ *une fonction mesurable au sens de Borel telle que*

$$\int^{\infty} \frac{s}{\psi(s)}\, ds = \infty \quad et \quad \|F(t,x,p)\| \leq \psi(\|p\|)$$

presque pour tout $t \in I$, *pour tout* p *et pour tout* x *tel que* $\|x - \sigma(t)\| \leq M(t)$.

Alors le problème (5.1) *possède une solution* y *telle que* $\|y(t) - \sigma(t)\| \leq M(t)$ *pour tout* $t \in I$.

Ce théorème sera obtenu grâce au principe d'existence 1 (théorème 4.1). Pour ce faire, on introduira une famille de fonctions F_λ de type scs sur tout sous-ensemble fermé, borné de $C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Ensuite on considérera la famille de problèmes associés :

$$\begin{aligned} &y''(t) \in F_\lambda(t, y(t), y'(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0,1] = I, \\ &y(0) = 0, y(1) = 0, \end{aligned} \tag{5.3$_\lambda$}$$

on obtiendra l'existence d'une solution au problème (5.3_1) et finalement, on déduira que cette solution est une solution du problème original (5.1).

La preuve utilisera les trois lemmes suivants.

Lemme 5.10. *Si* $x \in W_b^{2,1}(I, \mathbb{R}^n)$ *satisfait* $d(t, x(t), x'(t), x''(t)) \geq M''(t)$ *presque partout dans l'ensemble* $\{t \in I : \|x(t) - \sigma(t)\| > M(t)\}$, *où*

$$d(t,x,p,v) = \frac{\langle x - \sigma(t), v - \sigma''(t)\rangle + \|p - \sigma'(t)\|^2}{\|x - \sigma(t)\|} - \frac{\langle x - \sigma(t), p - \sigma'(t)\rangle^2}{\|x - \sigma(t)\|^3}.$$

Alors $\|x(t) - \sigma(t)\| \leq M(t)$ *pour tout* $t \in I$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que $\|x(t) - \sigma(t)\|'' = d(t, x(t), x'(t), x''(t))$ presque partout dans $\{t \in I : \|x(t) - \sigma(t)\| > M(t)\}$. La conclusion découle du principe du maximum (lemme A.11) appliqué à $\|x - \sigma\| - M$. □

Lemme 5.11. *Soient* M_0, k_0, θ_0 *des constantes positives, non-nulles, et* $l_0 \in L^1(I)$. *Si* $x \in W^{2,1}(I, \mathbb{R}^n)$ *satisfait* $\|x - \sigma\|_0 \leq M_0$ *et*

$$g(t, x(t), x'(t), x''(t)) \geq \theta_0 \|x'(t) - \sigma'(t)\| - l_0(t)$$

presque partout dans $\{t \in I : \|x'(t) - \sigma'(t)\| > k_0\}$, *où* g *est donnée à la condition* (5.9.2). *Alors il existe une constante* $K = K(\theta_0, l_0, M_0) \geq k_0$ *telle que* $\|x' - \sigma'\|_{L^1[a,b]} \leq K$ *pour tout* $(a,b) \subset I$ *sur lequel* $\|x'(t) - \sigma'(t)\| > k_0$.

Démonstration. Remarquons d'abord que presque partout dans l'ensemble $\{t \in I : \|x'(t) - \sigma'(t)\| > 0\}$,

$$g(t, x(t), x'(t), x''(t)) = \frac{d}{dt} \frac{\langle x(t) - \sigma(t), x'(t) - \sigma'(t)\rangle}{\|x'(t) - \sigma'(t)\|}. \tag{5.4}$$

Supposons maintenant que $\|x'(t) - \sigma'(t)\| > k_0$ dans $(a,b) \subset I$. Etant donné les hypothèses et (5.4), on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b \|x'(t) - \sigma'(t)\|\, dt &\leq \frac{1}{\theta_0}\left(\|l_0\|_{L^1[a,b]} + \int_a^b \frac{d}{dt} \frac{\langle x(t) - \sigma(t), x'(t) - \sigma'(t)\rangle}{\|x'(t) - \sigma'(t)\|}\, dt \right) \\ &\leq \frac{1}{\theta_0}\left(\|l_0\|_{L^1[a,b]} + 2\|x - \sigma\|_0 \right) \\ &\leq \frac{1}{\theta_0}\left(\|l_0\|_{L^1(I)} + 2M_0 \right) = K. \end{aligned}$$

□

Lemme 5.12. *Supposons que* $x \in W^{2,1}(I, \mathbb{R}^n)$ *satisfait les hypothèses du lemme* 5.11 *et* $\|x''(t)\| \leq \psi(\|x'(t)\|)$ *presque pour tout* $t \in I$ *où* ψ *est une fonction comme dans* (5.9.3). *Alors il existe une constante* M_1 *indépendante de* x *et telle que* $\|x'(t)\| \leq M_1$ *pour tout* $t \in I$.

Démonstration. Vu le lemme précédent, il existe $t \in I$ tel que

$$\|x'(t)\| \leq \min\{k_0 + \|\sigma'\|_0, K + \|\sigma'\|_{L^1(I)}\} = k_1,$$

où K est la constante donnée au lemme 5.11. Supposons que $\|x'\|_0 \not\leq k_1$ et soit $t_1 \in I$ pour lequel $\|x'(t)\|$ atteint son maximum. Alors, il existe $t_0 \in I$ tel que $\|x'(t_0)\| = k_1$ et $k_1 < \|x'(t)\|$ pour tout t entre t_0 et t_1. Ainsi, $\|x'(t) - \sigma'(t)\| > k_0$ pour tout t entre t_0 et t_1. D'autre part, sur cet intervalle, $\|x'(t)\|$ est absolument continue et

$$\left| \|x'(t)\|' \right| = \left| \frac{\langle x'(t), x''(t) \rangle}{\|x'(t)\|} \right| \leq \psi(\|x'(t)\|). \tag{5.5}$$

Sans perte de généralité, supposons que $t_0 < t_1$. De (5.5) et de la règle de changement de variable dans une intégrale (lemme A.10), il découle que

$$\begin{aligned}\int_{k_1}^{\|x'(t_1)\|} \frac{s}{\psi(s)}\, ds &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\|x'(t)\|\, \|x'(t)\|'}{\psi(\|x'(t)\|)}\, dt \\ &\leq \|x'\|_{L^1([t_0,t_1])} \leq K + \|\sigma'\|_{L^1(I)} < \int_{k_1}^{\infty} \frac{s}{\psi(s)}\, ds.\end{aligned}$$

D'où l'existence d'une constante M_1 telle que $\|x'(t)\| \leq M_1$ pour tout $t \in I$. □

Introduisons la famille de fonctions $\{F_\lambda\}_{\lambda \in [0,1]}$ qui sera utilisée dans la démonstration du théorème 5.9. Pour ce faire, définissons $\widetilde{x} : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\widehat{p} : I \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ et $\Gamma : I \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ par

$$\widetilde{x}(t,x) = \begin{cases} \dfrac{M(t)}{\|x - \sigma(t)\|}\big(x - \sigma(t)\big) + \sigma(t), & \text{si } \|x - \sigma(t)\| > M(t), \\ x, & \text{sinon}\,; \end{cases}$$

$$\widehat{p}(t,x,p) = \begin{cases} p + \left(M'(t) - \dfrac{\langle x - \sigma(t), p - \sigma'(t) \rangle}{\|x - \sigma(t)\|} \right) \left(\dfrac{x - \sigma(t)}{\|x - \sigma(t)\|} \right), & \text{si } \|x - \sigma(t)\| > M(t), \\ p, & \text{sinon}\,; \end{cases}$$

