

MESURE ET INTÉGRATION

Solutions des exercices

André Giroux
Département de Mathématiques et Statistique
Université de Montréal
Décembre 2009

1 Introduction

1. Vérifier que la fonction

$$x \mapsto \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x)$$

est partout discontinue.

Solution. Quel que soit x_0 , on a

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x) = 0, \quad \limsup_{x \rightarrow x_0} \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x) = 1$$

en s'approchant de x_0 suivant des points irrationnels ou des points rationnels respectivement.

2. Déterminer l'ensemble des points de continuité de la fonction

$$x \mapsto x \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x).$$

Solution. La fonction $x \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x)$ est continue en x_0 si et seulement si $x_0 = 0$. En effet, la continuité en $x_0 = 0$ découle de l'inégalité

$$|x \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x)| \leq |x|.$$

D'autre part, si $x_0 > 0$, on a

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} x \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x) = 0, \quad \limsup_{x \rightarrow x_0} x \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x) = x_0$$

alors que, si $x_0 < 0$, on a

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} x \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x) = x_0, \quad \limsup_{x \rightarrow x_0} x \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x) = 0.$$

3. Déterminer les ensembles E_k associés à la fonction $\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$.

Solution. Pour chaque $m \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, on a

$$E_0 = \mathbb{Q}^c, \quad E_m = \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad E_k = \emptyset \quad \text{si} \quad 0 < k < m.$$

4. Montrer que

$$\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos m! \pi x)^n \right).$$

Solution.

Si $x \notin \mathbb{Q}$, pour tout m , quel que soit $k \in \mathbb{Z}$,

$$m!\pi x \neq k\pi$$

et $|\cos m!\pi x| < 1$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos m!\pi x)^n = 0.$$

Si $x \in \mathbb{Q}$, pour tout $m \geq m_x$, il existe k_m tel que

$$m!\pi x = 2k_m\pi$$

et $\cos m!\pi x = 1$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos m!\pi x)^n = 1.$$

5. Calculer

$$\int_0^1 (\cos m!\pi x)^n dx$$

puis

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (\cos m!\pi x)^n dx \right).$$

Solution.

Si n est pair, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\cos m!\pi x)^n dx &= \int_0^{m!\pi} (\cos y)^n \frac{dy}{m!\pi} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos y)^n dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(n-2k)y dy = \frac{1}{2^n} \binom{n}{n/2} \end{aligned}$$

et, si n est impair,

$$\int_0^1 (\cos m!\pi x)^n dx = 0.$$

En utilisant la formule de Stirling $N! \sim \sqrt{2\pi N}(N/e)^N$, on trouve

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (\cos m!\pi x)^n dx \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi n}} = 0.$$

2 Parties mesurables de $\mathbb{R}$

1. Montrer que tout recouvrement d'un ensemble $K \subseteq \mathbb{R}$ compact (fermé et borné) par des ensembles ouverts contient un sous-recouvrement fini.

Solution. Soit $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert de K . Si $K \subseteq [a, b]$, les intervalles ouverts dont se composent les ensembles ouverts K^c et O_α forment un recouvrement de $[a, b]$. Si $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ constitue un recouvrement fini de $[a, b]$ par certains de ces intervalles, au plus n des ensembles O_α pourront être choisis de façon à recouvrir K .

2. Si $E \subseteq \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$,

$$kE = \{y \mid y = kx, x \in E\}.$$

Montrer que $\lambda^*(kE) = |k| \lambda^*(E)$.

Solution. Si $k = 0$, on a bien, avec la convention faite, que

$$\lambda^*(\{0\}) = 0 \lambda^*(E).$$

Si $k > 0$,

$$\begin{aligned} \lambda^*(kE) &= \inf \left\{ \sum_n (b_n - a_n) \mid kE \subseteq \bigcup_n]a_n, b_n[\right\} \\ &= k \inf \left\{ \sum_n \left(\frac{1}{k} b_n - \frac{1}{k} a_n \right) \mid E \subseteq \bigcup_n]\frac{1}{k} a_n, \frac{1}{k} b_n[\right\} = k \lambda^*(E). \end{aligned}$$

Si enfin $k < 0$,

$$\begin{aligned} \lambda^*(kE) &= \inf \left\{ \sum_n (b_n - a_n) \mid kE \subseteq \bigcup_n]a_n, b_n[\right\} \\ &= -k \inf \left\{ \sum_n \left(\frac{1}{k} a_n - \frac{1}{k} b_n \right) \mid E \subseteq \bigcup_n]\frac{1}{k} b_n, \frac{1}{k} a_n[\right\} = |k| \lambda^*(E). \end{aligned}$$

3. Soit $\mu^* : \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$ la fonction définie par

$$\mu^*(E) = \sup \{ (b - a) \mid]a, b[\subseteq E \}.$$

Cette fonction est-elle monotone ? invariante sous translation ? Préserve-t-elle la longueur des intervalles ? Est-elle sous-additive ?

Solution. Il est évident que la fonction μ^* est monotone, invariante sous translation et qu'elle préserve la longueur des intervalles. Elle n'est cependant pas sous-additive comme le montrent les relations

$$[0, 1] = ([0, 1/4] + [3/4, 1]) + [1/4, 3/4]$$

et

$$\mu^*([0, 1]) = 1 > 1/4 + 1/2 = \mu^*([0, 1/4] + [3/4, 1]) + \mu^*([1/4, 3/4]).$$

4. Répondre aux mêmes questions si la fonction μ^* est définie par

$$\mu^*(E) = \text{card}(E\mathbb{Z}).$$

Solution. Les propriétés de la fonction $A \mapsto \text{card}(A)$ montrent que μ^* est monotone et sous-additive mais elle n'est évidemment pas invariante sous translation et elle ne préserve pas la longueur des intervalles.

5. Montrer que, si $E \subseteq \mathbb{R}$ est mesurable et $k \in \mathbb{R}$, l'ensemble kE est mesurable.

Solution. Si $k = 0$, $kE = \{0\}$ est mesurable. Si $k \neq 0$,

$$\begin{aligned} \lambda^*(A \setminus kE) + \lambda^*(A \cap (kE)^c) &= \lambda^*(A \setminus kE) + \lambda^*(A \cap kE^c) \\ &= \lambda^*\left(k \frac{1}{k} A \setminus E\right) + \lambda^*\left(k \frac{1}{k} A \cap E^c\right) \\ &= |k| \left(\lambda^*\left(\frac{1}{k} A \setminus E\right) + \lambda^*\left(\frac{1}{k} A \cap E^c\right) \right) \\ &= |k| \lambda^*\left(\frac{1}{k} A\right) = \lambda^*(A). \end{aligned}$$

6. Montrer que tout ensemble mesurable borné est de mesure finie. La réciproque est-elle vraie ?

Solution. Si $E \subseteq [-K, +K]$, alors $\lambda(E) \leq 2K$. La réciproque est fausse, comme le montre l'exemple de l'ensemble non borné

$$E = \sum_{k=1}^{+\infty}]k, k + \frac{1}{2^k}[$$

de mesure finie

$$\lambda(E) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

7. Un ensemble de mesure nulle peut-il être ouvert ? Doit-il être fermé ?

Solution. Puisque

$$\lambda \left(\sum_k]a_k, b_k[\right) = \sum_k (b_k - a_k),$$

le seul ensemble ouvert de mesure nulle est l'ensemble vide. Un ensemble de mesure nulle n'est d'autre part pas nécessairement fermé, comme le montre l'exemple de l'ensemble $\mathbb{Q}$.

8. Soit $\epsilon > 0$ donné. Construire un ensemble ouvert E de mesure $\lambda(E) < \epsilon$ qui soit dense dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire tel que tout nombre réel puisse s'écrire comme la limite d'une suite de nombres appartenant à E).

Solution. Soit $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, r_3, \dots\}$ une énumération des nombres rationnels (par exemple, $\{0, 1, -1, 1/2, -1/2, 1/3, -1/3, 2/3, \dots\}$). L'ensemble

$$E = \bigcup_{k \geq 1}]r_k - \frac{\epsilon}{2^{k+2}}, r_k + \frac{\epsilon}{2^{k+2}}[$$

possède les propriétés requises puisque qu'il contient $\mathbb{Q}$ et que

$$\lambda(E) < \epsilon.$$

9. Montrer qu'un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si à chaque $\epsilon > 0$ correspond un ensemble ouvert $O_\epsilon \subseteq \mathbb{R}$ tel que $E \subseteq O_\epsilon$ et que $\lambda^*(O_\epsilon E^c) < \epsilon$.

Solution.

Cas où $\lambda^*(E) < +\infty$.

Soit O_ϵ un ensemble ouvert tel que $E \subseteq O_\epsilon$ et que

$$\lambda(O_\epsilon) < \lambda^*(E) + \epsilon.$$

Si E est mesurable, on a

$$\lambda(O_\epsilon) = \lambda^*(E) + \lambda^*(O_\epsilon E^c) > \lambda(O_\epsilon) - \epsilon + \lambda^*(O_\epsilon E^c)$$

et donc

$$\lambda^*(O_\epsilon E^c) < \epsilon.$$

Réciproquement, considérons l'ensemble mesurable

$$G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_{1/n}.$$

Alors $G = E + N$ où $\lambda^*(N) = \lambda^*(GE^c) = 0$. Donc $E = GN^c$ est mesurable.

Cas où $\lambda^*(E) = +\infty$.

Posons $I_n =]-n, n[$, $E_n = EI_n$. Alors $\lambda^*(E_n) < +\infty$. Si O est un ensemble ouvert tel que $E \subseteq O$ et $\lambda^*(OE^c) < \epsilon$, on a

$$\lambda^*(OI_nE_n^c) = \lambda^*(OI_nE^c) < \epsilon$$

et E_n est mesurable, donc

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$$

l'est aussi. Réciproquement, si E est mesurable, chaque ensemble E_n l'est. Si donc O_m est un ouvert tel que

$$\lambda^*(O_mE_m^c) < \frac{\epsilon}{2^{m+1}},$$

on aura, en posant

$$O = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} O_m,$$

que

$$\lambda^*(OE^c) = \lambda^*\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_mE_n^c\right) \leq \sum_{m \in \mathbb{N}} \lambda^*(O_mE_m^c) < \epsilon.$$

10. Montrer qu'un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si on peut l'écrire comme la réunion disjointe d'un ensemble de mesure nulle N et d'un ensemble qui est une réunion au plus dénombrable d'ensembles fermés F_k :

$$E = N + \bigcup_k F_k.$$

Solution. La condition est évidemment suffisante. Elle est aussi nécessaire car si O_n est un ouvert tel que $E^c \subseteq O_n$ et

$$\lambda(O_nE) < \frac{1}{n},$$

en considérant l'ensemble fermé $F_n = O_n^c$, on aura $F_n \subseteq E$ et

$$\lambda(F_n^cE) < \frac{1}{n}.$$

On aura donc

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n + N$$

où

$$\lambda(N) = \lambda \left(E \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \right)^c \right) = \lambda \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n^c E \right) = 0.$$

11. Soit $\mu : \mathfrak{L}_{\mathbb{R}} \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction additive. Montrer qu'elle est nécessairement croissante et sous-additive.

Solution. Si $E \subseteq F$, on a $F = E + FE^c$ et donc, par additivité,

$$\mu(F) = \mu(E) + \mu(FE^c) \geq \mu(E).$$

(Si $\mu(\emptyset) \neq 0$, $\mu \equiv +\infty$ et l'énoncé est trivial). Donnée une suite quelconque d'ensembles mesurables $E_1, E_2, E_3, \dots$, considérons les ensembles $F_1 = E_1, F_2 = E_2 E_1^c, F_3 = E_3 E_2^c E_1^c, \dots$. Ils sont mesurables et disjoints donc, par additivité,

$$\mu \left(\bigcup_n E_n \right) = \mu \left(\sum_n F_n \right) = \sum_n \mu(F_n) \leq \sum_n \mu(E_n).$$

12. Soit $\mu : \mathfrak{L}_{\mathbb{R}} \rightarrow [0, +\infty]$ la fonction définie par

$$\mu(E) = \begin{cases} +\infty & \text{si } E \text{ est infini} \\ \text{card}(E) & \text{si } E \text{ est fini.} \end{cases}$$

Montrer que μ est additive et invariante sous translation.

Solution. Que la fonction μ soit invariante sous translation est clair. Soient $E_1, E_2, E_3, \dots$ des ensembles mesurables non vides deux à deux disjoints. Si l'un d'eux est infini, ainsi en est-il de leur réunion et donc on a bien

$$\mu \left(\sum_n E_n \right) = \sum_n \mu(E_n) = +\infty$$

dans ce cas. Si tous les ensembles E_n sont finis, leur réunion est finie s'ils sont en nombre fini et elle est infinie sinon. Dans le premier cas,

$$\mu \left(\sum_n E_n \right) = \sum_n \mu(E_n) < +\infty$$

et dans le deuxième

$$\mu \left(\sum_n E_n \right) = \sum_n \mu(E_n) = +\infty.$$

13. Soit $\{E_k\}_k$ une suite décroissante,

$$E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \dots,$$

d'ensembles de mesure finie. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda(E_n) = \lambda \left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k \right).$$

L'hypothèse « de mesure finie » est-elle essentielle ?

Solution. Si $n \geq 2$, considérons les ensembles croissants $F_n = E_1 E_n^c$.
Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda(F_n) = \lambda \left(\bigcup_n F_n \right) = \lambda \left(E_1 \left(\bigcap_{n \geq 2} E_n \right)^c \right).$$

Toutes les quantités impliquées étant finies,

$$\lambda(E_1) = \lambda(E_n) + \lambda(F_n)$$

entraîne

$$\lambda(F_n) = \lambda(E_1) - \lambda(E_n)$$

et

$$\lambda(E_1) = \lambda \left(\bigcap_{n \geq 2} E_n \right) + \lambda \left(E_1 \left(\bigcap_{n \geq 2} E_n \right)^c \right)$$

entraîne

$$\lambda \left(E_1 \left(\bigcap_{n \geq 2} E_n \right)^c \right) = \lambda(E_1) - \lambda \left(\bigcap_{n \geq 2} E_n \right).$$

Par suite,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda(E_n) = \lambda \left(\bigcap_{n \geq 1} E_n \right).$$

L'hypothèse $\lambda(E_1) < +\infty$ est essentielle comme le montre l'exemple des ensembles $E_n = [n, +\infty[$ de mesure infinie et d'intersection totale vide.