et

$$\Gamma(t,x,p) = \begin{cases} \{v : \langle \widetilde{x}(t,x) - \sigma(t), v - \sigma''(t) \rangle + \|\widehat{p}(t,x,p) - \sigma'(t)\|^2 & \\ \qquad \geq M(t)M''(t) + M'(t)^2\}, & \text{si } \|x - \sigma(t)\| > M(t) > 0, \\ \{v : g(t,x,p,v) \geq \theta \, \|p - \sigma'(t)\| - l(t)\}, & \text{si } \|x - \sigma(t)\| \leq M(t) \neq 0, \\ & \quad \text{et } \|p - \sigma'(t)\| > k, \\ \mathbb{R}^n, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Finalement, pour $\lambda \in [0,1]$, on définit la famille de fonctions $F_\lambda : I \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ par

$$F_\lambda(t,x,p) = \widetilde{F}_\lambda(t,x,p) + G_\lambda(t,x,p), \tag{5.6}$$

où $\widetilde{F}_\lambda : I \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ et $G_\lambda : I \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ sont définies de la façon suivante :

$$\widetilde{F}_\lambda(t,x,p) = \begin{cases} \dfrac{\lambda M(t)}{\|x-\sigma(t)\|}\big(F(t,\widetilde{x}(t,x),\widehat{p}(t,x,p)) \cap \Gamma(t,x,p)\big), & \text{si } \|x-\sigma(t)\| > M(t) > 0, \\ \lambda\big(F(t,x,p) \cap \Gamma(t,x,p)\big), & \text{si } \|x-\sigma(t)\| \le M(t) \ne 0, \\ \sigma''(t), & \text{si } M(t) = 0, \end{cases}$$

et

$$G_\lambda(t,x,p) = \begin{cases} \eta(t,x,p)(x-\sigma(t)) & \text{si } \|x-\sigma(t)\| > M(t) > 0, \\ [0,(1-\lambda)]\xi(t,x,p)(x-\sigma(t)) & \text{si } \|x-\sigma(t)\| = M(t) \ne 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où

$$\eta(t,x,p) = \Bigg(\left(1 - \frac{\lambda M(t)}{\|x-\sigma(t)\|}\right)\left(\frac{M''(t)}{\|x-\sigma(t)\|} + \frac{\langle x-\sigma(t), \sigma''(t)\rangle}{\|x-\sigma(t)\|^2}\right) + (1-\lambda)\left(\frac{M'(t)^2 - \|\widehat{p}-\sigma'(t)\|^2}{\|x-\sigma(t)\|^2}\right)\Bigg)^+$$

et

$$\xi(t,x,p) = \left(\frac{M''(t)}{\|x-\sigma(t)\|} + \frac{\langle x-\sigma(t), \sigma''(t)\rangle}{\|x-\sigma(t)\|^2} + \frac{M'(t)^2 - \|p-\sigma'(t)\|^2}{\|x-\sigma(t)\|^2}\right)^+$$

Remarque 5.13. Voici quelques observations découlant des définitions précédentes.

(5.13.1) Si $\|x-\sigma(t)\| > M(t)$, $\|\widetilde{x}(t,x)-\sigma(t)\| = M(t)$ et

$$\langle \widetilde{x}(t,x)-\sigma(t), \widehat{p}(t,x,p)-\sigma'(t)\rangle = M(t)M'(t).$$

(5.13.2) La fonction $(t,x,p) \mapsto (\widetilde{x}(t,x), \widehat{p}(t,x,p))$ satisfait les conditions (2.4.1) et (2.4.2). Entre autre, la condition (2.4.2) découle du lemme A.9.

(5.13.3) Les fonctions $F_\lambda(t,x,p)$ sont à valeurs convexes, compactes, non vides.

(5.13.4) Pour tout $x \in C^1(I,\mathbb{R}^n)$ et presque partout dans $\{t \in I : \|x(t)-\sigma(t)\| \le M(t)\}$,

$$F_1(t,x(t),x'(t)) \subset F(t,x(t),x'(t)),$$

car $x(t) = \sigma(t)$, $x'(t) = \sigma'(t)$ presque partout dans $\{t : \|x(t)-\sigma(t)\| = M(t) = 0\}$ en vertu du lemme A.9.

(5.13.5) Presque pour tout $t \in I$ et pour tout $(x,p) \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que $\|x-\sigma(t)\| > M(t)$,

$$d(t,x,p,F_\lambda(t,x,p)) \ge M''(t)$$

où d est la fonction définie au lemme 5.10.

(5.13.6) Presque partout dans $\{t \in I : M(t) > 0\}$ et pour tout $(x,p) \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que $\|x-\sigma(t)\| \le M(t)$ et $\|p-\sigma'(t)\| > k$,

$$\begin{aligned} g(t,x,p,F_\lambda(t,x,p)) &\ge \theta\,\|p-\sigma'(t)\| - l(t) - 2M(t)|\sigma''(t)|/k \\ &= \theta\,\|p-\sigma'(t)\| - l_1(t), \end{aligned}$$

où g, θ, k et l sont donnés à la condition (5.9.2) et $l_1(t) = l(t) + 2M(t)|\sigma''(t)|/k$.

(5.13.7) Pour tout $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ et presque partout dans $\{t \in I : \|x(t) - \sigma(t)\| \leq M(t)\}$,

$$\|F_\lambda(t, x(t), x'(t))\| \leq \psi(\|x'(t)\|),$$

car presque partout dans $\{t \in I : \|x(t) - \sigma(t)\| = M(t) \neq 0\}$,

$$\langle x(t) - \sigma(t), x'(t) - \sigma'(t)\rangle = M(t)M'(t)$$

et

$$\|G_\lambda(t, x(t), x'(t))\| \leq (1-\lambda)\frac{\langle x(t) - \sigma(t), v\rangle}{\|x - \sigma(t)\|}$$

pour au moins un $v \in F(t, x(t), x'(t))$. D'où

$$\|G_\lambda(t, x(t), x'(t))\| \leq (1-\lambda)\|F(t, x(t), x'(t)\|.$$

(5.13.8) Pour tout $r > 0$, il existe $\widehat{h}_r \in L^1(I)$ indépendante de $\lambda \in [0, 1]$ telle que pour tout $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ satisfaisant $\|x\|_1 \leq r$, on a

$$\|F_\lambda(t, x(t), x'(t))\| \leq \widehat{h}_r(t) \quad \text{p.p. } t \in I.$$

En effet, les fonctions $\widetilde{F}_\lambda$ satisfont (I-bb) indépendamment de $\lambda \in [0, 1]$, et presque partout dans $\{t \in I : 0 < M(t) \leq \|x(t) - \sigma(t)\|\}$,

$$\begin{aligned}&\|G_\lambda(t, x(t), x'(t))\| \\ &\qquad \leq (1-\lambda)\frac{\langle x(t) - \sigma(t), v\rangle}{\|x - \sigma(t)\|} + \left(1 - \frac{M(t)}{\|x(t) - \sigma(t)\|}\right)(|M''(t)| + \|\sigma''(t)\|)\end{aligned}$$

pour au moins un $v \in F(t, \widetilde{x}(t, x(t)), \widehat{x'}(t, x(t), x'(t)))$. D'où

$$\begin{aligned}&\|G_\lambda(t, x(t), x'(t))\| \\ &\qquad \leq (1-\lambda)\|F(t, \widetilde{x}(t, x(t)), \widehat{x'}(t, x(t), x'(t)))\| + (|M''(t)| + \|\sigma''(t)\|).\end{aligned}$$

(5.13.9) Il existe $\widehat{h} \in L^1(I)$ telle que pour tout $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, on a

$$\|F_0(t, x(t), x'(t))\| \leq \widehat{h}(t) \quad \text{p.p. } t \in I.$$

Proposition 5.14. *Sous les hypothèses du théorème* 5.9, *la famille de fonctions* F_λ *est de type scs sur tout sous-ensemble fermé, borné de* $C_b^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Démonstration. La preuve découle des lemmes 2.4 et 2.7, des remarques (5.13.2), (5.13.3), (5.13.8) et du fait que la famille G_λ est aussi de type scs sur tout sous-ensemble fermé, borné de $C^1(I, \mathbb{R}^n)$. □

Proposition 5.15. *Sous les hypothèses du théorème* 5.9, *il existe une constante* $\widetilde{M}$ *telle que toute solution* y *de* (5.3_λ) *satisfait* $\|y\|_1 \leq \widetilde{M}$. *De plus,* $\|y(t) - \sigma(t)\| \leq M(t)$ *pour tout* $t \in I$.

Démonstration. La preuve découle des lemmes 5.10, 5.11 et 5.12 et des remarques (5.13.5), (5.13.6), (5.13.7). □

Démonstration du théorème 5.9. Soit la famille de fonctions

$$\{H_\mu : I \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n\}_{\mu \in [0,1]}$$

définie par

$$H_\mu(t, x, p) = \begin{cases} 2\mu F_0(t, x, p), & \text{si } 0 \leq \mu < 1/2, \\ F_{2\mu - 1}(t, x, p), & \text{si } 1/2 \leq \mu \leq 1. \end{cases}$$

Considérons la famille de problèmes

$$\begin{aligned} &y''(t) \in H_\mu(t, y(t), y'(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0,1] = I, \\ &y(0) = 0, y(1) = 0, \end{aligned} \tag{5.7_μ}$$

Vu la remarque (5.13.9) et la proposition 5.15, il existe une constante $\widehat{M}$ telle que toute solution y de (5.7_μ) satisfait $\|y\|_1 < \widehat{M}$. En vertu de la proposition 5.14, la famille de fonctions $\{H_\mu\}_{\mu\in[0,1]}$ est de type scs sur tout sous-ensemble fermé, borné de $C^1_b(I, \mathbb{R}^n)$. Ainsi, la condition (4.1.2) est satisfaite et le principe d'existence 1 (théorème 4.1) fournit l'existence d'une solution au problème (5.7_1) ou encore (5.3_1). On conclut grâce à la proposition 5.15 et à la remarque ((5.13).4). □

Remarque 5.16. La condition (5.9.2) peut être généralisée, par exemple, par la condition suivante :

(5.16.1) il existe $k, \theta, \gamma > 0$, $m \geq 0$, $l, l_1 \in L^1(I)$ tels que presque pour tout $t \in I$, pour tout $(x,p) \in \mathbb{R}^{2n}$ satisfaisant $0 < \|x - \sigma(t)\| \leq M(t)$ et $\|p - \sigma(t)\| \geq k$, il existe $v \in F(t,x,p)$ tel que
  (1) $g(t,x,p,v) \geq \theta\,\|p - \sigma'(t)\| - l(t) - m\,|\langle x - \sigma(t), p - \sigma'(t)\rangle|$;
  (2) $g_1(t,x,p,v) \geq \gamma\,|\langle x - \sigma(t), p - \sigma'(t)\rangle| - l_1(t)$,
où g est comme à la condition (5.9.2) i.e.

$$\begin{aligned} g(t,x,p,v) = &\frac{\langle x - \sigma(t), v - \sigma''(t)\rangle + \|p - \sigma'(t)\|^2}{\|p - \sigma'(t)\|} \\ &- \frac{\langle x - \sigma(t), p - \sigma'(t)\rangle \langle p - \sigma'(t), v - \sigma''(t)\rangle}{\|p - \sigma'(t)\|^3}, \end{aligned}$$

et g_1 est définie comme suit

$$g_1(t,x,p,v) = \|x - \sigma(t)\| g(t,x,p,v) + \frac{\langle x - \sigma(t), p - \sigma'(t)\rangle^2}{\|x - \sigma(t)\|\,\|p - \sigma'(t)\|}.$$

Avec cette hypothèse, on obtient l'analogue du lemme 5.11. La preuve va comme suit. On remarque que presque partout dans $\{t \in I : \|x'(t) - \sigma'(t)\| > 0\}$,

$$g_1(t, x(t), x'(t), x''(t)) = \frac{d}{dt} \frac{\|x(t) - \sigma(t)\|\,\langle x(t) - \sigma(t), x'(t) - \sigma'(t)\rangle}{\|x'(t) - \sigma'(t)\|}.$$

En vertu de la condition (5.16.1)(2), sur tout intervalle $[a,b] \subset I$ sur lequel $\|x(t) - \sigma(t)\| \leq M(t)$ et $\|x'(t) - \sigma'(t)\| \geq k$

$$\begin{aligned} &\int_a^b |\langle x(t) - \sigma(t), x'(t) - \sigma'(t)\rangle|\,dt \\ &\qquad \leq \frac{1}{\gamma}\left(\|l_1\|_{L^1[a,b]} + \int_a^b \frac{d}{dt} \frac{\|x(t) - \sigma(t)\|\,\langle x(t) - \sigma(t), x'(t) - \sigma'(t)\rangle}{\|x'(t) - \sigma'(t)\|}\,dt\right) \\ &\qquad \leq \frac{1}{\gamma}\left(\|l_1\|_{L^1[a,b]} + 2\|x - \sigma\|_0^2\right) \\ &\qquad \leq \frac{1}{\gamma}\left(\|l_1\|_{L^1(I)} + 2\|M\|_0^2\right) = K_1. \end{aligned}$$

Cette inégalité combinée à la condition (5.16.1)(1) donne

$$\begin{aligned}\int_a^b \|x'(t) - \sigma'(t)\|\, dt &\leq \frac{1}{\theta}\left(\|l\|_{L^1[a,b]} + mK_1 + \int_a^b \frac{d}{dt} \frac{\langle x(t) - \sigma(t), x'(t) - \sigma'(t)\rangle}{\|x'(t) - \sigma'(t)\|}\, dt \right) \\ &\leq \frac{1}{\theta}\left(\|l\|_{L^1[a,b]} + mK_1 + 2\|x - \sigma\|_0 \right) \\ &\leq \frac{1}{\theta}\left(\|l\|_{L^1(I)} + mK_1 + 2\|M\|_0 \right).\end{aligned}$$

Remarque 5.17. D'autres conditions aux limites peuvent aussi être considérées, il faut alors que le tube-solution satisfasse les conditions aux limites appropriées. Par exemple, si on a une condition périodique ou de Sturm-Liouville

(P) $y(0) = y(1)$, $y'(0) = y'(1)$;

(SL) $A_0 y(0) - \beta_0 y'(0) = r_0$, $A_1 y(1) + \beta_1 y'(1) = r_1$;

où A_i sont des matrices $n \times n$ possiblement non symétriques pour lesquelles il existe une constante $\alpha_i \geq 0$ telle que $\langle x, A_i x\rangle \geq \alpha_i \|x\|^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$; avec $\beta_i \in \{0, 1\}$, $\alpha_i + \beta_i > 0$; et $i = 0, 1$; dans la définition 5.8 de tube-solution, on remplace la condition (5.8.3) respectivement par :

$(5.8.3)_{(\mathrm{P})}$ $\sigma(0) = \sigma(1)$, $\|\sigma'(1) - \sigma'(0)\| \leq M'(1) - M'(0)$ et $M(0) = M(1)$, si $\mathcal{B}$ désigne (P) ;

$(5.8.3)_{(\mathrm{SL})}$ $\|r_0 - (A_0\sigma(0) - \beta_0\sigma'(0))\| \leq \alpha_0 M(0) - \beta_0 M'(0)$
$\|r_1 - (A_1\sigma(0) + \beta_1\sigma'(0))\| \leq \alpha_1 M(0) + \beta_1 M'(0)$, si $\mathcal{B}$ désigne (SL).

Bien sûr, si ces conditions aux limites sont considérées, la preuve devra être modifiée ; pour plus de détails, voir [16].

Remarque 5.18. Le théorème 5.9 est aussi vrai si les hypothèses (m-t) et (scs) sont remplacées par (m-tx) et (sci).