14. Une fonction $\mu : \mathfrak{L}_{\mathbb{R}} \rightarrow [0, +\infty]$ possède la propriété d'additivité finie si, pour toute suite disjointe finie $\{E_k\}_{1 \leq k \leq N}$,

$$\mu \left(\sum_{k=1}^N E_k \right) = \sum_{k=1}^N \mu(E_k).$$

Montrer qu'une fonction

$$\mu : \mathfrak{L}_{\mathbb{R}} \rightarrow [0, +\infty]$$

est additive si et seulement si elle continue et possède la propriété d'additivité finie.

Solution. Il suffit de voir que les propriétés d'additivité finie et de continuité conjuguées impliquent la propriété d'additivité. Cela suit des égalités suivantes, la première découlant de la continuité et la deuxième de l'additivité finie :

$$\mu \left(\sum_{k=1}^{+\infty} E_k \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu \left(\sum_{k=1}^n E_k \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \mu(E_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(E_k).$$

3 Fonctions mesurables de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

1. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Montrer qu'elle est mesurable si et seulement si les ensembles

$$\{x \mid f(x) > r\}$$

le sont pour tout $r \in \mathbb{Q}$.

Solution. Cette condition est évidemment nécessaire et elle est aussi suffisante parce que tout nombre réel α peut s'écrire comme la limite d'une suite décroissante de nombres rationnels r_n . On a

$$\{x \mid f(x) > \alpha\} = \bigcup_n \{x \mid f(x) > r_n\}.$$

2. Vérifier les relations suivantes :

$$\mathbb{I}_{EF} = \mathbb{I}_E \mathbb{I}_F, \mathbb{I}_{E+F} = \mathbb{I}_E + \mathbb{I}_F, \mathbb{I}_{E \cup F} = \mathbb{I}_E + \mathbb{I}_F - \mathbb{I}_{EF}, \mathbb{I}_{\bigcup_n E_n} = \sup \mathbb{I}_{E_n}.$$

Solution. On a par exemple que $\mathbb{I}_{\bigcup_n E_n}(x) = 1$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in E_n$ ce qui est vrai si et seulement si $\sup \mathbb{I}_{E_n}(x) = 1$.

3. Soit $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone. Montrer qu'elle est mesurable.

Solution. L'ensemble $\{x \mid f(x) > \alpha\}$ est un intervalle.

4. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable et $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $x \mapsto f(x + x_0)$ est mesurable.

Solution. On a

$$\{x \mid f(x + x_0) > \alpha\} = \{y \mid f(y) > \alpha\} - x_0.$$

5. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable et $k \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $x \mapsto f(kx)$ est mesurable.

Solution. Si $k = 0$, la fonction résultante est constante donc mesurable. Sinon,

$$\{x \mid f(kx) > \alpha\} = \frac{1}{k} \{y \mid f(y) > \alpha\}.$$

6. Soit $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant une primitive (c'est-à-dire telle qu'il existe une fonction $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dont elle est la dérivée : $f = F'$). Montrer qu'elle est mesurable.

Solution. Soit $f(x) = F'(x)$. La fonction dérivable F est mesurable et

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(F \left(x + \frac{1}{n} \right) - F(x) \right)$$

est mesurable comme limite de fonctions mesurables.

7. Soient $E \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble de mesure finie et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer qu'à chaque $\epsilon > 0$ correspond $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\lambda\{x \mid |f(x)| > N\} < \epsilon.$$

Solution. On peut écrire que

$$E = \sum_{k=1}^{+\infty} \{x \mid (k-1) \leq |f(x)| < k\}.$$

La série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda(\{x \mid (k-1) \leq |f(x)| < k\})$$

étant convergente, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{k \geq N} \lambda(\{x \mid (k-1) \leq |f(x)| < k\}) < \epsilon$$

c'est-à-dire tel que

$$\lambda(\{x \mid N-1 \leq |f(x)|\}) < \epsilon.$$

8. Montrer que toute fonction mesurable est limite simple d'une suite de fonctions mesurables étagées.

Solution. Décomposons la fonction suivant ses parties positives et négatives :

$$f = f^+ - f^-.$$

Si les fonctions mesurables positives étagées φ_n croissent vers f^+ et les fonctions mesurables positives étagées ψ_n croissent vers f^- , la fonction mesurable étagée $\varphi_n - \psi_n$ converge simplement vers f .

9. Montrer que toute fonction mesurable bornée est limite uniforme d'une suite de fonctions mesurables étagées.

Solution. On a

$$f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n$$

où

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{I}_{E_{n,k}} - c \mathbb{I}_E$$

avec

$$c = -\inf\{f(x) \mid x \in E\}$$

et

$$E_{n,k} = \{x \in E \mid \frac{k-1}{2^n} - c \leq f(x) < \frac{k}{2^n} - c\}.$$

La convergence est uniforme en vertu des inégalités :

$$0 \leq f - \varphi_n \leq \frac{1}{2^n}.$$

4 Intégration sur $\mathbb{R}$

1. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x + x_0)$ est intégrable et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x + x_0) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

Solution. La mesure étant invariante sous translation, la relation

$$\mathbb{I}_E(x + x_0) = \mathbb{I}_{E-x_0}(x)$$

montre que l'énoncé est vrai si $f = \mathbb{I}_E$ est la fonction indicatrice d'un ensemble mesurable, donc, par linéarité, si $f = \varphi$ est une fonction mesurable positive étagée, donc, par convergence monotone, si f est positive, donc enfin, encore par linéarité, si f est une fonction intégrable quelconque.

2. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, la fonction $x \mapsto f(kx)$ est intégrable et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(kx) dx = \frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

Solution. Les relations

$$\mathbb{I}_E(kx) = \mathbb{I}_{1/k E}(x) \quad \text{et} \quad \lambda\left(\frac{1}{k}E\right) = \frac{1}{|k|}\lambda(E)$$

montrent que la relation est vraie successivement pour une fonction indicatrice, pour une fonction positive étagée, pour une fonction positive et pour une fonction intégrable.

3. Soit $f \in \mathcal{L}^1(E)$. Montrer que, quel que soit $\epsilon > 0$, on peut trouver une fonction mesurable étagée φ telle que

$$\int_E |f - \varphi| < \epsilon.$$

Solution. Toute fonction mesurable positive est la limite d'une suite croissante de fonctions mesurables positives étagées. En vertu du théorème de la convergence monotone, il existe deux fonctions mesurables positives étagées ϕ et ψ telles que l'on ait

$$\int_E (f^+ - \phi) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{et} \quad \int_E (f^- - \psi) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Alors

$$\int_E |f - (\phi - \psi)| = \int_E |(f^+ - \phi) - (f^- - \psi)| < \epsilon.$$

4. Soient $f \in \mathcal{L}^1(E)$ et $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction coïncidant presque partout avec f . Montrer que $g \in \mathcal{L}^1(E)$ et que $\int_E g = \int_E f$.

Solution. Soit $N \subseteq E$ un ensemble de mesure nulle à l'extérieur duquel f et g coïncident. Alors

$$\int_E |g| = \int_N |g| + \int_{EN^c} |g| = \int_{EN^c} |f| < +\infty$$

et

$$\int_E f - \int_E g = \int_E (f - g) = \int_{EN^c} (f - g) = 0.$$

5. Obtenir la propriété de continuité de la mesure à partir du théorème de la convergence monotone.

Solution. Soient E_n des ensembles mesurables qui croissent vers $E = \bigcup_n E_n$. En appliquant le théorème de la convergence monotone aux fonctions $f_n = \mathbb{I}_{E_n}$ qui croissent vers $f = \mathbb{I}_E$, on obtient la propriété de continuité de la mesure : la mesure de E_n ($\int_{-\infty}^{+\infty} f_n$) croît vers celle de E ($\int_{-\infty}^{+\infty} f$).

6. Dédurre le théorème de la convergence monotone du lemme de Fatou.

Solution. Si les fonctions mesurables positives f_n croissent vers la fonction f sur E , le lemme de Fatou entraîne

$$\int_E f = \int_E \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n \leq \int_E f.$$

7. Montrer que l'on peut avoir inégalité stricte dans le lemme de Fatou.

Solution. Soit $E \subseteq [0, 1]$ un ensemble mesurable tel que $0 < \lambda(E) < 1$. Soit

$$f_n(x) = \begin{cases} \mathbb{I}_E & \text{si } n \text{ est pair} \\ \mathbb{I}_{[0,1]E^c} & \text{si } n \text{ est impair} . \end{cases}$$

Alors

$$\int_0^1 \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n = 0, \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n = \inf \{ \lambda(E), 1 - \lambda(E) \} > 0.$$

8. Le lemme de Fatou reste-t-il vrai si on y remplace $\liminf$ par $\limsup$?

Solution. Non. Pour les fonctions de l'exercice précédent,

$$\int_0^1 \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n = 1, \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n = \sup \{ \lambda(E), 1 - \lambda(E) \} < 1.$$

9. Soit

$$f_n(x) = ne^{-n|x|}.$$

Vérifier que, pour tout $x \neq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

Calculer ensuite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx.$$

Solution. La fonction exponentielle croissant plus vite que toute puissance de son argument,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} ne^{-n|x|} = 0 \quad \text{si } x \neq 0.$$

Cependant l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ne^{-n|x|} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-nx} n dx = 2$$

ne tend pas vers 0.

10. Vérifier que les fonctions

$$f_n = \frac{1}{n} \mathbb{I}_{[0, n^2]}$$

convergent vers 0 uniformément sur l'axe réel. Calculer ensuite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n.$$

Solution. On a

$$\sup \{ f_n(x) \mid x \in \mathbb{R} \} = \frac{1}{n}.$$

Cependant l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n = n$$

tend vers $+\infty$.

11. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{|x| > n} f = 0.$$

Solution. En vertu du théorème de la convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{|x| > n} f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_{[-n, n]^c} f = 0.$$

(La fonction majorante est $|f|$.)

12. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Est-il nécessairement vrai que

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0?$$

Solution. Non. Voici un exemple d'une fonction continue dont le graphe est constitué de segments de droite (en nombre infini). Soit

$$f = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n$$

où

$$f_n(x) = \begin{cases} n^4 \left(x - n + \frac{1}{n^3} \right) & \text{si } n - \frac{1}{n^3} \leq x \leq n \\ n^4 \left(n + \frac{1}{n^3} - x \right) & \text{si } n \leq x \leq n + \frac{1}{n^3} \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty, \quad \limsup_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Remarque : on a bien entendu

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = 0.$$

13. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin^n x \, dx.$$

Solution. En vertu du théorème de la convergence dominée (fonction majorante : $|f|$), on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin^n x \, dx = 0$$

car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin^n x = 0 \text{ presque partout sur } \mathbb{R}.$$

14. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \, dx.$$

Solution. Les fonctions

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

croissent vers la fonction e^x donc les fonctions

$$\mathbb{I}_{[0,n]} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$$

croissent vers la fonction e^{-x} . En vertu du théorème de la convergence monotone ou en vertu du théorème de la convergence majorée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \, dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} \, dx = 1.$$

15. Montrer que

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{\sin x}{x} \, dx \text{ existe}$$

puis vérifier que

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| \, dx = +\infty.$$

Solution. En intégrant par parties,

$$\int_{\pi/2}^b \frac{\sin x}{x} \, dx = -\frac{\cos b}{b} - \int_{\pi/2}^b \frac{\cos x}{x^2} \, dx$$

de telle sorte

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{\sin x}{x} \, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} \, dx - \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} \, dx.$$

D'autre part, si l'on avait

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx < +\infty,$$

on en déduirait que

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx < +\infty$$

donc que

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos^2 y}{(y + \pi/2)} dy < +\infty$$

ce qui entraînerait

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos^2 y}{y} dy < +\infty$$

et

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x} dx + \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx < +\infty$$

ce qui est absurde.

16. Soient $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions mesurables positives qui décroissent vers une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n = \int_E f$$

pourvu que f_1 soit intégrable. Cette dernière condition est-elle indispensable ?

Solution. On applique le théorème de la convergence monotone aux fonctions $g_n = f_1 - f_n$. On obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E (f_1 - f_n) = \int_E (f_1 - f)$$

donc

$$\int_E f_1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n = \int_E f_1 - \int_E f$$

ce qui permet de conclure. L'hypothèse que f_1 soit intégrable est essentielle comme le montre l'exemple des fonctions $f_n = \mathbb{I}_{[n, +\infty[}$.

17. Soient $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions intégrables qui croissent vers une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n = \int_E f$$

pourvu qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_E f_n \leq K$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution. En vertu du théorème de la convergence monotone, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E (f_n - f_1) = \int_E (f - f_1)$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n - \int_E f_1 = \int_E (f - f_1).$$

On en déduit que

$$\int_E (f - f_1) \leq K - \int_E f_1.$$

Ainsi les fonctions $f - f_1$ et $f = (f - f_1) + f_1$ sont intégrables et

$$\int_E (f - f_1) = \int_E f - \int_E f_1$$

ce qui permet de conclure.

18. Soient $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions mesurables positives qui convergent vers une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ de telle sorte que $f_n \leq f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n = \int_E f.$$

Solution. En vertu du lemme de Fatou,

$$\int_E f = \int_E \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n \leq \int_E f.$$

19. Soient $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions intégrables telles que $|f_n| \leq g$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où la fonction $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable. Montrer qu'alors

$$\int_E \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n \leq \int_E \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n.$$

Solution. En vertu du lemme de Fatou,

$$\begin{aligned} \int_E g + \int_E \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n &= \int_E (g + \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n) = \int_E \liminf_{n \rightarrow +\infty} (g + f_n) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E (g + f_n) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_E g + \int_E f_n \right) = \int_E g + \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\int_E \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n.$$

En remplaçant f_n par $-f_n$ dans ce raisonnement, on obtient

$$\int_E \liminf_{n \rightarrow +\infty} (-f_n) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E (-f_n)$$

c'est-à-dire

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n \leq \int_E \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n.$$

20. Soient $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions mesurables qui convergent vers une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $g_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions intégrables qui convergent vers une fonction intégrable $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ et supposons que $|f_n| \leq g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que dans ce cas

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n = \int_E f \quad \text{pourvu que} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E g_n = \int_E g.$$

Solution. En vertu du lemme de Fatou,

$$\int_E \liminf_{n \rightarrow +\infty} (g + g_n - |f - f_n|) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E (g + g_n - |f - f_n|)$$

donc

$$\int_E 2g \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_E g + \int_E g_n - \int_E |f - f_n| \right)$$

c'est-à-dire

$$\int_E 2g \leq \int_E g + \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E g_n - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_E |f - f_n|$$

et

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_E |f - f_n| \leq 0$$

ce qui permet de conclure.

21. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Solution. En intégrant terme à terme une série de fonctions positives,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx = \int_0^{+\infty} x e^{-x} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kx} dx \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x e^{-(k+1)x} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \int_0^{+\infty} y e^{-y} dy = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

22. Montrer que, quel que soit $t > 0$, la fonction $x \mapsto e^{-x} x^{t-1}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Solution. Puisque la fonction exponentielle croît plus vite que toute puissance de son argument, à chaque $t \in \mathbb{R}$ correspond $A_t > 0$ tel que

$$e^{-x} x^t \leq \frac{A_t}{x^2} \quad \text{si } x \geq 1$$

de telle sorte que

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{A_{t-1}}{x^2} dx < +\infty.$$

D'autre part,

$$\int_0^1 e^{-x} x^{t-1} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x^{1-t}} dx < +\infty$$

puisque $t > 0$.

23. Justifier la dérivation sous le signe intégral :

$$\frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} \log x dx.$$

Solution. On a, en vertu du théorème des accroissements finis,

$$\left| \frac{e^{-x} x^{t+h-1} - e^{-x} x^{t-1}}{h} \right| = e^{-x} x^{t-1} \left| \frac{x^h - 1}{h} \right| = e^{-x} x^{t+\theta_x(t)h-1} |\log x|$$

où $\theta_x(t) \in [0, 1]$. Puisque le logarithme croît plus lentement que toute puissance de son argument, à chaque $\rho > 0$ correspond $B_\rho > 0$ tel que

$$\log y \leq B_\rho y^\rho \text{ si } y \geq 1$$

donc que

$$|\log y| \leq B_\rho y^{-\rho} \text{ si } y \leq 1.$$

On en déduit que

$$\left| \frac{e^{-x} x^{t+h-1} - e^{-x} x^{t-1}}{h} \right| \leq \begin{cases} B_1 e^{-x} x^{3t/2} & \text{si } x \geq 1 \\ B_{t/4} e^{-x} x^{t/4-1} & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

dès que $|h| \leq t/2$. Cette dernière fonction étant intégrable sur $[0, +\infty[$, le théorème de la convergence dominée est applicable.

5 Mesure et intégration abstraites

1. – Soient X_1 un ensemble, $(X_2, \mathfrak{T}_2)$ un espace mesurable et $f : X_1 \rightarrow X_2$ une application. Vérifier la relation

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(E_\alpha).$$

En déduire que l'image réciproque de la tribu $\mathfrak{T}_2$ par f est bien une tribu.

Solution.

On a

$$x \in f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha\right) \Leftrightarrow \text{il existe } \beta \text{ tel que } f(x) \in E_\beta \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(E_\alpha).$$

On en déduit les relations

$$X_1 = f^{-1}(X_2),$$

$$(f^{-1}(E_2))^c = f^{-1}(E_2^c)$$

et

$$f^{-1}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k\right) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^{-1}(E_k)$$

et donc la véracité de l'énoncé.

- Soient $(X_1, \mathfrak{T}_1)$ un espace mesurable, X_2 un ensemble et $f : X_1 \rightarrow X_2$ une application. Montrer par un exemple approprié que la famille

$$f(\mathfrak{T}_1) = \{f(E_1) \mid E_1 \in \mathfrak{T}_1\}$$

n'est pas nécessairement une tribu sur X_2 .

Solution.

Puisque X_2 doit être dans la tribu, l'application $f : X_1 \rightarrow X_2$ doit être surjective.

2. Soient $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$ deux tribus sur X .
 - Montrer par un exemple approprié que $\mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2$ n'est pas nécessairement une tribu sur X .

Solution.

Considérer deux tribus distinctes

$$\mathfrak{T}_i = \{\emptyset, E_i, E_i^c, X\}$$

avec $\emptyset \neq E_i \neq X$.

- Montrer que

$$\mathfrak{T}(\mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2) = \mathfrak{T}(\{E_1 \cup E_2 \mid E_1 \in \mathfrak{T}_1, E_2 \in \mathfrak{T}_2\}).$$

Solution.

Soit

$$\mathfrak{G} = \{E_1 \cup E_2 \mid E_1 \in \mathfrak{T}_1, E_2 \in \mathfrak{T}_2\}.$$

Alors

$$\mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2 \subseteq \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{T}(\mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2)$$

d'où le résultat.

3. Soit $\mathfrak{G} = \{A, B\}$. Déterminer $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$.

Solution.

Dans le cas générique où $A \subsetneq B, B \subsetneq A$ et $AB \neq \emptyset$, $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ compte 16 éléments :

$$\begin{aligned} & \emptyset, X, A, B, A^c, B^c, AB, A^c B, AB^c, A^c B^c, \\ & A \cup B, A \cup B^c, A^c \cup B, AB + A^c B^c, A^c B + AB^c, \\ & AB + A^c B + AB^c + A^c B^c. \end{aligned}$$

4. – Soit $\mathfrak{G} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ où $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de X – les A_k sont non vides, deux à deux disjoints et leur réunion est X :

$$X = \sum_{k=1}^n A_k.$$

Déterminer $\mathfrak{T}(\mathfrak{G})$.

Solution.

La tribu engendrée est isomorphe à $\mathfrak{P}(\{1, 2, \dots, n\})$ via l'application

$$I \in \mathfrak{P}(\{1, 2, \dots, n\}) \mapsto \sum_{i \in I} A_i \in \mathfrak{T}(\mathfrak{G})$$

(et $\emptyset \mapsto \emptyset$). Elle est finie et compte 2^n éléments.

- Soit $\mathfrak{G} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ où $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des parties quelconques de X . Déterminer $\mathfrak{T}(\mathfrak{G})$. Quelle est la cardinalité maximale de $\mathfrak{T}(\mathfrak{G})$?

Solution.

Soit

$$\mathfrak{F} = \{B_1 B_2 \cdots B_n \mid B_i = A_i \text{ ou } B_i = A_i^c\} = \{C_1, C_2, \dots, C_N\}$$

(donc $N \leq 2^n$). Alors $X = \sum_{i=1}^N C_i$ et, vertu du cas précédent,

$$\mathfrak{T}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{T}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{P}(\{1, 2, \dots, N\}).$$

On a $\text{card}(\mathfrak{T}(\mathfrak{G})) = 2^N \leq 2^{2^n}$.

5. Soient X un ensemble, J un ensemble infini dénombrable et $\mathfrak{D} = \{D_j\}_{j \in J}$ une partition de X . Montrer que $\mathfrak{T}(\mathfrak{D})$ est isomorphe à $\mathfrak{P}(J)$.

Solution.

L'isomorphisme est

$$I \in \mathfrak{P}(J) \mapsto \sum_{i \in I} D_i \in \mathfrak{T}(\mathfrak{D})$$

(et $\emptyset \mapsto \emptyset$). En particulier, $\mathfrak{T}(\mathfrak{D})$ n'est pas dénombrable.

6. Montrer que toute tribu infinie $\mathfrak{T}$ sur X est non dénombrable.

(Suggestion : supposant le contraire, les ensembles

$$E(x) = \bigcap_{x \in E \in \mathfrak{T}} E$$

formeraient une partition infinie dénombrable de X).

Solution.

Supposons donc que $\mathfrak{T}$ est une tribu infinie et dénombrable et considérons pour chaque $x \in X$ l'ensemble :

$$E(x) = \bigcap_{E \in \mathfrak{T}, x \in E} E.$$

Puisque $\mathfrak{T}$ est supposée dénombrable, ces ensembles $E(x)$ sont dans $\mathfrak{T}$. Si $E(x) \neq E(y)$, $E(x)E(y) = \emptyset$ (car il existe un ensemble $E \in \mathfrak{T}$ tel que $E(x) \subseteq E$ et que $E(y) \subseteq E^c$). Les ensembles $E(x)$ qui sont distincts forment donc une partition finie ou dénombrable de X : $E_1, E_2, E_3, \dots$. On a

$$\mathfrak{T}(\{E_1, E_2, E_3, \dots\}) = \mathfrak{T}$$

car, pour chaque $E \in \mathfrak{T}$, $E = \sum_{x \in E} E(x)$. Mais, en vertu d'exercices précédents, cette tribu engendrée est soit finie soit non dénombrable, contredisant l'hypothèse faite sur $\mathfrak{T}$.

7. – Soient $(X_1, \mathfrak{T}_1)$ un espace mesurable, X_2 un ensemble et $f : X_1 \rightarrow X_2$ une application. Quelle est la plus grande tribu $\mathfrak{T}_2$ sur X_2 relativement à laquelle f reste mesurable ?

Solution.

L'image directe $f_*(\mathfrak{T}_1)$ de $\mathfrak{T}_1$ par f .

- Soient X_1 un ensemble, $(X_2, \mathfrak{T}_2)$ un espace mesurable et $f : X_1 \rightarrow X_2$ une application. Quelle est la plus petite tribu $\mathfrak{T}_1$ sur X_1 qui rende f mesurable ?

Solution.

L'image réciproque $f^{-1}(\mathfrak{T}_2)$ de $\mathfrak{T}_2$ par f .

8. – Vérifier que les parties symétriques relativement à l'origine de $\mathbb{R}$, $(E = -E)$, forment une tribu $\mathfrak{S}$ sur $\mathbb{R}$.

Solution.

Cela suit des relations

$$\mathbb{R} = -\mathbb{R}, \quad (-E)^c = -E^c \quad \text{et} \quad -\bigcup_n E_n = \bigcup_n -E_n.$$

- Déterminer $\mathcal{M}((\mathbb{R}, \mathfrak{S}), (\mathbb{R}, \mathfrak{S}))$.

Solution.

Les fonctions qui sont paires et celles qui sont impaires.

- Déterminer $\mathcal{L}^0(\mathbb{R}, \mathfrak{S})$.

Solution.

Les fonctions paires.

9. Soient (X, d) un espace métrique et $E \subseteq X$. Montrer que

$$|d(x, E) - d(y, E)| \leq d(x, y).$$

En déduire que l'ensemble

$$\{x \mid d(x, E) > \epsilon\}$$

est ouvert.

Solution.

On a pour tout $e \in E$

$$d(x, E) \leq d(x, e) \leq d(x, y) + d(y, e)$$

donc

$$d(x, E) - d(x, y) \leq d(y, E)$$

et en permutant x et y ,

$$d(y, E) \leq d(x, y) + d(x, E).$$

Si $\delta = d(x, E) > \epsilon$ et $r_x = \delta - \epsilon$, on a

$$B(x, r_x) \subseteq \{x \mid d(x, E) > \epsilon\}.$$

10. Vérifier l'équation

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} f_n^{-1}(O_k)$$

du cours.

Solution.

Puisque O est ouvert, on a

$$O = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} O_k$$

et donc

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^{-1}(O_k).$$

Si $x \in f^{-1}(O_k)$, $d(f(x), O^c) > 1/k$ donc il existe N tel que $n \geq N$ implique $d(f_n(x), O^c) > 1/k$ et

$$x \in \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} f_n^{-1}(O_k).$$

Réciproquement, si

$$x \in \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} f_n^{-1}(O_k),$$

on a $d(f(x), O^c) \geq 1/k$ et $x \in f^{-1}(O_{k+1})$.

11. Soient $f, g \in \mathcal{L}^0(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$. Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto f(x) + g(y)$ est mesurable.

Solution.

L'application $(x, y) \mapsto (f(x), g(y))$ est mesurable et la fonction $(u, v) \mapsto u + v$ est continue.

12. Soit $f \in \mathcal{L}^0(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$. Montrer que son graphe,

$$G_f = \{(x, y) \mid y = f(x)\},$$

est mesurable.

Solution.

La fonction $g : (x, y) \mapsto f(x) - y$ est mesurable et $G_f = g^{-1}(\{0\})$.

13. Soient $(X, \mathfrak{T})$ un espace mesurable et $f \in \mathcal{M}((X, \mathfrak{T}), (\mathbb{C}, \mathfrak{B}_{\mathbb{C}}))$. Montrer qu'il existe une fonction $\theta \in \mathcal{M}((X, \mathfrak{T}), (\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}))$ telle que

$$f = |f| e^{i\theta}.$$

Solution.

Il suffit de définir θ sur

$$X' = \{x \mid f(x) \neq 0\}.$$

Sur cet ensemble,

$$x \mapsto \frac{f(x)}{|f(x)|}$$

est mesurable et

$$u \mapsto \frac{1}{i} \log u$$

est continue.

14. Soient X un ensemble infini non dénombrable et $\mathfrak{T}$ la tribu engendrée par les singletons $\{x\} \subseteq X$.

– Vérifier que $\mathfrak{T}$ consiste des parties finies ou dénombrables ou cofinies (de complémentaire fini) ou codénombrables (de complémentaire dénombrable) de X .

Solution.

Ces parties forment bien une tribu $\mathfrak{S}$ et comme $\mathfrak{T}$ doit contenir les ensembles finis ou dénombrables ainsi que leur complément, il faut que $\mathfrak{S} = \mathfrak{T}$.

Si $E \in \mathfrak{T}$, on pose

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } E \text{ est fini ou dénombrable,} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Vérifier que μ est une mesure de probabilité sur X .

Solution.

On a bien $\mu(\emptyset) = 0$. Si tous les ensembles E_n sont finis ou dénombrables, leur somme l'est aussi et

$$\mu\left(\sum_n E_n\right) = 0 = \sum_n \mu(E_n).$$

Si l'un des ensembles E_n est cofini ou codénombrable, leur somme l'est aussi et tous les autres ensembles sont finis ou dénombrables de telle sorte que

$$\mu\left(\sum_n E_n\right) = 1 = \sum_n \mu(E_n).$$

15. Soit $(X, \mathfrak{T}, \mu)$ un espace mesuré. Une partie $E \subseteq X$ est dite localement mesurable si :

$$F \in \mathfrak{T} \text{ et } \mu(F) < +\infty \text{ impliquent } EF \in \mathfrak{T}.$$

- Montrer que la famille $\mathfrak{T}_{loc}$ des parties localement mesurables de X est une tribu sur X , plus fine que $\mathfrak{T}$.