Voici deux exemples simples d'équations différentielles présentés dans [16] pour lesquels on peut déduire l'existence d'une solution grâce au théorème 5.9 et à la remarque 5.16.

Exemple 5.19. Le problème

$$\begin{aligned} y''(t) &= \|y'(t)\|\, y'(t) - c, \\ y(0) &= y(1) = (0, \cdots, 0), \end{aligned}$$

où $c \in \mathbb{R}^n$ satisfait $\|c\| = 1$ possède une solution telle que $\|y(t)\| \leq t$. En effet, on vérifie que $\sigma(t) \equiv 0$, $M(t) = t$, n'importe lequel $k > 0$, $\theta = 1$, $l(t) = 2t/k$, $\psi(s) = s^2 + 1$ satisfont les hypothèses du théorème 5.9. Remarquons qu'il n'y a pas de constante M telle que $(0, M)$ est un tube-solution de ce problème et que la condition (5.7.2) n'est pas satisfaite.

Exemple 5.20. Le problème

$$\begin{aligned} y''(t) &= -4\langle y(t), y'(t)\rangle^2 y(t) + y(t) + c, \\ y(0) &= y(1) = (0, \cdots, 0), \end{aligned}$$

où $c \in \mathbb{R}^n$ satisfait $\|c\| = 1$ possède une solution telle que $\|y(t)\| \leq t$. En effet, on vérifie que $\sigma \equiv 0$, $M \equiv 1$, $\gamma = 1/4$, $\theta = 1$, $m = 4$, n'importe lequel $k > 0$, $l = l_1 \equiv 3/k$, $\psi(s) = 4s^2 + 2$ satisfont les hypothèses du théorème 5.9 avec la condition (5.9.2) remplacée par (5.16.1) de la remarque 5.16. Observons que les conditions (5.7.2) et (5.9.2) ne sont pas satisfaites avec ce tube-solution.

6. Inclusions différentielles dans les espaces de Banach

Dans cette section, on présente deux théorèmes d'existence de solutions à un problème à valeur initiale d'inclusions différentielles dans un espace de Banach sous une hypothèse de croissance de type Wintner (voir [22], [38], [39], [46]), dans le but d'illustrer deux types d'hypothèses pouvant être imposées à la fonction F. Dans un espace de dimension infinie, on sait par exemple qu'on ne peut garantir l'existence d'une solution d'une équation différentielle dont le membre de droite est une fonction continue et bornée f. Dans ce contexte, et contrairement au cas où l'espace est de dimension finie, cette hypothèse n'implique pas la compacité de l'opérateur de Carathéodory associé à cette fonction. Il faut alors ajouter des hypothèses sur f comme la complète continuité, $\mathcal{K}$-Carathéodory [22], ou encore une condition de Lipschitz. De ces hypothèses, il découle que l'opérateur de Carathéodory associé à la fonction est complètement continu ou lipschitzien.

Voici donc deux théorèmes d'existence dans lesquels la fonction multivoque F satisfait la même condition de croissance mais découlant de deux des principes d'existence présentés à la section 4.

Considérons le problème

$$\begin{aligned} &y'(t) \in F(t, y(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0,T] = I, \\ &y(0) = r. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Théorème 6.1. *Soient E un espace de Banach séparable, réflexif, et $F : I \times E \to E$ une fonction multivoque à valeurs convexes, compactes, non vides, satisfaisant (m-t), (scs) et (I-cc). Supposons que*

(6.1.1) *il existe $\psi : [0,\infty) \to (0,\infty)$ une fonction croissante (pas nécessairement strictement) et $\alpha \in L^1(I,[0,\infty))$ telles que $\|F(t,x)\| \le \alpha(t)\psi(\|x\|)$ presque pour tout $t \in I$ et pour tout $x \in E$, et*
$$\int_0^T \alpha(t)\,dt < \int_{\|r\|}^{\infty} \frac{ds}{\psi(s)}.$$

Alors, le problème (6.1) *possède une solution sur* $[0,T]$.

La preuve utilise le lemme suivant dont on peut trouver la preuve dans [22].

Lemme 6.2. *Soient $R \ge 0$, $\psi : [0,\infty) \to (0,\infty)$ une fonction mesurable au sens de Borel et $\alpha \in L^1(I,[0,\infty))$ telles que*
$$\int_0^T \alpha(t)\,dt < \int_R^{\infty} \frac{ds}{\psi(s)}.$$
Alors, il existe $M = M(R,\psi,\alpha)$ telle que pour toute fonction $z \in W^{1,1}(I,[0,\infty))$ satisfaisant $z(0) \le R$ et $z'(t) \le \alpha(t)\psi(z(t))$ presque pour tout $t \in I$, on a $z(t) < M$ pour tout $t \in I$.

Démonstration du théorème 6.1. Considérons la famille de problèmes

$$\begin{aligned} &y'(t) \in \lambda F(t, y(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0,T] = I, \\ &y(0) = r, \end{aligned} \tag{6.2_λ}$$

pour $\lambda \in [0,1]$. Si y est solution de (6.2_λ),

$$\|y(t)\| \le \|r\| + \int_0^t \|y'(s)\|\,ds \equiv \rho(t),$$

et

$$\rho'(t) \leq \alpha(t)\psi(\|\rho(t)\|) \quad \text{p.p. } t \in I.$$

Le lemme 6.2 fournit l'existence d'une constante M telle que $\|y\|_0 < M$ pour toute solution y de (6.2_λ).

D'autre part, le lemme 3.5 implique que λF est une famille de type scs sur $\{y \in C_b(I, E) : \|y\|_0 \leq M\}$. D'après ce qui précède, la condition (4.1.2) est satisfaite. L'existence d'une solution du problème (6.1) est founie par le principe d'existence 1 (théorème 4.1). □

Il va sans dire que le résultat précédent est aussi vrai si F satisfait (m-t), (cont), ou (m-tx), (sci) au lieu de (m-t) et (scs).

Le prochain théorème donne l'existence d'une solution de (6.1) sans que l'hypothèse (I-cc) ne soit imposée.

Théorème 6.3. *Soient E un espace de Banach séparable, réflexif, et $F : I \times E \to E$ une fonction multivoque à valeurs convexes, compactes, non vides, satisfaisant (m-t), (I-bb), (l-lip) et (6.1.1). Alors, le problème* (6.1) *possède une solution sur* $[0, T]$.

Démonstration. Comme dans la preuve du théorème précédent, il existe une constante M telle que $\|y\|_0 < M$ pour toute solution y de (6.2_λ).

D'autre part, $L^{-1} \circ \mathcal{N}_\lambda = r + \lambda\mathcal{N}$ pour $\lambda \in [0, 1]$. Aussi, en vertu du lemme 2.6, pour tout $x, y \in \overline{U} = \{y \in C(I, E) : \|y\|_0 \leq M\}$ et pour tout $v \in \lambda N(x)$, il existe $w \in \lambda N(y)$ tel que

$$\|v(t) - w(t)\| \leq \int_0^t l_M(s)\|x(s) - y(s)\|\, ds. \tag{6.3}$$

Munissons $C(I, E)$ de la norme $\|y\|_\star = \sup\{e^{-\int_0^t l_M(s)\,ds}\|y(t)\| : t \in I\}$. De (6.3), il découle

$$\begin{aligned}
e^{-\int_0^t l_M(s)\,ds}\|v(t) - w(t)\| &\leq e^{-\int_0^t l_M(s)\,ds} \int_0^t l_M(s)\|x(s) - y(s)\|\, ds \\
&\leq e^{-\int_0^t l_M(s)\,ds}\|x - y\|_\star \int_0^t e^{\int_0^s l_M(r)\,dr} l_M(s)\, ds \\
&\leq \left(1 - e^{-\int_0^T l_M(s)\,ds}\right)\|x - y\|_\star.
\end{aligned}$$

En conséquence $D_*(\lambda N(x), \lambda N(y)) \leq \zeta\|x - y\|_*$, où D_* désigne la métrique de Hausdorff dans $(C(I, E), \|\cdot\|_\star)$ et $\zeta = 1 - e^{-\int_0^T l_M(s)\,ds}$. Ainsi, λF est de type L^{-1}-contractant sur $(\overline{U}, \|\cdot\|_\star)$ et donc vérifie (4.3.2). Du principe d'existence 3 (théorème 4.3) découle la conclusion. □

Remarque 6.4. Lorsque E est de dimension finie, le théorème 6.3 est un corollaire du théorème 6.1. Ce n'est cependant plus le cas en dimension infinie.

7. Inclusions différentielles avec impulsions

Dans cette section, on s'intéresse à des inclusions différentielles du second ordre avec impulsions. Les résultats présentés ici ne découleront pas des principes d'existence donnés plus haut mais du théorème de Kakutani (théorème A.2). Ils généralisent ceux obtenus par [23] pour des équations différentielles avec impulsions. Les preuves sont essentiellement les mêmes.

Considérons le problème suivant :

$$\begin{aligned} &y''(t) \in F(t, y(t), y'(t)) \quad \text{p.p. } t \in I = [0,1],\\ &y(0) = 0,\ y(1) = 0,\\ &y(t_j^+) = I_j(y(t_j^-)),\\ &y'(t_j^+) = J_j(y(t_j^-), y'(t_j^-)), \quad j = 1, \dots, k, \end{aligned} \tag{7.1}$$

où $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k+1} = 1$.

Une *solution de* (7.1) sera une fonction $y \in K_b^2(I)$ où

$$K^2(I) = \{y = (y_0, \dots, y_k) \in \prod_{j=0}^{k} W^{2,1}[t_j, t_{j+1}]\}$$

et

$$K_b^2(I) = \{y \in K^2(I) : y(0) = 0, y(1) = 0\}.$$

La plupart des résultats connus concernent les équations différentielles et reposent sur une hypothèse de monotonicité sur $F = \{f\}$ ou sur J_j, voir [12], [36], [40]. Ici, il n'y aura pas de telle condition.

Voici maintenant le théorème de base de cette section.

Théorème 7.1. *Soit $F : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction multivoque de type scs sur $C^1[t_j, t_{j+1}]$ pour $j = 0, \dots, k$, et satisfaisant (I-b). Supposons que $I_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, surjective et croissante (pas nécessairement strictement) ; et $J_j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue et bornée, pour tout $j = 1, \dots, k$. Alors le problème* (7.1) *possède une solution dans $K_b^2(I)$.*

Démonstration. Définissons un opérateur linéaire inversible :

$$\widetilde{L} : \prod_{j=0}^{k} C^1[t_j, t_{j+1}] \to \prod_{j=0}^{k} (C_0[t_j, t_{j+1}] \times \mathbb{R}^2)$$

par

$$\widetilde{L}(y) = \widetilde{L}(y_0, \dots, y_k) = (\widetilde{L}_0(y_0), \dots, \widetilde{L}_k(y_k)),$$

où $\widetilde{L}_j : C^1[t_j, t_{j+1}] \to C_0[t_j, t_{j+1}] \times \mathbb{R}^2$ sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} \widetilde{L}_0(u) &= \big(t \mapsto (u'(t) - u'(0)), u(0), u(t_1)\big),\\ \widetilde{L}_j(u) &= \big(t \mapsto (u'(t) - u'(t_j)), u'(t_j), u(t_{j+1})\big), \quad j = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

D'autre part, pour $j = 0, \dots, k$, notons $F_j : [t_j, t_{j+1}] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la restriction de F à $[t_j, t_{j+1}] \times \mathbb{R}^2$ et dénotons par $\mathcal{F}_j$ et $\mathcal{N}_j$ respectivement les opérateurs de Niemytzki et de Carathéodory associés à F_j. Définissons l'opérateur multivoque

$$\mathcal{T} : \prod_{j=0}^{k} C^1[t_j, t_{j+1}] \to \prod_{j=0}^{k} (C_0[t_j, t_{j+1}] \times \mathbb{R}^2)$$

par

$$\mathcal{T}(y) = \mathcal{T}(y_0, \dots, y_k) = (\mathcal{T}_0(y), \dots, \mathcal{T}_k(y)),$$

où

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_0(y) &= \big(\mathcal{N}_0(y_0), 0, I_1^{-1}(y_1(t_1))\big),\\
\mathcal{T}_j(y) &= \big(\mathcal{N}_j(y_j), J_j(y_{j-1}(t_j), y'_{j-1}(t_j)), I_{j+1}^{-1}(y_{j+1}(t_{j+1}))\big), \quad j = 1, \dots, k-1,\\
\mathcal{T}_k(y) &= \big(\mathcal{N}_k(y_k), J_k(y_{k-1}(t_k), y'_{k-1}(t_k)), 0\big).
\end{aligned}$$

Puisque les F_j sont de type scs sur $C^1[t_j, t_{j+1}]$ et que les I_j sont continues, croissantes et surjectives, l'opérateur $\mathcal{T}$ est bien défini, semi-continu supérieurement, complètement continu, à valeurs convexes, compactes, non vides. Il n'est cependant pas compact. Notons cependant que $\mathcal{N}_0$, $\mathcal{N}_j$ et J_j le sont pour tout $j = 1, \dots, k$.

Par ailleurs, on vérifie aisément que y est une solution de (7.1) si et seulement si $\widetilde{L}(y) = \mathcal{T}(y)$ ou encore $y = \widetilde{L}^{-1} \circ \mathcal{T}(y)$.

Soit $h \in L^1(I)$ la fonction donnée à la condition (I-b) et soient $d_j \geq 0$ des constantes telles que $|J_j(u, v)| \leq d_j$ pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et $j = 1, \dots, k$. Choisissons $m_k \geq 0$ tel que pour toute fonction $y_k \in W^{2,1}[t_k, 1]$ vérifiant $y_k(1) = 0$, $|y'_k(t_k)| \leq d_k$ et $|y''_k(t)| \leq h(t)$ presque pour tout $t \in [t_k, 1]$, satisfait $|y_k(t)| \leq m_k$ pour tout $t \in [t_k, 1]$. Fixons $n_k \geq 0$ tel que $I_k^{-1}([-m_k, m_k]) \subset [-n_k, n_k]$. Une telle constante existe car I_k est continue et surjective. Ensuite, on choisit $m_{k-1} \geq 0$ tel que toute fonction $y_{k-1} \in W^{2,1}[t_{k-1}, t_k]$ satisfaisant $|y_{k-1}(t_k)| \leq n_k$, $|y'_{k-1}(t_{k-1})| \leq d_{k-1}$ et $|y''_{k-1}(t)| \leq h(t)$ presque pour tout $t \in [t_{k-1}, t_k]$, vérifie $|y_{k-1}(t)| \leq m_{k-1}$ pour tout $t \in [t_{k-1}, t_k]$. De là, on fixe $n_{k-1} \geq 0$ tel que $I_{k-1}^{-1}([-m_{k-1}, m_{k-1}]) \subset [-n_{k-1}, n_{k-1}]$. En procédant ainsi, on choisit $m_{k-2}, \dots, m_1$.

Posons

$$A = \{y \in \prod_{j=0}^{k} C^1[t_j, t_{j+1}] : |y_j(t_j)| \leq m_j, j = 1, \dots, k-1\}.$$

Par choix des constantes m_j, l'opérateur $\widetilde{L}^{-1} \circ T$ envoie A dans lui-même et est compact. D'après ce qui précède, $\widetilde{L}^{-1} \circ T : A \to A$ est semi-continu supérieurement, compact, à valeurs convexes, compactes non vides. Le théorème de Kakutani (théorème A.2) garantit l'existence d'une solution. □

Présentons maintenant un résultat d'existence reposant sur des hypothèses moins restrictives. Plus précisément, la fonction F sera intégrablement bornée sur les bornés et on ne demandera pas que les fonctions I_j soient surjectives et que les J_j soient bornées. Pour garantir l'existence d'une solution au problème (7.1), d'autres hypothèses devront être imposées comme par exemple une d'existence de sous et sur-solutions de l'inclusion différentielle (7.1) dont voici la définition.