Solution.

Il est clair que $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}_{loc}$. Si $E \in \mathfrak{T}_{loc}$ et $F \in \mathfrak{T}$ est tel que $\mu(F) < +\infty$,

$$E^c F = (E \cup F^c)^c = (EF + F^c)^c \in \mathfrak{T}$$

donc $E^c \in \mathfrak{T}_{loc}$. De même, la relation

$$\left(\bigcup_n E_n\right) F = \bigcup_n E_n F$$

montre que, si $E_n \in \mathfrak{T}_{loc}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_n E_n \in \mathfrak{T}_{loc}$.

- Montrer que $\mathfrak{T}_{loc} = \mathfrak{T}$ lorsque μ est σ -finie.

Solution.

Si $X = \bigcup_n D$ est une exhaustion de X par des ensembles mesurables de mesure finie et si $E \in \mathfrak{T}_{loc}$,

$$E = \bigcup_n D_n E \in \mathfrak{T}.$$

Si $E \in \mathfrak{T}_{loc}$, on pose

$$\mu_{loc}(E) = \begin{cases} \mu(E) & \text{si } E \in \mathfrak{T}, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

– Montrer que μ_{loc} est une mesure positive sur X .

Solution.

On a bien $\mu_{loc}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Si tous les ensembles E_n appartiennent à $\mathfrak{T}$,

$$\mu_{loc}\left(\sum_n E_n\right) = \mu\left(\sum_n E_n\right) = \sum_n \mu(E_n) = \sum_n \mu_{loc}(E_n).$$

Si $E_m \notin \mathfrak{T}$, alors ou bien $\sum_n E_n \notin \mathfrak{T}$ ou bien $\sum_n E_n \in \mathfrak{T}$ mais $\mu(\sum_n E_n) = +\infty$. Dans les deux cas,

$$\mu_{loc}\left(\sum_n E_n\right) = +\infty = \sum_n \mu_{loc}(E_n).$$

16. Soit $(X, \mathfrak{T}, \mu)$ un espace mesuré σ -fini. Montrer que dans la représentation $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$, on peut prendre les ensembles D_n croissants ou deux à deux disjoints.

Solution.

Si

$$X = \bigcup_n D_n,$$

soient

$$E_N = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_N$$

et

$$F_1 = D_1, F_N = D_N D_{N-1}^c \dots D_1^c, \quad N \geq 2.$$

Ces ensembles sont tous mesurables et de mesure finie et ils épuisent X , de façon croissante ou disjointe.

17. Soit $(X, \mathfrak{T}, \mu)$ un espace mesuré. On pose

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} E_n = \bigcup_{k \geq 1} \bigcap_{n \geq k} E_n$$

et

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} E_n = \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{n \geq k} E_n.$$

Supposons les ensembles E_n mesurables.

– Montrer que

$$\mu \left(\liminf_{n \rightarrow +\infty} E_n \right) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mu(E_n).$$

Solution.

Les ensembles $\bigcap_{n \geq k} E_n$ formant une suite croissante, on a

$$\mu \left(\liminf_{n \rightarrow +\infty} E_n \right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu \left(\bigcap_{n \geq k} E_n \right) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mu(E_n).$$

– Montrer que

$$\mu \left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} E_n \right) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mu(E_n)$$

pourvu que $\mu(\bigcup_n E_n) < +\infty$.

Solution.

Puisque les ensembles $\bigcup_{n \geq k} E_n$ décroissent et puisque $\mu(\bigcup_n E_n) < +\infty$, on a

$$\mu \left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} E_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu \left(\bigcup_{n \geq k} E_n \right) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mu(E_n).$$

18. Soient $(X, \mathfrak{T}, \mu)$ un espace mesuré complet et $f \in \mathcal{L}^0(X, \mathfrak{T})$. Si $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ coïncide presque partout avec f , alors $g \in \mathcal{L}^0(X, \mathfrak{T})$.

Solution.

On a

$$\{x \mid g(x) \leq b\} = \{x \mid g(x) = f(x) \leq b\} + \{x \mid g(x) \neq f(x) \text{ et } g(x) \leq b\}.$$

Le second ensemble est mesurable parce qu'il est négligeable pour μ .
Le premier ensemble peut s'écrire sous la forme

$$\{x \mid f(x) \leq b\} \cap \{x \mid f(x) = g(x)\}$$

et est de ce fait mesurable.

19. Soient $(X, \mathfrak{T}, \mu)$ un espace mesuré complet et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que $(\mathbb{R}, f_*(\mathfrak{T}), f_*\mu)$ est un espace mesuré complet.

Solution.

Soit $N \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble négligeable pour $f_*\mu$. Il existe $A \subseteq \mathbb{R}$ tel que $N \subseteq A$, que $f^{-1}(A) \in \mathfrak{T}$ et que $\mu(f^{-1}(A)) = 0$. Comme $f^{-1}(N) \subseteq f^{-1}(A)$ et comme $\mathfrak{T}$ est μ -complète, on a $f^{-1}(N) \in \mathfrak{T}$, c'est-à-dire $N \in f_*(\mathfrak{T})$.

20. Soient $E \subseteq \mathbb{R}$ et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable relativement à la tribu de Lebesgue. Montrer qu'il existe une fonction $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable relativement à la tribu de Borel qui coïncide presque partout avec f .

Solution.

Si $f = \mathbb{I}_A$ est la fonction indicatrice d'un ensemble mesurable, la représentation de A comme somme d'un ensemble borélien B et d'un ensemble de mesure nulle N permet de conclure avec $g = \mathbb{I}_B$. Le résultat est donc vrai pour une fonction f étagée par linéarité puis mesurable quelconque par passage à la limite.

21. Soient $(X, \mathfrak{T})$ un espace mesurable et $\mu, \nu \in \mathbf{M}_+(X, \mathfrak{T})$. Montrer que

$$\mathfrak{T}_\mu \mathfrak{T}_\nu = \mathfrak{T}_{\mu+\nu}.$$

Solution.

Si $(\mu + \nu)(AB^c) = 0$, nécessairement, $\mu(AB^c) = \nu(AB^c) = 0$ et donc

$$\mathfrak{T}_\mu \mathfrak{T}_\nu \supseteq \mathfrak{T}_{\mu+\nu}.$$

Si d'autre part $B_1 \subseteq E \subseteq A_1$ avec $\mu(A_1 B_1^c) = 0$ et $B_2 \subseteq E \subseteq A_2$ avec $\mu(A_2 B_2^c) = 0$, on a $B_1 \cup B_2 \subseteq E \subseteq A_1 A_2$ et $\mu(A_1 A_2 (B_1 \cup B_2)^c) = \nu(A_1 A_2 (B_1 \cup B_2)^c) = 0$ donc $(\mu + \nu)(A_1 A_2 (B_1 \cup B_2)^c) = 0$ ce qui montre que

$$\mathfrak{T}_\mu \mathfrak{T}_\nu \subseteq \mathfrak{T}_{\mu+\nu}.$$

22. La différence symétrique de deux ensembles $E \subseteq X$ et $F \subseteq X$ est l'ensemble

$$E \Delta F = EF^c + E^c F.$$

Soit $(X, \mathfrak{T}, \mu)$ un espace mesuré complet. Montrer que si $E \in \mathfrak{T}$ et $E \Delta F$ est négligeable, $F \in \mathfrak{T}$ et $\mu(F) = \mu(E)$.

Solution.

On a successivement

$$E \cup (E \Delta F) = E \cup F \in \mathfrak{T},$$

$$(E \cup F)E^c = E^c F \in \mathfrak{T},$$

$$(E \Delta F)(E^c F)^c = EF^c \in \mathfrak{T},$$

$$(E \cup F)(E^c F)^c (EF^c)^c = EF \in \mathfrak{T}$$

et

$$F = FE + FE^c \in \mathfrak{T}.$$

Ensuite,

$$\mu(F) = \mu(FE) + \mu(FE^c) = \mu(FE)$$

alors que

$$\mu(E) = \mu(EF) + \mu(EF^c) = \mu(EF).$$

23. Soient $(X, \mathfrak{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^0(X, \mathfrak{T})$ une fonction positive bornée.

- Montrer qu'il existe une suite de fonctions $\phi_n \in \mathcal{E}^0(X, \mathfrak{T})$ positives qui décroît vers f .

Solution.

Soit $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in X$. La fonction mesurable positive $M - f$ est la limite d'une suite croissante de fonctions mesurables positives étagées.

- En déduire que si $E \in \mathfrak{T}$ est de mesure finie,

$$\int_E f \, d\mu = \inf \left\{ \int_E \phi \, d\mu \mid \phi \in \mathcal{E}^1(X, \mathfrak{T}, \mu), f \leq \phi \right\}.$$

Solution.

Choissant une suite de fonctions $\phi_n \in \mathcal{E}^1(X, \mathfrak{T}, \mu)$ qui décroît vers f , le théorème de la convergence dominée implique que

$$\int_E f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E \phi_n \, d\mu$$

ce qui permet de conclure.

- Les hypothèses « bornée » et « de mesure finie » sont-elles nécessaires ?

Solution.

Oui, toutes les deux. Considérer $1/\sqrt{x}$ sur l'intervalle $]0, 1[$ pour la première et $1/\sqrt{x^3}$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$ pour la seconde (par exemple).

6 Construction de mesures

1. Le diamètre $\delta(E)$ d'une partie E d'un espace métrique (X, d) est

$$\delta(E) = \sup \{d(x, y) \mid x, y \in E\}.$$

Soient $p > 0$ et $\delta > 0$. On pose

$$\mu_{p, \delta}^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta(E_n)^p \mid E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n, \delta(E_n) < \delta \right\}.$$

- Montrer que $\mu_{p,\delta}^*$ est une mesure extérieure sur X .

Solution.

On a évidemment $\mu_{p,\delta}^*(\emptyset) = 0$ et puisque tout recouvrement de F est aussi un recouvrement de E lorsque $E \subseteq F$, $\mu_{p,\delta}^*(E) \leq \mu_{p,\delta}^*(F)$ dans ce cas. Choisisant les ensembles $E_{n,k}$ de telle sorte que

$$E_n \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_{n,k}, \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} (\delta(E_{n,k}))^p \leq \mu_{p,\delta}^*(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n},$$

on a

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_{n,k}$$

et

$$\mu_{p,\delta}^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} (\delta(E_{n,k}))^p \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_{p,\delta}^*(E_n) + \epsilon$$

ce qui montre que $\mu_{p,\delta}^*$ est sous-additive.

- Montrer que $\mu_{p,\delta}^*(E)$ est une fonction décroissante de δ .

Solution.

Si $\delta < \Delta$, tout recouvrement de E par des ensembles de diamètre au plus δ est aussi un recouvrement de E par des ensembles de diamètre au plus Δ .

- En déduire que

$$\mu_p^*(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mu_{p,\delta}^*(E) = \sup\{\mu_{p,\delta}^*(E) \mid \delta > 0\}$$

est une mesure extérieure sur X (la mesure extérieure de Hausdorff).

Solution.

Pour montrer que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_n \mu_{p,\delta}^*(E_n) = \sum_n \lim_{\delta \rightarrow 0} \mu_{p,\delta}^*(E_n),$$

utiliser le théorème de la convergence monotone.

- Montrer que si $p < P$, on a

$$\mu_{p,\delta}^*(E) \geq \delta^{p-P} \mu_{P,\delta}^*(E).$$

Solution.

On a

$$\begin{aligned} \mu_{p,\delta}^*(E) &= \inf\left\{\sum_{n \in \mathbb{N}} \delta(E_n)^p \mid E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n, \delta(E_n) < \delta\right\} \\ &= \inf\left\{\sum_{n \in \mathbb{N}} \delta(E_n)^P \delta(E_n)^{p-P} \mid E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n, \delta(E_n) < \delta\right\} \geq \delta^{p-P} \mu_{P,\delta}^*(E). \end{aligned}$$

- En déduire qu'à chaque E est associé un nombre $H(E)$ (la dimension de Hausdorff) tel que $\mu_p^*(E) = +\infty$ si $p < H(E)$ et que $\mu_p^*(E) = 0$ si $p > H(E)$.

Solution.

L'inégalité

$$\delta^{P-p} \mu_{p,\delta}^*(E) \geq \mu_{P,\delta}^*(E)$$

pour tout $p < P$ entraîne que

$$\mu_P^*(E) > 0 \Rightarrow \mu_p^*(E) = +\infty$$

pour tout $p < P$.

2. Une mesure extérieure μ^* est **régulière** si à chaque $A \subseteq X$ correspond un ensemble mesurable E tel que $A \subseteq E$ et $\mu(E) = \mu^*(A)$. Montrer que si μ^* est régulière, pour toute suite croissante $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu^*(A_n) = \mu^*\left(\bigcup_n A_n\right).$$

Solution.

Soient E_n des ensembles mesurables tels que $A_n \subseteq E_n$ et que $\mu(E_n) = \mu^*(A_n)$. On a

$$\begin{aligned} \mu^*\left(\bigcup_n A_n\right) &= \mu^*(\liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n) \leq \mu^*(\liminf_{n \rightarrow +\infty} E_n) \\ &= \mu(\liminf_{n \rightarrow +\infty} E_n) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mu(E_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu^*(A_n) \leq \mu^*\left(\bigcup_n A_n\right). \end{aligned}$$

3. Décrire l'espace de probabilité correspondant au cas d'une expérience aléatoire admettant un nombre fini d'issues équiprobables et déterminer la loi de probabilité associée à une variable aléatoire sur cet espace. Sur quelle tribu est-elle définie et quelle est sa fonction de répartition?

Solution.

On a

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\},$$

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{P}(\Omega),$$

$$P(E) = \frac{\text{card}(E)}{N}.$$

Toute fonction $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à $\mathcal{L}^0(\Omega, \mathfrak{T})$ et

$$X_*\mathfrak{T} = \mathfrak{P}(\mathbb{R}),$$

$$X_*P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{N}.$$

Si $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ sont les valeurs de X , on peut écrire

$$F_X = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbb{I}_{[x_k, +\infty[}.$$

Le cas où X admet moins de N valeurs distinctes s'en déduit aisément.