Définition 7.2. On dit que $\alpha \leq \beta \in K^2(I)$ sont *sous et sur-solutions* de (7.1) si elles satisfont aux conditions de la définition 5.1 et

(7.2.1) $\alpha(t_j^+) = I_j(\alpha(t_j^-))$; $\alpha'(t_j^+) \geq J_j(\alpha(t_j^-), q)$ pour tout $q \leq \alpha'(t_j^-)$;

(7.2.2) $\beta(t_j^+) = I_j(\beta(t_j^-))$; $\beta'(t_j^+) \leq J_j(\beta(t_j^-), q)$ pour tout $q \geq \beta'(t_j^-)$.

Le théorème suivant est une généralisation du théorème 5.2.

Théorème 7.3. *Soit $F : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction multivoque à valeurs convexes, compactes, non vides, satisfaisant (m-t), (scs) et (I-bb). Supposons que pour tout $j = 1, \dots, k$, $I_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, croissante, et $J_j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue. De plus, supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

(7.3.1) *il existe* $\alpha \leq \beta \in K^2(I)$ *respectivement sous et sur-solutions de* (7.1) *;*

(7.3.2) *pour* $j = 0, \ldots, k$, *il existe* $\psi_j : [0, \infty) \to (0, \infty)$ *une fonction mesurable au sens de Borel telle que* $|f(t, x, p)| \leq \psi_j(|p|)$ *presque pour tout* $t \in (t_j, t_{j+1})$, *pour* p *et* $x \in [\alpha_j(t), \beta_j(t)]$ *; et satisfaisant*

$$\int_{c_j}^{\infty} \frac{s}{\psi_j(s)}\, ds = \infty,$$

où $c_j = \max\{|\alpha_j(t_{j+1}) - \beta_j(t_j)|, |\beta_j(t_{j+1}) - \alpha_j(t_j)|\}/(t_{j+1} - t_j)$.

Alors le problème (7.1) *possède une solution* $y \in K_b^2(I)$ *telle que* $\alpha(t) \leq y(t) \leq \beta(t)$ *pour tout* $t \in I$.

Démonstration. Pour $j = 0, \ldots, k$, fixons $M_j > c_j$ tel que

$$\int_{c_j}^{M_j} \frac{s}{\psi_j(s)}\, ds > \|\beta\|_0 + \|\alpha\|_0.$$

Posons $M > \max\{M_0, \ldots, M_k, \|\alpha'\|_0, \|\beta'\|_0\}$. Considérons les fonctions

$$F_+ : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{et} \quad r : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

définies à la sous-section 5.1. Définissons pour $j = 1, \ldots, k$, les fonctions $\widetilde{I}_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\widetilde{J}_j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$\widetilde{I}_j(x) = I_j(r(t_j^-, x)) + x - r(t_j^-, x)$$

et

$$\widetilde{J}_j(x, p) = \begin{cases} J_j(r(t_j^-, x), M), & \text{si } p > M, \\ J_j(r(t_j^-, x), p), & \text{si } |p| \leq M, \\ J_j(r(t_j^-, x), -M), & \text{si } p < -M. \end{cases}$$

Considérons le problème modifié suivant :

$$\begin{aligned} & y''(t) - y(t) \in F_+(t, y(t), y'(t)) - r(t, y(t)) \quad \text{p.p. } t \in I = [0, 1], \\ & y(0) = 0, y(1) = 0, \\ & y(t_j^+) = \widetilde{I}_j(y(t_j^-)), \\ & y'(t_j^+) = \widetilde{J}_j(y(t_j^-), y'(t_j^-)), \quad j = 1, \ldots, k, \end{aligned} \tag{7.2}$$

Les lemmes 2.4, 2.7 et 5.4 impliquent que F_+ est de type scs sur $C^1[t_j, t_{j+1}]$ pour tout $j = 0, \ldots, k$. Par construction, les fonctions $\widetilde{I}_j$ sont continues, croissantes et surjectives et les $\widetilde{J}_j$ sont continues et bornées. Le théorème 7.1 garantit l'existence d'une solution y au problème (7.2). Pour compléter la démonstration, il suffit de montrer que cette solution est une solution du problème original (7.1).

Supposons qu'il existe $t \in I$ tel que $y(t) > \beta(t)$. Les conditions aux limites impliquent que $t \in (0, 1)$. Sans perte de généralité on peut supposer que $t \in (t_j, t_{j+1})$ pour un certain $j \in \{0, \ldots, k\}$. Soit $(a, b) \subset (t_j, t_{j+1})$ l'intervalle maximal contenant t sur lequel $y(s) > \beta(s)$ pour tout $s \in (a, b)$. Si $y(a^+) = \beta(a^+)$ ou $y'(a^+) \geq \beta'(a^+)$, et $y(b^-) = \beta(b^-)$ ou $y'(b^-) \leq \beta'(b^-)$. Le principe du maximum (lemme A.11) conduit à une contradiction. Si $y(b^-) > \beta(b^-)$ et $y'(b^-) > \beta'(b^-)$, alors, par choix,

$b = t_{j+1}$ et $j \leq k-1$. D'où

$$\begin{aligned} y(b^+) = y(t_{j+1}^+) &= \widetilde{I}_{j+1}(y(t_{j+1}^-)) \\ &= I_{j+1}(\beta(t_{j+1}^-)) + y(t_{j+1}^-) - \beta(t_{j+1}^-) \\ &= \beta(t_{j+1}^+) + y(t_{j+1}^-) - \beta(t_{j+1}^-) \\ &> \beta(t_{j+1}^+) = \beta(b^+), \end{aligned} \tag{7.3}$$

et

$$\begin{aligned} y'(b^+) = y'(t_{j+1}^+) &= \widetilde{N}_{j+1}(y(t_{j+1}^-), y'(t_{j+1}^-)) \\ &= N_{j+1}(\beta(t_{j+1}^-), q) \geq \beta'(t_{j+1}^+) = \beta'(b^+), \end{aligned} \tag{7.4}$$

pour un certain $q \geq \beta'(t_{j+1}^-)$. Vu (7.3), il existe un $\hat{t} \in (t_{j+1}^+, t_{j+2}^-)$ tel que $y(\hat{t}) > \beta(\hat{t})$. On considère alors, comme précédemment, un intervalle maximal $(\hat{a}, \hat{b})$ où $\hat{a} = t_{j+1} = b$. D'après (7.4), $y'(\hat{a}^+) \geq \beta'(\hat{a}^+)$. En continuant ce processus et par ce qui précède, on aboutit à une contradiction.

D'autre part, si $y(a^+) > \beta(a^+)$ et $y'(a^+) < \beta'(a^+)$, alors $a = t_j$ et $j \geq 1$. En outre, $y(t_j^-) > \beta(t_j^-)$. En effet, si $y(t_j^-) \leq \beta(t_j^-)$, du fait que I_j soit croissante, il découle que

$$y(a^+) = y(t_j^+) = \widetilde{I}_j(y(t_j^-)) \leq I_j(y(t_j^-)) \leq I_j(\beta(t_j^-)) = \beta(t_j^+) = \beta(a^+).$$

Aussi, le même argument qu'en (7.4) implique que $y'(t_j^-) \leq \beta'(t_j^-)$. On peut alors considérer un intervalle $(\hat{a}, \hat{b})$ où $\hat{b} = t_j = a$. De nouveau, en continuant ce processus, on aboutit à une contradiction. Similairement, on montre que $y(t) \geq \alpha(t)$ pour tout $t \in [0,1]$. Pour montrer que $\|y'\|_0 \leq M$, on procède comme dans la preuve du théorème 5.2 en travaillant d'abord sur $[0, t_1]$ puis sur $[t_1, t_2]$ et ainsi de suite. □

ANNEXE A

Voici les principaux théorèmes qui sont utilisés dans ce texte. On commence par le théorème de Schauder et sa version multivoque, soit le théorème de Kakutani. Ensuite, viennent les théories de la transversalité topologique pour des applications univoques et multivoques compactes ; pour plus de details, voir [11].