4. Calculer $\mu_F([n, n+1])$, $\mu_F([n, n+1])$, $\mu_F([n+1/2, n+3/2])$ et $\mu_F([n+1/2, n+3/2])$ ($n \in \mathbb{N}$) lorsque $F(x)$ est la partie entière de x .

Solution.

On a

$$\mu_F([n, n+1]) = F(n+1) - F(n) = 1,$$

$$\mu_F([n, n+1]) = F(n+1) - F(n-) = n+1 - (n-1) = 2,$$

$$\mu_F([n+1/2, n+3/2]) = F(n+3/2) - F(n+1/2) = n+1 - n = 1$$

et

$$\mu_F([n+1/2, n+3/2]) = F(n+3/2) - F((n+1/2)-) = n+1 - n = 1.$$

5. Soient $X \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathfrak{T})$, $t \in \mathbb{R}$ et supposons que $e^{tX} \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{T}, P)$. Montrer que

$$\int_{\Omega} e^{tX} dP = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} dF_X(x).$$

Solution.

Considérons le cas où $t > 0$. Posons

$$A_{n,k} = \left\{ \omega \mid \frac{k-1}{2^n} < e^{tX(\omega)} \leq \frac{k}{2^n} \right\}$$

et

$$A_n = \{\omega \mid n < e^{tX(\omega)}\}.$$

Si

$$X_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{I}_{A_{n,k}} + n \mathbb{I}_{A_n},$$

on aura

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} e^{tX} dP &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} X_n dP = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} P(A_{n,k}) + nP(A_n) \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} P_X \left(\left[\frac{1}{t} \log \left(\frac{k-1}{2^n} \right), \frac{1}{t} \log \left(\frac{k}{2^n} \right) \right] \right) \\
&\quad + nP_X \left(\left[\frac{1}{t} \log n, +\infty \right] \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^{n2^n} e^{t(\frac{1}{t} \log(\frac{k-1}{2^n}))} P_X \left(\left[\frac{1}{t} \log \left(\frac{k-1}{2^n} \right), \frac{1}{t} \log \left(\frac{k}{2^n} \right) \right] \right) \\
&\quad + e^{t(\frac{1}{t} \log n)} P_X \left(\left[\frac{1}{t} \log n, +\infty \right] \right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} dF_X(x).
\end{aligned}$$

7 Convergence en mesure

1. Soient $(X, \mathfrak{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f, g \in \mathcal{L}^0(X, \mathfrak{T})$. Alors $f \equiv_{\mu} g$ si et seulement si $f^+ \equiv_{\mu} g^+$ et $f^- \equiv_{\mu} g^-$.

Solution.

On a simplement

$$\begin{aligned}
&\{x \mid d(f(x), g(x)) > 0\} \\
&= \{x \mid d(f^+(x), g^+(x)) > 0\} \cup \{x \mid d(f^-(x), g^-(x)) > 0\}.
\end{aligned}$$

2. À quelle condition deux fonctions continues $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont-elles équivalentes modulo λ ?

Solution.

Tout point $x \in \mathbb{R}$ est la limite de points $x_n \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_n) = g(x_n)$ puisque la mesure de Lebesgue attribue une valeur strictement positive à tout intervalle ouvert. Donc $f = g$.

3. Montrer par un exemple approprié que le théorème d'Egorov n'est pas nécessairement vrai si la mesure n'est pas finie.

Solution.

Si $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$f_n(x) = \frac{x}{n},$$

alors $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = 0$ mais

$$\lambda(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) = +\infty.$$

4. Soient $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction indicatrice de l'intervalle

$$]k 2^{-m}, (k+1) 2^{-m}]$$

lorsque $n = 2^m + k$ avec $m \geq 0$, $0 \leq k < 2^m$.

- Montrer que les fonction f_n convergent en mesure.

Solution.

Ces fonctions convergent en mesure vers 0 puisque

$$\lambda(\{x \mid f_n(x) > 0\}) = 2^{-m}.$$

- Montrer qu'elles divergent en chaque point $x \in]0, 1]$.

Solution.

En chaque point $x \in]0, 1]$, on a $f_n(x) = 0$ pour un nombre infini des indices n mais aussi $f_n(x) = 1$ pour un nombre infini d'autres indices n .

- Montrer que la suite partielle f_{2^m} converge en tout point $x \in [0, 1]$.

Solution.

On a

$$f_{2^m} = \mathbb{I}_{]0, 2^{-m}]}$$

5. Dans $\mathcal{L}_\lambda^\infty([0, 1])$, calculer $d_\lambda(\mathbf{x}^2, \mathbf{x})$ et $\|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}\|_\infty$.

Solution.

On a évidemment $\|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}\|_\infty = 1/4$. D'autre part

$$\lambda(A_\delta) = \begin{cases} \sqrt{1-4\delta} & \text{si } \delta < 1/4, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi $\lambda(A_\delta) < \delta$ si et seulement si $\delta > \sqrt{5} - 2$ et

$$d_\lambda(\mathbf{x}^2, \mathbf{x}) = \frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} - 1} = 0,190\dots$$

6. Soit $(X, \mathfrak{T}, \mu)$ un espace mesuré de mesure finie. Montrer que la relation

$$\delta_\mu(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \int_X \frac{|f - g|}{1 + |f - g|} d\mu$$

définit sur $\mathcal{L}_\mu^0(X, \mathfrak{T})$ une distance qui est équivalente à celle de la convergence en mesure $d_\mu(\mathbf{f}, \mathbf{g})$.

Solution.

La fonction

$$x \mapsto \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|}$$

est intégrable parce que mesurable et bornée. L'inégalité

$$\frac{|f - g|}{1 + |f - g|} \leq \frac{|f - h|}{1 + |f - h|} + \frac{|h - g|}{1 + |h - g|}$$

entraîne l'inégalité

$$\delta_\mu(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \leq \delta_\mu(\mathbf{f}, \mathbf{h}) + \delta_\mu(\mathbf{h}, \mathbf{g})$$

et $\delta_\mu(\mathbf{f}_n, \mathbf{f})$ tend vers 0 si et seulement si $d_\mu(f_n, f)$ tend vers 0 μ -presque partout sur X en vertu des relations :

$$\int_X \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} d\mu \geq \frac{\delta}{1 + \delta} \mu(A_\delta(f_n, f))$$

et

$$\int_X \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} d\mu \leq \mu(A_\delta(f_n, f)) + \frac{\delta}{1 + \delta} \mu(X).$$

7. Montrer par un exemple approprié que la convergence en mesure de f_n vers f et la convergence en mesure de g_n vers g n'entraîne pas nécessairement celle de $f_n g_n$ vers $f g$.

Solution.

Les fonctions $x \mapsto x + 1/n$ et $x \mapsto x^2 + 1/n$ convergent en mesure vers $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ respectivement mais $x \mapsto x^3 + x^2/n + x/n + 1/n^2$ ne converge pas en mesure vers $x \mapsto x^3$.

8 Espaces de Lebesgue

1. Soient $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{T}, P)$ une variable aléatoire admettant une espérance mathématique et $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable telle que $\phi \circ X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{T}, P)$. Montrer que

$$\phi\left(\int_\Omega X dP\right) \leq \int_\Omega \phi(X) dP$$

(inégalité de Jensen).

(Suggestion : utiliser l'inégalité de convexité $\phi'(t_0)(t - t_0) + \phi(t_0) \leq \phi(t)$).

Solution. Dans l'inégalité de convexité

$$\phi'(t_0)(t - t_0) + \phi(t_0) \leq \phi(t),$$

soient $t = X(\omega)$ et $t_0 = \int_{\Omega} X \, dP$. Alors

$$\phi\left(\int_{\Omega} X \, dP\right) + \phi'\left(\int_{\Omega} X \, dP\right)\left(X(\omega) - \int_{\Omega} X \, dP\right) \leq \phi(X(\omega))$$

donc, en intégrant et en tenant compte de ce que $P(\Omega) = 1$,

$$\phi\left(\int_{\Omega} X \, dP\right) \leq \int_{\Omega} \phi(X) \, dP.$$

2. Soient $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{T}, P)$ une variable aléatoire admettant une espérance mathématique. Montrer que

$$\sqrt{1 + \|X\|_1^2} \leq \int_{\Omega} \sqrt{1 + X^2} \, dP \leq 1 + \|X\|_1.$$

Solution. La fonction $\phi(t) = \sqrt{1 + t^2}$ est convexe donc

$$\phi\left(\int_{\Omega} |X| \, dP\right) \leq \int_{\Omega} \phi(|X|) \, dP.$$

d'où

$$\sqrt{1 + \|X\|_1^2} \leq \int_{\Omega} \sqrt{1 + X^2} \, dP \leq \int_{\Omega} (1 + |X|) \, dP = 1 + \|X\|_1.$$

3. Soient $0 < p < r < s < +\infty$. Montrer que

$$\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{T}, \mu) \mathcal{L}^s(X, \mathfrak{T}, \mu) \subseteq \mathcal{L}^r(X, \mathfrak{T}, \mu).$$

Solution. On a

$$\begin{aligned} \int_X |f|^r \, d\mu &= \int_X |f|^p \frac{s-r}{s-p} + s \frac{r-p}{s-p} \, d\mu \\ &\leq \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{s-r}{s-p}} \left(\int_X |f|^s \, d\mu \right)^{\frac{r-p}{s-p}}. \end{aligned}$$

4. Soient $1 \leq p \leq r \leq +\infty$. Montrer que

$$\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{T}, \mu) \mathcal{L}^\infty(X, \mathfrak{T}, \mu) \subseteq \mathcal{L}^r(X, \mathfrak{T}, \mu) \mathcal{L}^\infty(X, \mathfrak{T}, \mu).$$

Solution. On a

$$\int_X |f|^r d\mu = \|f\|_\infty^r \int_X \left(\frac{|f|}{\|f\|_\infty} \right)^r d\mu \leq \|f\|_\infty^r \int_X \left(\frac{|f|}{\|f\|_\infty} \right)^p d\mu.$$

5. Soient $1 < p, q, r < +\infty$ des nombres tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$$

et

$$f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}), g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}), h \in \mathcal{L}^r(\mathbb{R}).$$

Montrer que $fgh \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et que

$$\|fgh\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r.$$

Solution. Appliquant l'inégalité de Jensen, on obtient

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \leq \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3.$$

Le choix

$$x_1 = \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p}, \alpha_1 = \frac{1}{p}, x_2 = \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}, \alpha_2 = \frac{1}{q}, x_3 = \frac{|h|^r}{\|h\|_r^r}, \alpha_3 = \frac{1}{r}$$

puis une intégration sur $\mathbb{R}$ conduisent au résultat.

6. Soient $f \in \mathcal{L}^p([0, +\infty[)$ et $g \in \mathcal{L}^q([0, +\infty[)$ où $1 \leq p, q \leq +\infty$ sont conjugués. Calculer

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(s)g(s) ds.$$

Solution. Puisque

$$\left| \int_0^T fg \right| \leq \left(\int_0^T |f|^p \right)^{1/p} \left(\int_0^T |g|^q \right)^{1/q} \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

on a

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(s)g(s) ds = 0.$$

7. Soit $f : [0, A] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction s'annulant à l'origine et admettant une dérivée continue. Montrer que, quel que soit $p \geq 1$, on a

$$\|f\|_p \leq \frac{A}{p^{1/p}} \|f'\|_p.$$

L'égalité est-elle possible ?

Solution. On a

$$|f(x)| = \left| \int_0^x f'(t) dt \right| \leq \left(\int_0^x |f'(t)|^p dt \right)^{1/p} x^{1/q}$$

de telle sorte que

$$\int_0^A |f(x)|^p dx \leq \int_0^A |f'(t)|^p dt \int_0^A x^{p/q} dx$$

et

$$\|f\|_p \leq \|f'\|_p \frac{A}{p^{1/p}}.$$

L'égalité aura lieu si et seulement si $f(x) = cx$ et $p = +\infty$.

8. Montrer que $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \not\subseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{L}^1([0, 1]) \not\subseteq \mathcal{L}^2([0, 1])$.

Solution. Par exemple,

$$\frac{1}{1+|x|} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathcal{L}^1([0, 1]) \setminus \mathcal{L}^2([0, 1]).$$

9. Soient $f, g \in \mathcal{L}^2(E)$. Montrer que

$$\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 = \frac{1}{2}(\|f+g\|_2^2 + \|f-g\|_2^2)$$

(identité du parallélogramme).

Solution. On a

$$\begin{aligned} \|f+g\|_2^2 + \|f-g\|_2^2 &= \langle f+g, f+g \rangle + \langle f-g, f-g \rangle \\ &= \|f\|_2^2 + 2\langle f, g \rangle + \|g\|_2^2 + \|f\|_2^2 - 2\langle f, g \rangle + \|g\|_2^2. \end{aligned}$$

10. Soit $0 < p < 1$. Montrer que si $f, g \in \mathcal{L}^p(E)$, alors $f + g \in \mathcal{L}^p(E)$ mais que l'inégalité

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

n'est plus nécessairement satisfaite.

Solution. On a

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq (2 \sup\{|f|, |g|\})^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$$

de telle sorte que

$$\|f + g\|_p^p \leq 2^p(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p).$$

L'inégalité de Minkowski peut être fausse, par exemple, dans l'espace $\mathcal{L}^{1/2}([0, 1])$, pour les fonctions

$$f = \mathbb{I}_{(0, 1/2)} \quad \text{et} \quad g = \mathbb{I}_{(1/2, 1)}.$$

11. On considère les fonctions $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^{\alpha+\beta}x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/(2n^\alpha) \\ 2n^\beta(1 - n^\alpha x) & \text{si } 1/(2n^\alpha) \leq x \leq 1/n^\alpha \\ 0 & \text{si } 1/n^\alpha \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Montrer qu'elles convergent vers 0 en chaque point $x \in [0, 1]$ puis déterminer les valeurs de p pour lesquelles elles convergent au sens de $\mathcal{L}^p([0, 1])$.