Soient C un sous-ensemble convexe d'un espace de Banach E, U un sous-ensemble ouvert de C et $\overline{U}$ et ∂U, respectivement sa fermeture et sa frontière dans C.

Théorème A.1 (Théorème de Schauder). *Si $T : C \to C$ est une fonction (univoque) continue et compacte, alors T a un point fixe ; c'est-à-dire qu'il existe $x \in C$ tel que $x = Tx$.*

Théorème A.2 (Théorème de Kakutani). *Si $T : C \to C$ est une fonction multivoque semi-continue supérieurement, compacte et à valeurs convexes, compactes, non vides, alors T a un point fixe ; c'est-à-dire qu'il existe $x \in C$ tel que $x \in Tx$.*

Désignons par $\mathcal{K}_{\partial U}(\overline{U}, C)$ l'ensemble des fonctions univoques, continues et compactes $T : \overline{U} \to C$ (resp. désignons par le même symbole l'ensemble des fonctions multivoques semi-continues supérieurement, compactes et à valeurs convexes, compactes, non vides) sans point fixe sur ∂U. On dit que $T \in \mathcal{K}_{\partial U}(\overline{U}, C)$ est *essentielle* si pour toute fonction $R \in \mathcal{K}_{\partial U}(\overline{U}, C)$ telle que $T|_{\partial U} = R|_{\partial U}$, R a un point fixe. Soient T et $R \in \mathcal{K}_{\partial U}(\overline{U}, C)$, on dit que T est *homotope* à R ($T \approx R$) s'il existe $H : \overline{U} \times [0,1] \to C$ une fonction continue et compacte (resp. fonction multivoque semi-continue supérieurement, compacte et à valeurs convexes, compactes, non vides) telle que $H(\cdot\,,\lambda) \in \mathcal{K}_{\partial U}(\overline{U}, C)$ pour tout $\lambda \in [0,1]$, $H(\cdot\,,1) = T$ et $H(\cdot\,,0) = R$.

Théorème A.3 (Transversalité topologique pour les opérateurs compacts univoques)). *Soient T et R deux fonctions univoques, continues, compactes et homotopes dans $\mathcal{K}_{\partial U}(\overline{U}, C)$, alors T est essentielle si et seulement si R l'est aussi.*

Théorème A.4 (Transversalité topologique pour les opérateurs compacts multivoques). *Soient T et R deux fonctions multivoques semi-continues supérieurement, compactes et à valeurs convexes, compactes, non vides, homotopes dans $\mathcal{K}_{\partial U}(\overline{U}, C)$, alors T est essentielle si et seulement si R l'est aussi.*

Théorème A.5. *Si $r \in U$, alors la fonction constante $T \equiv r$ (resp. $T \equiv \{r\}$) est essentielle dans $\mathcal{K}_{\partial U}(\overline{U}, C)$.*

Voici maintenant le théorème de point fixe de Nadler [41] et quelques notions et résultats de la théorie de la transversalité topologique pour les applications contractantes ; pour plus de détails et de généralité, voir [17], [21], [25].

Théorème A.6 (Théorème de Nadler). *Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $T : X \to X$ une contraction multivoque à valeurs fermées, bornées, non vides. Alors T a un point fixe.*

Soit U un domaine (ouvert, connexe) de E. On désigne par $\mathcal{C}_{\partial U}(\overline{U}, E)$ l'ensemble de toutes les contractions $T : \overline{U} \to E$ à valeurs fermées, bornées, non vides et sans point fixe sur ∂U. Rappelons que T est une *contraction* s'il existe une constante $\zeta < 1$ telle que $D(Tx, Ty) \leq \zeta\|x - y\|$ pour x, $y \in \overline{U}$. Soient T et R deux contractions de $\overline{U}$ dans E, on dit qu'elles sont *homotopes* dans $\mathcal{C}_{\partial U}(\overline{U}, E)$ s'il existe $H : \overline{U} \times [0,1] \to E$, $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante, et une constante $\zeta < 1$ telles que

$$
\begin{aligned}
&H(\cdot\,,1) = T; \quad H(\cdot\,,0) = R;\\
&H(\cdot\,,\lambda) \in \mathcal{C}_{\partial U}(\overline{U}, E);\\
&D(H(x,\lambda), H(y,\lambda)) \leq \zeta\|x - y\|;\\
&D(H(x,\lambda), H(x,\theta)) \leq |\phi(\lambda) - \phi(\theta)| \text{ pour } \lambda,\ \theta \in [0,1] \text{ et } x,\ y \in \overline{U}.
\end{aligned}
$$

Théorème A.7 (Transversalité topologique pour les contractions multivoques). *Soient T et R deux fonctions homotopes dans $\mathcal{C}_{\partial U}(\overline{U}, E)$, alors T a un point fixe si et seulement si R en a un aussi.*

On énonce maintenant un théorème de sélection dû à Bressan et Colombo [6] et cruciale dans la démonstration du principe d'existence pour les fonctions de type sci. Il a d'abord été établi par Fryskowski dans une version moins générale que celle-ci.

Théorème A.8 (Théorème de sélection de Bressan-Colombo). *Soient I un intervalle compact, X un espace métrique séparable, E un espace de Banach et $\mathcal{G} : X \to L^1(I, E)$ une fonction multivoque, semi-continue inférieurement, à valeurs non vides, fermées, décomposables. Alors $\mathcal{G}$ possède une sélection continue, c'est-à-dire qu'il existe une fonction continue $g : X \to L^1(I, E)$ telle que $g(x) \in \mathcal{G}(x)$ pour tout $x \in X$.*

Le prochain lemme est utilisé dans le texte pour obtenir des résultats de semicontinuité, voir [42] pour une démonstration.

Lemme A.9 (Lemme de Banach). *Soient E un espace de Banach et $u : I \to E$ une fonction absolument continue. Alors, mes$\{t \in I : u(t) = 0$ et $u'(t) \neq 0\} = 0$.*

Les deux prochains lemmes interviennent dans la majoration a prioiri des solutions. Le premier est une règle de changement de variables dans une intégrale [20] et l'autre, un principe du maximum.

Lemme A.10 (Règle de changement de variables dans une intégrale). *Soient deux fonctions $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to [c,d]$ telles que f est absolument continue, $g \in L^1[c,d]$ et $g(f)f' \in L^1[a,b]$. Alors*

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\,dx = \int_a^b g(f(t))f'(t)\,dt.$$

Lemme A.11 (Principe du maximum). *Soient $u \in W^{2,1}([a,b];\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Supposons qu'une des conditions suivantes est satisfaite :*

(A.11.1) *$u''(t) \geq 0$ presque pour tout $t \in [a,b]$, $\alpha_0 u(a) - \beta_0 u'(a) \leq 0$, $\alpha_1 u(b) + \beta_1 u'(b) \leq 0$; où $\max\{\alpha_0, \alpha_1\} > 0$, α_i, $\beta_i \geq 0$, et $\alpha_i + \beta_i > 0$, $i = 0,1$;*

(A.11.2) *$u''(t) - \varepsilon u(t) \geq 0$ presque pour tout $t \in [a,b]$, $\alpha_0 u(a) - \beta_0 u'(a) \leq 0$, $\alpha_1 u(b) + \beta_1 u'(b) \leq 0$; où α_i, $\beta_i \geq 0$, et $\alpha_i + \beta_i > 0$, $i = 0,1$;*

(A.11.3) *$u''(t) - \varepsilon u(t) \geq 0$ presque pour tout $t \in [a,b]$, $u(a) = u(b)$; $u(a) \leq 0$ ou $u'(b) - u'(a) \leq 0$.*

Alors $u(t) \leq 0$ pour tout $t \in [a,b]$.