Solution. Quel que soit $x \in]0, 1[$, on a

$$f_n(x) = 0 \quad \text{dès que} \quad n > \frac{1}{x^{1/\alpha}}.$$

D'autre part,

$$\int_0^1 f_n^p = \frac{n^{p\beta-\alpha}}{p+1}$$

ce qui tend vers 0 si et seulement si $p < \alpha/\beta$.

12. Soient $1 \leq p, q \leq +\infty$ des exposants conjugués, $f_n \in \mathcal{L}^p(E)$ des fonctions qui convergent au sens de $\mathcal{L}^p(E)$ vers une fonction $f \in \mathcal{L}^p(E)$ et $g_n \in \mathcal{L}^q(E)$ des fonctions qui convergent au sens de $\mathcal{L}^q(E)$ vers une fonction $g \in \mathcal{L}^q(E)$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n g_n = \int_E f g.$$

Solution. Le résultat suit des inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}\int_E |f_n g_n - f g| &\leq \int_E |f_n - f| |g_n| + \int_E |f| |g_n - g| \\ &\leq \|f_n - f\|_p \|g_n\|_q + \|f\|_p \|g_n - g\|_q\end{aligned}$$

et du fait que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g_n\|_q = \|g\|_q.$$

13. Montrer que les fonctions $f_n(x) = \sin nx$ forment dans l'espace de Hilbert $\mathcal{L}^2([-\pi, \pi])$ une suite bornée ($\|f_n\|_2$ restent bornées) qui n'admet aucune suite partielle convergente (au sens de $\mathcal{L}^2([-\pi, \pi])$).

Solution. D'une part

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi.$$

D'autre part,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} (\sin nx - \sin mx)^2 \, dx = 2\pi.$$

14. Soient $f_n \in \mathcal{L}^p(E)$ des fonctions qui convergent simplement (ponctuellement) vers une fonction $f \in \mathcal{L}^p(E)$. Montrer qu'elles convergent au sens de $\mathcal{L}^p(E)$ ($1 \leq p < +\infty$) si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p.$$

Solution. La condition est évidemment nécessaire puisque

$$|\|f_n\|_p - \|f\|_p| \leq \|f_n - f\|_p.$$

Pour démontrer l'implication réciproque, on utilise le fait que les fonctions $|f_n - f|^p$ tendent vers 0 en restant majorées par les fonctions $2^p(|f_n|^p + |f|^p)$ qui tendent, elles, vers $2^{p+1}|f|^p$. Comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E 2^p(|f_n|^p + |f|^p) = \int_E 2^{p+1}|f|^p$$

par hypothèse, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E |f_n - f|^p = \int_E 0 = 0.$$

15. Soit $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ ($1 \leq p < +\infty$). Montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} = 0.$$

Solution. On sait que, quel que soit $h \in \mathbb{R}$, la fonction $x \rightarrow |f(x+h)|^p$ est intégrable et que

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h)|^p dx \right)^{1/p} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, on aura

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} = 0$$

en vertu du théorème de la convergence dominée. Dans le cas général, soit $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ une fonction telle que

$$\|f - g\|_p < \frac{\epsilon}{3}.$$

Alors

$$\begin{aligned} & \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ & \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - g(x+h)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x+h) - g(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ & \quad + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ & < \frac{\epsilon}{3} + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x+h) - g(x)|^p dx \right)^{1/p} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon \end{aligned}$$

dès que $|h|$ est assez petit.

16. Soient $1 \leq p, q \leq +\infty$ des exposants conjugués, $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R})$ et

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt$$

leur produit de convolution. Montrer que h est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

Solution. On peut supposer que $p < +\infty$ (autrement, on intervertit les rôles des fonctions f et g). On sait que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \rightarrow |f(x-t)|^p$ est intégrable et que

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)|^p dt \right)^{1/p} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

En vertu de l'inégalité de Hölder, la fonction h est bien définie et

$$\|h\|_{\infty} \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

De plus, elle est (uniformément) continue sur $\mathbb{R}$ car

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t) - f(y-t)| |g(t)| dt \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t) - f(y-t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^q dt \right)^{1/q} \end{aligned}$$

ce qui tend vers 0 lorsque x tend vers y en vertu de l'exercice précédent.

9 Dérivation

1. Vérifier qu'une fonction $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est à variation bornée si et seulement si son graphe est **rectifiable**, c'est-à-dire si et seulement si les sommes

$$\sigma(\phi, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n \sqrt{(\phi(x_k) - \phi(x_{k-1}))^2 + (x_k - x_{k-1})^2}$$

restent bornées quelle que soit la partition $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de l'intervalle $[a, b]$.

Solution. On a

$$\begin{aligned} |\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})| &\leq \sqrt{(\phi(x_k) - \phi(x_{k-1}))^2 + (x_k - x_{k-1})^2} \\ &\leq |\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})| + (x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

donc

$$s(\phi, \mathcal{P}) \leq \sigma(\phi, \mathcal{P}) \leq s(\phi, \mathcal{P}) + (b - a).$$

2. Soit $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée. Si $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ est une partition de l'intervalle $[a, b]$, soient

$$p(\phi, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n (\phi(x_k) - \phi(x_{k-1}))_+,$$

$$n(\phi, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n (\phi(x_k) - \phi(x_{k-1}))_-$$

et posons

$$\text{pos}(\phi, [a, b]) = \sup_{\mathcal{P}} \{p(\phi, \mathcal{P})\},$$

$$\text{neg}(\phi, [a, b]) = \sup_{\mathcal{P}} \{n(\phi, \mathcal{P})\}.$$

Montrer que

$$\text{pos}(\phi, [a, b]) - \text{neg}(\phi, [a, b]) = \phi(b) - \phi(a),$$

et que

$$\text{pos}(\phi, [a, b]) + \text{neg}(\phi, [a, b]) = \text{var}(\phi, [a, b]).$$

Solution. On a

$$\begin{aligned} \phi(b) - \phi(a) &= \sum_{k=1}^n (\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})) \\ &= \sum_{k=1}^n (\phi(x_k) - \phi(x_{k-1}))_+ - \sum_{k=1}^n (\phi(x_k) - \phi(x_{k-1}))_- \\ &= p(\phi, \mathcal{P}) - n(\phi, \mathcal{P}). \end{aligned}$$

La relation

$$p(\phi, \mathcal{P}) = n(\phi, \mathcal{P}) + (\phi(b) - \phi(a))$$

implique

$$\text{pos}(\phi, [a, b]) \leq \text{neg}(\phi, [a, b]) + (\phi(b) - \phi(a))$$

et la relation

$$n(\phi, \mathcal{P}) = p(\phi, \mathcal{P}) - (\phi(b) - \phi(a))$$

implique

$$\text{neg}(\phi, [a, b]) \leq \text{pos}(\phi, [a, b]) - (\phi(b) - \phi(a))$$

ce qui démontre la première équation.

Pour démontrer la seconde, observons d'abord que

$$s(\phi, \mathcal{P}) = p(\phi, \mathcal{P}) + n(\phi, \mathcal{P}) \leq \text{pos}(\phi, [a, b]) + \text{neg}(\phi, [a, b])$$

donc que

$$\text{var}(\phi, [a, b]) \leq \text{pos}(\phi, [a, b]) + \text{neg}(\phi, [a, b]).$$

D'autre part, en vertu de ce qui précède,

$$\begin{aligned} \text{var}(\phi, [a, b]) &\geq s(\phi, \mathcal{P}) = p(\phi, \mathcal{P}) + n(\phi, \mathcal{P}) \\ &= 2p(\phi, \mathcal{P}) - (\phi(b) - \phi(a)) \\ &= 2p(\phi, \mathcal{P}) - (\text{pos}(\phi, [a, b]) - \text{neg}(\phi, [a, b])) \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \text{var}(\phi, [a, b]) &\geq 2\text{pos}(\phi, [a, b]) - (\text{pos}(\phi, [a, b]) - \text{neg}(\phi, [a, b])) \\ &= \text{pos}(\phi, [a, b]) + \text{neg}(\phi, [a, b]). \end{aligned}$$

3. Soit $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée. Supposons que $\phi = g - h$ en soit une représentation comme la différence de deux fonctions croissantes sur $[a, b]$ et posons

$$P(x) = \text{pos}(\phi, [a, x]) , \quad N(x) = \text{neg}(\phi, [a, x]).$$

Vérifier que P et N sont croissantes sur $[a, b]$ et que

$$\text{var}(P, [a, b]) \leq \text{var}(g, [a, b]) , \quad \text{var}(N, [a, b]) \leq \text{var}(h, [a, b]).$$

Solution. En vertu de l'exercice précédent,

$$P(x) = \frac{1}{2} (V(x) + \phi(x) - \phi(a)) \quad \text{et} \quad N(x) = \frac{1}{2} (V(x) - \phi(x) + \phi(a))$$

ce qui montre que P et N sont croissantes. Puisque

$$V(b) \leq (g(b) - g(a)) + (h(b) - h(a)),$$

on a

$$\frac{1}{2} (V(b) + g(b) - h(b) - g(a) + h(a)) \leq g(b) - g(a)$$

c'est-à-dire

$$\text{var}(P, [a, b]) = P(b) \leq g(b) - g(a) = \text{var}(g, [a, b]).$$

L'inégalité

$$\text{var}(N, [a, b]) \leq \text{var}(h, [a, b])$$

s'établit de façon semblable.

4. Vérifier que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1/3} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

est intégrable sur $[-1, 1]$ et déterminer la variation de son intégrale définie

$$F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$$

sur cet intervalle.

Solution. La fonction f étant impaire,

$$\int_{-1}^1 |f(x)| dx = 2 \int_0^1 x^{-1/3} dx = 3.$$

La fonction

$$F(x) = \frac{3}{2}(x^{2/3} - 1)$$

étant paire, décroissante sur $[-1, 0]$ et croissante sur $[0, 1]$ et la variation étant une fonction additive de l'intervalle,

$$\begin{aligned} \text{var}(F, [-1, 1]) &= \text{var}(F, [-1, 0]) + \text{var}(F, [0, 1]) \\ &= 2 \text{var}(F, [0, 1]) = 2(F(1) - F(0)) = 3. \end{aligned}$$

5. Montrer que la fonction continue $\phi(x)$ qui coïncide avec $x \sin 1/x$ lorsque $x \neq 0$ n'est à variation bornée sur aucun intervalle contenant 0.

Solution. En vertu de l'additivité finie de la variation et du fait que la fonction considérée est paire, il suffit de voir que la variation de ϕ sur l'intervalle $[0, 2/\pi]$ (par exemple) est infinie. Considérons la partition particulière $\mathcal{P}_n$

$$\mathcal{P}_n = \{0, \frac{2}{(2n+1)\pi}, \frac{2}{(2n-1)\pi}, \dots, \frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi}\}.$$

Pour la somme correspondante, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left| \frac{2}{(2k+1)\pi} \sin \frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{2}{(2k-1)\pi} \sin \frac{(2k-1)\pi}{2} \right| \\ + \left| \frac{2}{(2n+1)\pi} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2} \right| \geq \sum_{k=1}^n \frac{2}{\pi} \frac{4k}{(2k+1)(2k-1)} \end{aligned}$$

ce qui tend vers $+\infty$ avec n .

6. Représenter sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ la fonction $\sin x$ comme la différence de deux fonctions croissantes.

Solution. En utilisant l'additivité finie de la variation, on obtient pour la variation $V(x)$ associée à la fonction $\sin x$ l'expression

$$V(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 2 - \sin x & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \\ 4 + \sin x & \text{si } \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

et

$$\sin x = V(x) - (V(x) - \sin x)$$

est une représentation possible.

7. Soit $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \dots\}$ une énumération des nombres rationnels. Montrer que la fonction

$$\phi(x) = \sum_{q_n < x} \frac{1}{2^n}$$

est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et discontinue sur $\mathbb{Q}$.

Solution. La série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

étant convergente, la fonction est bien définie. Si $x_1 < x_2$, il existe un nombre rationnel q_m entre x_1 et x_2 . Donc

$$\phi(x_1) < \phi(x_2).$$

D'autre part, en chaque point rationnel q_m , on a

$$\lim_{h \downarrow 0} \phi(q_m + h) = \lim_{h \downarrow 0} \sum_{q_n < q_m + h} \frac{1}{2^n} \geq \frac{1}{2^m} + \sum_{q_n < q_m} \frac{1}{2^n} \geq \frac{1}{2^m} + \lim_{h \downarrow 0} \phi(q_m - h)$$

de telle sorte que ϕ fait un saut de 2^{-m} en q_m (la somme des sauts doit être égale à 1).

8. Soit $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée. Montrer que $|\phi|$ est aussi à variation bornée sur $[a, b]$ et que

$$\text{var}(|\phi|, [a, b]) \leq \text{var}(\phi, [a, b]).$$

En déduire l'inégalité

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b |\phi| \leq |\phi(a)| + \text{var}(|\phi|, [a, b]).$$

Solution. La première inégalité découle de la relation :

$$||u| - |v|| \leq |u - v|.$$

Pour démontrer la seconde, écrivons

$$|\phi|(x) = W(x) - k(x)$$

où $W(x)$ est la variation de $|\phi|$ sur l'intervalle $[a, x]$ et k est une fonction croissante. On en tire

$$\int_a^b |\phi| \leq \int_a^b (W(b) - k(a)) \, dx = (\text{var}(|\phi|, [a, b]) + |\phi(a)|)(b - a).$$

9. Soit $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la limite d'une suite de fonctions $\phi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ à variation bornée. Montrer que

$$\text{var}(\phi, [a, b]) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \text{var}(\phi_n, [a, b]).$$

Solution. Pour toute partition $\mathcal{P}$ de l'intervalle $[a, b]$,

$$s(\phi, \mathcal{P}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s(\phi_n, \mathcal{P})$$

donc

$$s(\phi, \mathcal{P}) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \text{var}(\phi_n, [a, b])$$

et

$$\text{var}(\phi, [a, b]) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \text{var}(\phi_n, [a, b]).$$

10. Calculer les nombres de Dini $D^+\phi(0)$, $D_+\phi(0)$, $D^-\phi(0)$ et $D_-\phi(0)$ pour la fonction

$$\phi = (\mathbb{I}_{\mathbb{Q}^c}]-\infty, 0] + 2 \mathbb{I}_{\mathbb{Q}^c}]0, +\infty[) - (\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}]-\infty, 0] + 2 \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}]0, +\infty[).$$

Solution. On a

$$D^+\phi(0) = \limsup_{h \downarrow 0} \frac{\phi(h) - \phi(0)}{h} = \limsup_{h \downarrow 0} \frac{\phi(h) + 1}{h} = +\infty,$$

et de façon semblable

$$D_+\phi(0) = -\infty, \quad D^-\phi(0) = +\infty, \quad D_-\phi(0) = 0.$$

11. Montrer qu'une fonction est absolument continue sur tout intervalle dans lequel elle admet une dérivée bornée.

Solution. En vertu du théorème des accroissements finis, quels que soient u, w dans l'intervalle $[a, b]$ où la fonction ϕ admet une dérivée bornée, il existe $v \in]u, w[$ tel que

$$\phi(w) - \phi(u) = \phi'(v)(w - u).$$

Par suite,

$$\sum_{k=1}^n |\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})| \leq \|\phi'\|_{\infty} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}).$$

12. Montrer que la fonction continue $\phi(x)$ qui coïncide avec $x^2 \sin 1/x$ lorsque $x \neq 0$ est absolument continue.