Références

[1] Aubin, J.-P. et Cellina, A., *Differential Inclusions*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[2] Aubin, J.-P. et Frankowska, H., *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser, Boston, 1990.

[3] Benedetto, J. J., *Real Variable and Integration*, Stuttgart, Teubner, 1976.

[4] Blagodat·skikh, V. I. et Filippov, A. F., Differential inclusions and optimal control, *Proc. Steklov Inst. Math.* **4** (1986), 199–259.

[5] Borisovich, Y. G., Gel'man, B. D., Myshkis, A. D. et Obukhovskii, V. V., Multivalued mappings, *Itogi Nauki i Tekhniki, Ser. Mat. Anal.* **19** (1982), 127–230 (Russian) ; translation : *J. Soviet Math.* **24** (1982), 719–791.

[6] Bressan, A. et Colombo, G., Extensions and selections of maps with decomposable values, *Studia Math.* **90** (1988), 70–85.

[7] Castaing, C., Sur les équations différentielles multivoques, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **263** (1966), 63–66.

[8] Castaing, C. et Valadier, M., *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Lecture Notes in Math. **580**, Springer-Verlag, New York, 1977.

[9] Datko, R., On the integration of set-valued mappings in a Banach space, *Fund. Math.* **78** (1973), 205–208.

[10] Deimling, K., *Multivalued Differential Equations*, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.

[11] Dugundji, J. et Granas, A., *Fixed Point Theory*, vol. 1, PWN, Warszawa, 1982.

[12] Erbe, L. H. et Krawcewicz, W., Existence of solutions to boundary value problems for impulsive second order differential inclusions, *Rocky Mountain J. Math.* **22** (1992), 1–20.

[13] Erbe, L. H. et Krawcewicz, W., Nonlinear boundary value problems for differential inclusions $y'' \in F(t,y,y')$, *Ann. Polon. Math.* **54** (1991), 195–226.

[14] Erbe, L. H. et Palamides, P. K., Boundary value problems for second order differential systems, *J. Math. Anal. Appl.* **127** (1987), 80–92.

[15] Frigon, M., Boundary et periodic value problems for systems of nonlinear second order differential equations, *Topol. Methods Nonlinear Anal.* **1** (1993), 259–274.

[16] Frigon, M., Boundary et periodic value problems for systems of differential equations under Bernstein-Nagumo growth condition, *Differential Integral Equations* (à paraître).

[17] Frigon, M., et Granas, A., Résultats du type de Leray-Schauder pour des contractions multivoques, *Topol. Methods Nonlinear Anal.* **4** (1994), 197–208.

[18] Frigon, M., et Granas, A., Problèmes aux limites pour des inclusions différentielles semi-continues inférieurement, *Riv. Mat. Univ. Parma* **17** (1991), 87–97.

[19] Frigon, M., et Granas, A., Théorèmes d'existence pour des inclusions différentielles sans convexité, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. 1 Math.* **306** (1988), 747–750.

[20] Frigon, M., Granas, A., et Guennoun, Z., Sur l'intervalle maximal d'existence de solutions pour des inclusions différentielles, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. 1 Math.* **310** (1990), 819–822.

[21] Frigon, M., Granas, A., et Guennoun, Z., Alternative non-linéaire pour les applications contractantes, *Ann. Sci. Math. Québec* (à paraître).

[22] Frigon, M. et Lee, J. W., Existence principles for Carathéodory differential equations in Banach spaces, *Topol. Methods Nonlinear Anal.* **1** (1993), 95–111.

[23] Frigon, M. et O'Regan, D., Boundary value problems for second order impulsive differential equations using set-valued maps (soumis).

[24] Gaprindashvili, G. D., Solvability of a Dirichlet boundary-value problem for systems of nonlinear ordinary differential equations with singularities, *Differentsial'nye Uravneniya* **27** (1991), 1521–1525 (Russian) ; translation : *Differential Equations* **27** (1991), 1074–1077.

[25] Granas, A., Continuation method for contractive maps, *Topol. Methods Nonlinear Anal.* **3** (1994), 375–379.

[26] Granas, A., On the Leray-Schauder alternative, *Topol. Methods Nonlinear Anal.* **2** (1993), 225–231.

[27] Granas, A., Guenther, R. B. et Lee, J. W., Some general existence principles in the Carathéodory theory of nonlinear differential systems, *J. Math. Pures Appl.* **70** (1991), 153–196.

[28] Granas, A., Guenther, R. B. et Lee, J. W., Nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations, *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)* **244** (1985).

[29] Granas, A., Guenther, R. B. et Lee, J. W., Some existence results for the differential inclusions $y^{(k)} \in F(x, y, \ldots, y^{(k-1)})$, $y \in \mathcal{B}$, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. 1 Math.* **307** (1988), 391–396.

[30] Habets, P. et Schmitt, K., Nonlinear boundary value problems for systems of differential equations, *Arch. Math. (Basel)* **40** (1983), 441–446.

[31] Hartman, P., On boundary value problems for systems of ordinary, nonlinear, second order differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **96** (1960), 493–509.

[32] Hartman, P., *Ordinary Differential Equations*, Wiley, New York, 1964.

[33] Hiai, F. et Umegaki, H., Integrals, conditional expectations, and martingales of multivalued functions, *J. Multivariate Anal.* **7** (1977), 149–182.

[34] Himmelberg, C. J., Measurable relations, *Fund. Math.* **87** (1975), 53–72.

[35] Kuratowski, K. et Ryll-Nardzewski, C., A general theorem on selectors, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys.* **13** (1965), 397–403.

[36] Lakshmikantham, V., Bainov, D. D. et Simeonov, P. S., *Theory of Impulsive Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1989.

[37] Lasota, A. et Yorke, J. A., Existence of solutions of two-point boundary value problems for nonlinear systems, *J. Differential Equations* **11** (1972), 509–518.

[38] Lee, J. W. et O'Regan, D., Existence results for differential equations in Banach spaces, *Comment. Math. Univ. Carolin.* **34** (1993), 239–251.

[39] Lee, J. W. et O'Regan, D., Topological transversality : Applications to initial value problems, *Ann. Polon. Math.* **48** (1988), 31–36.

[40] Liz, E. et Nieto, J. J., Periodic boundary value problems for second order impulsive integro-differential equations of Volterra and Fredholm type, pré-publication.

[41] Nadler, S. B., Jr., Multi-valued contraction mappings, *Pacific J. Math.* **30** (1969), 415–487.

[42] Natanson, I. P., *The Theory of Functions of Real Variable*, Ungar, New York, 1955.

[43] Ornelas, A., Approximation of relaxed solutions for lower semi-continuous differential inclusions, *Ann. Polon. Math.* **56** (1991), 1–10.

[44] Pruszko, T., Some applications of the topological degree theory to the multivalued boundary value problem, *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)* **229** (1984).

[45] Schmitt, K. et Thompson, R., Boundary value problems for infinite systems of second-order differential equations, *J. Differential Equations* **18** (1975), 277–295.

[46] Wintner, A., The nonlocal existence problem for ordinary differential equations, *Amer. J. Math.* **67** (1945), 277–284.

[47] Yoshida, K., *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

M. Frigon
Département de mathématiques et de statistique,
Université de Montréal,
C.P. 6128, succ. Centre-Ville,
Montréal, (Québec),
H3C 3J7, CANADA.
E-mail address: `frigon@dms.umontreal.ca`