Solution. Application de l'exercice précédent. Si $x \neq 0$,

$$\phi'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

alors que

$$\phi'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin 1/x}{x} = 0.$$

13. Soit $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. Montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme $\phi = \phi_{ac} + \phi_s$ où ϕ_{ac} est croissante absolument continue et ϕ_s est croissante **singulière**, c'est-à-dire telle que $\phi'_s = 0$ presque partout sur $[a, b]$.

Solution. La fonction

$$\phi_{ac}(x) = \int_a^x \phi'(t) dt$$

est croissante, absolument continue et

$$\phi'_{ac}(x) = \phi'(x)$$

presque partout sur l'intervalle $[a, b]$. La relation

$$\int_{x_1}^{x_2} \phi'(t) dt \leq \phi(x_2) - \phi(x_1)$$

montre d'autre part que la fonction

$$\phi_s(x) = \phi(x) - \phi_{ac}(x)$$

est croissante.

14. Montrer qu'une fonction convexe $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est absolument continue sur tout intervalle compact $[a, b]$.

Solution. On sait que si $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$,

$$\frac{\phi(x_2) - \phi(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{\phi(x_3) - \phi(x_2)}{x_3 - x_2} \leq \frac{\phi(x_4) - \phi(x_3)}{x_4 - x_3}$$

de telle sorte que si $a \leq x < y \leq b$,

$$\phi(a+1) - \phi(a-2) \leq \frac{\phi(y) - \phi(x)}{y - x} \leq \phi(b+2) - \phi(b-1).$$

On en déduit que

$$\frac{|\phi(y) - \phi(x)|}{|y - x|} \leq \sup\{|\phi(a+1) - \phi(a-2)|, |\phi(b+2) - \phi(b-1)|\} = K.$$

Ainsi

$$\sum_{k=1}^n |\phi(t_k) - \phi(s_k)| \leq K \sum_{k=1}^n |t_k - s_k|.$$

15. Soit $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction absolument continue. Montrer que

$$\text{var}(\phi, [a, b]) = \int_a^b |\phi'(x)| \, dx.$$

Solution. Supposons d'abord que ϕ' soit continue. Soit $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une partition quelconque de l'intervalle $[a, b]$. Alors, en vertu du théorème des accroissements finis, il existe des points $y_1, y_2, \dots, y_n$ tels que

$$\sum_{k=1}^n |\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n |\phi'(y_k)| (x_k - x_{k-1})$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \inf \{ |\phi'(x)| \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k \} (x_k - x_{k-1}) \\ & \leq \sum_{k=1}^n |\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})| \\ & \leq \sum_{k=1}^n \sup \{ |\phi'(x)| \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k \} (x_k - x_{k-1}). \end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned} \int_a^b |\phi'| &= \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \inf \{ |\phi'(x)| \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k \} (x_k - x_{k-1}) \mid \mathcal{P} \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{k=1}^n \sup \{ |\phi'(x)| \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k \} (x_k - x_{k-1}) \mid \mathcal{P} \right\} \end{aligned}$$

on peut choisir une partition $\mathcal{P}$ telle que

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^n \sup \{ |\phi'(x)| \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k \} (x_k - x_{k-1}) \\ &- \sum_{k=1}^n \inf \{ |\phi'(x)| \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k \} (x_k - x_{k-1}) < \epsilon, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\left| \text{var}(\phi, [a, b]) - \int_a^b |\phi'| \right| \leq \epsilon$$

donc que

$$\text{var}(\phi, [a, b]) = \int_a^b |\phi'|$$

dans ce cas.

Dans le cas général, introduisons une fonction $g \in C([a, b])$ telle que

$$\int_a^b |\phi' - g| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Pour la fonction

$$G(x) = \phi(a) + \int_a^x g(t) \, dt,$$

on a

$$\text{var}(G, [a, b]) = \int_a^b |g|.$$

Maintenant,

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{k=1}^n |\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})| - \sum_{k=1}^n |G(x_k) - G(x_{k-1})| \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |(\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})) - (G(x_k) - G(x_{k-1}))| \\ &= \sum_{k=1}^n \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} (\phi' - g) \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |\phi' - g| < \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$|\text{var}(\phi, [a, b]) - \text{var}(G, [a, b])| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

puis que

$$\begin{aligned} \left| \text{var}(\phi, [a, b]) - \int_a^b |\phi'| \right| &\leq |\text{var}(\phi, [a, b]) - \text{var}(G, [a, b])| \\ &+ \left| \text{var}(G, [a, b]) - \int_a^b |g| \right| + \left| \int_a^b |g| - \int_a^b |\phi'| \right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + 0 + \int_a^b |\phi' - g| < \epsilon \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\text{var}(\phi, [a, b]) = \int_a^b |\phi'|.$$

16. Soient $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction absolument continue et

$$\ell_\phi = \sup\{\sigma(\phi, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P}\}$$

la longueur de son graphe. Montrer que

$$\ell_\phi = \int_a^b \sqrt{1 + \phi'(x)^2} \, dx.$$

Solution. Supposons d'abord que ϕ' soit continue. Soit $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une partition quelconque de l'intervalle $[a, b]$. Alors, en vertu du théorème des accroissements finis, il existe des points $y_1, y_2, \dots, y_n$ tels que

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{(\phi(x_k) - \phi(x_{k-1}))^2 + (x_k - x_{k-1})^2} = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \phi'(y_k)^2} (x_k - x_{k-1})$$

donc

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^n \inf \left\{ \sqrt{1 + \phi'(x)^2} \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k \right\} \\ &\leq \sum_{k=1}^n \sqrt{(\phi(x_k) - \phi(x_{k-1}))^2 + (x_k - x_{k-1})^2} \\ &\leq \sum_{k=1}^n \sup \left\{ \sqrt{1 + \phi'(x)^2} \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k \right\}. \end{aligned}$$

La partition $\mathcal{P}$ étant arbitraire, on en déduit comme dans l'exercice précédent que

$$\ell_\phi = \int_a^b \sqrt{1 + \phi'^2}$$

dans ce cas.

Dans le cas général, introduisons une fonction $g \in C([a, b])$ telle que

$$\int_a^b |\phi' - g| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Pour la fonction

$$G(x) = \phi(a) + \int_a^x g(t) dt,$$

on a

$$\ell_G = \int_a^b \sqrt{1 + g^2}.$$

Maintenant, en utilisant la relation

$$|\sqrt{u} - \sqrt{v}| = \frac{|u - v|}{\sqrt{u} + \sqrt{v}},$$

on voit que

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^n \sqrt{(\phi(x_k) - \phi(x_{k-1}))^2 + (x_k - x_{k-1})^2} \right. \\ & \quad \left. - \sum_{k=1}^n \sqrt{(G(x_k) - G(x_{k-1}))^2 + (x_k - x_{k-1})^2} \right| \\ & \leq \sum_{k=1}^n \frac{|(\phi(x_k) - \phi(x_{k-1}))^2 - (G(x_k) - G(x_{k-1}))^2|}{\sqrt{(\phi(x_k) - \phi(x_{k-1}))^2 + (x_k - x_{k-1})^2} + \sqrt{(G(x_k) - G(x_{k-1}))^2 + (x_k - x_{k-1})^2}} \\ & \leq \sum_{k=1}^n \frac{|(\phi(x_k) - \phi(x_{k-1}))^2 - (G(x_k) - G(x_{k-1}))^2|}{|\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})| + |G(x_k) - G(x_{k-1})|} \\ & \leq \sum_{k=1}^n |(\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})) - (G(x_k) - G(x_{k-1}))| \leq \int_a^b |\phi' - g| < \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$|\ell_\phi - \ell_G| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

puis, comme précédemment, que

$$\begin{aligned} |\ell_\phi - \int_a^b \sqrt{1 + \phi'^2}| &\leq \frac{\epsilon}{2} + 0 + \left| \int_a^b (\sqrt{1 + \phi'^2} - \sqrt{1 + g^2}) \right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \int_a^b |\phi' - g| < \epsilon. \end{aligned}$$

17. À partir de la formule d'intégration par parties, montrer que si la fonction $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est absolument continue, positive et décroissante et si la fonction $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b F(x)g(x) \, dx = F(a) \int_a^c g(x) \, dx.$$

(« Deuxième théorème de la moyenne ». Quel est le premier ?)

Solution. Posons

$$G(x) = \int_a^x g(t) \, dt.$$

Alors

$$\int_a^b Fg = F(b)G(b) - \int_a^b F'G.$$

Puisque F' est négative,

$$\begin{aligned} F(b)G(b) + \inf\{G(x) \mid x \in [a, b]\}(F(a) - F(b)) &\leq \int_a^b Fg \\ &\leq F(b)G(b) + \sup\{G(x) \mid x \in [a, b]\}(F(a) - F(b)) \end{aligned}$$

et, puisque F est positive,

$$\inf\{G(x) \mid x \in [a, b]\}F(a) \leq \int_a^b Fg \leq \sup\{G(x) \mid x \in [a, b]\}F(a).$$

En vertu du théorème de la valeur intermédiaire, il doit exister $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b Fg = F(a)G(c).$$

Le premier théorème de la moyenne dit qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(c)(b - a).$$

Il s'applique dès que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et peut être déduit du théorème des accroissements finis ou du théorème de la valeur intermédiaire.

10 Mesures signées

1. Soient ν_1 et ν_2 deux mesures signées sur $(X, \mathfrak{T})$. Montrer que, quelques soient les nombres $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$,

$$|a_1\nu_1 + a_2\nu_2| \leq |a_1||\nu_1| + |a_2||\nu_2|.$$

Solution.

L'inégalité

$$|\nu_1 + \nu_2| \leq |\nu_1| + |\nu_2|$$

suit de l'inégalité $|\nu_1 + \nu_2(E)| \leq |\nu_1(E)| + |\nu_2(E)|$ quel que soit $E \in \mathfrak{T}$ et l'équation

$$|a_1\nu_1| = |a_1||\nu_1|$$

suit directement de la définition de $|a_1\nu_1|$.

2. Soit $(X, \mathfrak{T})$ un espace mesurable. Une **mesure complexe** ν sur X est une fonction $\nu : \mathfrak{T} \rightarrow \mathbb{C}$ additive et s'annulant sur l'ensemble vide.
 - Définir la variation $|\nu|$ de ν et vérifier que $|\nu|$ est une mesure positive finie telle que

$$|\nu| \leq |\Re \nu| + |\Im \nu|.$$

Solution.

La définition est la même que pour une mesure signée et la démonstration du théorème selon laquelle une mesure signée est bien additive s'applique mot pour mot. L'inégalité

$$|\nu| \leq |\Re \nu| + |\Im \nu|$$

découle de ce que

$$|\nu(E)| \leq |\Re \nu(E)| + |\Im \nu(E)|$$

pour tout $E \in \mathfrak{T}$.

- Définir l'espace $\mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \nu)$ et $\int_X f d\nu$ puis montrer que

$$\left| \int_X f d\nu \right| \leq \int_X |f| d|\nu|.$$

Solution.

L'espace $\mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \nu)$ est défini par

$$\mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \nu) = \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \Re \nu) \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \Im \nu)$$

et

$$\int_X f \, d\nu = \int_X f \, d\Re\nu + i \int_X f \, d\Im\nu.$$

On a

$$\begin{aligned} \left| \int_X f \, d\nu \right| &= e^{i\theta} \int_X f \, d\nu = \int_X f \, d(e^{i\theta}\nu) \\ &= \int_X f \, d(\Re(e^{i\theta}\nu)) \leq \int_X |f| \, d|e^{i\theta}\nu| = \int_X |f| \, d|\nu|. \end{aligned}$$

3. Soit $\nu \in \mathbf{M}(X, \mathfrak{T})$. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{L}^0(X, \mathfrak{T})$ telle que $|f| \leq 1$ $|\nu|$ -presque partout et que

$$\nu(E) = \int_E f \, d|\nu|, \quad E \in \mathfrak{T}.$$

Solution.

La mesure ν étant absolument continue relativement à la mesure $|\nu|$, il existe une fonction

$$f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, |\nu|) = \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \nu^+) \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{T}, \nu^-)$$

telle que

$$\nu(E) = \int_E f \, d|\nu| \quad \text{pour tout } E \in \mathfrak{T}.$$

L'inégalité du triangle pour les intégrales entraîne que l'on a

$$|\nu|(E_1) = |\nu|(E_2) = 0$$

pour les ensembles

$$E_1 = \{x \mid f(x) > 1\}$$

et

$$E_2 = \{x \mid f(x) < -1\}.$$

4. Soit $(X, \mathfrak{T})$ un espace mesurable tel que $\{x\} \in \mathfrak{T}$ pour tout $x \in X$. Une mesure $\rho \in \mathbf{M}(X, \mathfrak{T}) \cup \mathbf{M}_+(X, \mathfrak{T})$ est **diffuse** si $\rho(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in X$ et **atomique** si elle est portée par un ensemble fini ou dénombrable.
- Montrer qu'une mesure diffuse et une mesure atomique sont toujours étrangères l'une à l'autre.

Solution.

Soient ρ_1 une mesure diffuse et ρ_2 une mesure atomique, portée par les point $\{x_n\}_n$. Soit

$$D_2 = \bigcup_n \{x_n\}.$$

Alors

$$\rho_2(E) = \rho_2(ED_2)$$

et

$$\rho_1(E) = \rho_1(ED_2 + ED_2^c) = \rho_1(ED_2^c).$$

- Montrer que toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_+(X, \mathfrak{T})$ σ -finie admet une décomposition unique sous la forme $\mu = \rho_1 + \rho_2$ où ρ_1 est diffuse et ρ_2 est atomique.

Solution.

Puisque μ est σ -finie, l'ensemble

$$D = \{x \mid \mu(\{x\}) > 0\}$$

est fini ou dénombrable. La mesure

$$\rho_2(E) = \mu(ED)$$

est atomique et la mesure

$$\rho_1(E) = \mu(ED^c)$$

est diffuse. Cette décomposition est unique. Si l'on a

$$\mu = \rho_1 + \rho_2 = \tau_1 + \tau_2$$

avec ρ_1, τ_1 diffuses et ρ_2, τ_2 atomiques, on aura

$$(\rho_2 - \tau_2)(\{x\}) = (\rho_1 - \tau_1)(\{x\}) = 0$$

pour tout $x \in X$.

11 Mesures produits

1. Donner un exemple
 - d'une classe monotone sur X contenant l'espace X et l'ensemble vide mais qui n'est pas une tribu,

Solution. $\{\emptyset, A, X\}$ avec $\emptyset \subsetneq A \subsetneq X$.

– d’une mesure qui n’est pas σ -finie.

Solution. La mesure du cardinal sur $\mathbb{R}$.

2. Soient μ_{card} la mesure du cardinal sur $\mathbb{N}$ et

$$f(n, m) = \begin{cases} 2 - 2^{-n} & \text{si } m = n, \\ -2 + 2^{-n} & \text{si } m = n + 1 \\ 0 & \text{autrement .} \end{cases}$$

Calculer

$$\int_{\mathbb{N}} d\mu_{card}(m) \int_{\mathbb{N}} f(n, m) d\mu_{card}(n)$$

et

$$\int_{\mathbb{N}} d\mu_{card}(n) \int_{\mathbb{N}} f(n, m) d\mu_{card}(m).$$

Solution.

$$\int_{\mathbb{N}} d\mu_{card}(m) \int_{\mathbb{N}} f(n, m) d\mu_{card}(n) = \int_{\mathbb{N}} (2 - 2^{-m} - 2 + 2^{-m+1}) d\mu_{card}(m) = 1$$

et

$$\int_{\mathbb{N}} d\mu_{card}(n) \int_{\mathbb{N}} f(n, m) d\mu_{card}(m) = \int_{\mathbb{N}} (-2 + 2^{-n} + 2 - 2^{-n}) d\mu_{card}(n) = 0.$$

On a

$$\int_{\mathbb{N}^2} |f| d\mu_{card} \times \mu_{card} = +\infty.$$

3. Soient $(X, \mathfrak{T}, \mu)$ un espace mesuré σ -fini complet, $f, g \in \mathcal{L}^2(X, \mathfrak{T}, \mu)$ et

$$h(x_1, x_2) = (f(x_1)g(x_2) - f(x_2)g(x_1))^2.$$

Montrer que $h \in \mathcal{L}^1(X \times X, \mathfrak{T} \times \mathfrak{T}, \mu \times \mu)$ et en déduire l’inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Solution. L’intégrabilité de h et l’inégalité de Cauchy-Schwarz suivent toutes les deux de la relation

$$\begin{aligned} & \int_{X^2} |f(x_1)g(x_2)f(x_2)g(x_1)| d\mu \times \mu \\ &= \int_X |f(x_1)g(x_1)| d\mu(x_1) \int_X |f(x_2)g(x_2)| d\mu(x_2) \leq \|f\|_2^2 \|g\|_2^2. \end{aligned}$$

4. Soient $(X_1, \mathfrak{T}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathfrak{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés σ -finis complets, $K \in \mathcal{L}^2(X_1 \times X_2, \mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2, \mu_1 \times \mu_2)$ et $f \in \mathcal{L}^2(X_1, \mathfrak{T}_1, \mu_1)$. Montrer que
- Pour μ_2 -presque tout $x_2 \in X_2$, la fonction $x_1 \mapsto f(x_1)K(x_1, x_2)$ est intégrable.

Solution. On a

$$\int_{X_1} |K(x_1, x_2)|^2 d\mu_1 < +\infty$$

μ_2 -presque partout donc

$$\begin{aligned} & \int_{X_1} |f(x_1)K(x_1, x_2)| d\mu_1 \\ & \leq \left(\int_{X_1} |f(x_1)|^2 d\mu_1 \right)^{1/2} \left(\int_{X_1} |K(x_1, x_2)|^2 d\mu_1 \right)^{1/2} < +\infty \end{aligned}$$

μ_2 -presque partout.

- La fonction

$$g(x_2) = \int_{X_1} f(x_1)K(x_1, x_2) d\mu_1$$

est mesurable.

Solution. La fonction g est mesurable lorsque la fonction $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1)K(x_1, x_2)$ est la fonction indicatrice d'un ensemble mesurable donc lorsqu'elle est une fonction étagée donc finalement lorsqu'elle est simplement intégrable.

- $g \in \mathcal{L}^2(X_2, \mathfrak{T}_2, \mu_2)$ et

$$\|g\|_2 \leq \|f\|_2 \|K\|_2.$$

Solution. On a

$$\begin{aligned} \int_{X_2} |g(x_2)|^2 d\mu_2 &= \int_{X_2} d\mu_2 \left| \int_{X_1} f(x_1)K(x_1, x_2) d\mu_1 \right|^2 \\ &\leq \int_{X_2} d\mu_2 \left(\int_{X_1} |f(x_1)|^2 d\mu_1 \right) \left(\int_{X_1} |K(x_1, x_2)|^2 d\mu_1 \right) = \|f\|_2^2 \|K\|_2^2. \end{aligned}$$

5. Montrer que $\mathfrak{L}_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{L}_{\mathbb{R}} \neq \mathfrak{L}_{\mathbb{R}^2}$.

Solution. Si E n'est pas dans $\mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$ et N est de mesure nulle, $E \times N \in \mathfrak{L}_{\mathbb{R}^2}$ mais $E \times N \notin \mathfrak{L}_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{L}_{\mathbb{R}}$.

6. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. Montrer que l'ensemble

$$E = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

est mesurable (relativement à la tribu produit) et calculer sa mesure.

Solution. On a

$$E = \{(x, y) \mid f(x) - y \geq 0\} \cap [a, b] \times [0, +\infty[.$$

et la fonction $(x, y) \mapsto f(x) - y$ est mesurable. De plus

$$\lambda_2(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_E \, dx dy = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b f(x) \, dx.$$

7. À $E \subseteq \mathbb{R}$ associons l'ensemble $\tilde{E} \subseteq \mathbb{R}^2$ défini par

$$\tilde{E} = \{(x, y) \mid x - y \in E\}$$

et considérons la famille

$$\mathfrak{T} = \{E \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \mid \tilde{E} \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^2}\}.$$

Montrer que $\mathfrak{T} = \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$.

Solution. Les relations

$$\widetilde{(E^c)} = (\tilde{E})^c \quad \text{et} \quad \widetilde{\bigcup_k E_k} = \bigcup_k \tilde{E}_k,$$

qui sont aisément vérifiées, entraînent que $\mathfrak{T}$ est une tribu. Puisque la fonction $(x, y) \mapsto x - y$ est continue, $\tilde{O}$ est ouvert quel que soit l'ensemble ouvert O . Cela assure que $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathfrak{T}$ donc que $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{T}$.

8. Dédurre du théorème de Tonelli et de la relation

$$\int_0^{+\infty} e^{-z^2} \, dz = \int_0^{+\infty} x e^{-x^2 y^2} \, dy \quad \text{si } x > 0$$

que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} \, dx = \sqrt{2\pi}.$$

Solution. En vertu du théorème de Tonelli, on a

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} x e^{-x^2 y^2} dy = \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} x e^{-x^2(1+y^2)} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{dy}{2(1+y^2)} = \frac{1}{2} \arctan y \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

9. Calculer

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy, \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx \text{ et } \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| dx dy$$

pour la fonction

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Solution. Puisque

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{-x}{x^2 + y^2} \right),$$

on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy &= \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{4}, \\ \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx &= - \int_0^1 \frac{dy}{1 + y^2} = -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| dx dy \\ &= \int_0^1 dy \left(\int_0^y \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx + \int_y^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right) \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1 + y^2} \right) dy = +\infty. \end{aligned}$$

10. Utiliser le théorème de Tonelli pour calculer de deux manières l'intégrale

$$\int_a^b dx \int_0^1 y^x dy, \quad 0 < a < b$$

et en déduire la valeur de

$$\int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\log y} dy.$$

Solution. L'intégrand étant positif, on a

$$\int_a^b dx \int_0^1 y^x dy = \int_a^b \frac{dx}{1+x} = \log \frac{b+1}{a+1}$$

et

$$\int_0^1 dy \int_a^b y^x dx = \int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\log y} dy$$

de telle sorte que

$$\int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\log y} dy = \log \frac{b+1}{a+1}.$$

11. Utiliser le théorème de Fubini pour calculer de deux manières l'intégrale

$$\int_0^A \int_0^A e^{-xy} \sin x \, dx dy$$

et en déduire que

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Solution. On a d'une part

$$\begin{aligned} \int_0^A dx \int_0^A e^{-xy} \sin x \, dy &= \int_0^A \frac{\sin x}{x} (1 - e^{-Ax}) dx \\ &\longrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \end{aligned}$$

lorsque $A \longrightarrow +\infty$ puisque, par convergence dominée,

$$\int_0^A \frac{\sin x}{x} e^{-Ax} dx \longrightarrow 0.$$

D'autre part, en intégrant par parties par rapport à x ,

$$\begin{aligned} \int_0^A dy \int_0^A e^{-xy} \sin x \, dx &= \int_0^A \frac{1 - e^{-Ay}(\cos A - y \sin A)}{1 + y^2} dy \\ &\longrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

puisque, encore par convergence dominée,

$$\int_0^A \frac{\cos A - y \sin A}{1 + y^2} e^{-Ay} dy \longrightarrow 0$$

lorsque $A \longrightarrow +\infty$.

12. Déterminer les valeurs de p pour lesquelles l'intégrale

$$\int_{\|\mathbf{x}\|_2 > 1} \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{p/2}} d\lambda_3$$

est convergente.

Solution. En passant aux coordonnées sphériques

$$x_1 = r \cos \theta_1 \sin \theta_2, \quad x_2 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2, \quad x_3 = r \cos \theta_2$$

qui effectuent un difféomorphisme de classe C^∞ entre

$$]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\times]0, \pi[$$

et l'espace privé du demi-plan

$$\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_2 = x_3 = 0, x_1 \leq 0\}$$

et dont le jacobien vaut $r^2 \sin \theta_2$, on obtient

$$\int_{\|\mathbf{x}\|_2 > 1} \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{p/2}} d\lambda_3 = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \int_0^{\pi} \sin \theta_2 d\theta_2 \int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^{p-2}} = \frac{4\pi}{p-3}$$

si $p > 3$ (et $+\infty$ autrement).

12 Applications

1. Soit $f \in \mathcal{L}_{2\pi}^1$. Montrer que

$$\lim_{|k| \rightarrow +\infty} c_k(f) = 0.$$

Solution. Si f est continue sur $[-\pi, \pi[$, elle est de carré intégrable sur $[-\pi, \pi[$. La série $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2$ est donc convergente. En particulier,

$$\lim_{|k| \rightarrow +\infty} c_k(f) = 0.$$

Dans le cas général, soient $\epsilon > 0$ arbitraire et g une fonction continue sur $[-\pi, \pi[$ telle que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f - g| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Alors

$$\begin{aligned} |c_k(f)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (f(t) - g(t)) e^{-ikt} dt \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(t) e^{-ikt} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f - g| + |c_k(g)| < \epsilon \end{aligned}$$

dès que $|k|$ est assez grand.

2. Soit $f \in \mathcal{L}_{2\pi}^1$ une fonction à variation bornée sur $[-\pi, \pi]$. Montrer que

$$|c_k(f)| \leq \frac{\text{var}(f, [-\pi, \pi])}{4k}.$$

Solution. On a

$$\begin{aligned} 2c_k(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(f(t) - f\left(t - \frac{\pi}{k}\right) \right) e^{-ikt} dt, \\ 2c_k(f) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(f\left(t - \frac{\pi}{k}\right) - f\left(t - 2\frac{\pi}{k}\right) \right) e^{-ikt} dt, \\ &\quad \dots, \\ 2c_k(f) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(f\left(t - (2k-1)\frac{\pi}{k}\right) - f\left(t - (2k)\frac{\pi}{k}\right) \right) e^{-ikt} dt. \end{aligned}$$

Donc

$$4kc_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{j=0}^{2k-1} (-1)^j \left(f\left(t - j\frac{\pi}{k}\right) - f\left(t - (j+1)\frac{\pi}{k}\right) \right) e^{-ikt} dt$$

et

$$|4kc_k(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{j=0}^{2k-1} \left| f\left(t - j\frac{\pi}{k}\right) - f\left(t - (j+1)\frac{\pi}{k}\right) \right| dt \leq \text{var}(f, [-\pi, \pi]).$$

3. Développer la fonction $f(x) = \pi^2 - x^2$ en une série trigonométrique sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. En déduire la valeur des sommes

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}.$$

Solution. On a

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (\pi^2 - x^2) dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

et, si $k \neq 0$,

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (\pi^2 - x^2) e^{-ikx} dx = (-1)^{k+1} \frac{2}{k^2}$$

en intégrant par parties deux fois. La série de Fourier obtenue,

$$\frac{2\pi^2}{3} + \sum_{k \neq 0} (-1)^{k+1} \frac{2}{k^2} e^{ikx},$$

étant absolument convergente, sa somme est la fonction continue qui l'a engendrée :

$$\pi^2 - x^2 = \frac{2\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{4}{k^2} \cos kx \quad \text{si} \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

En particulier, faisant $x = 0$ puis $x = \pi$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

L'identité de Parseval implique d'autre part

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

4. Développer la fonction $f(x) = x$ en une série trigonométrique sur l'intervalle $(-\pi, \pi)$. En déduire la valeur des sommes

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

Solution. On a

$$c_0(f) = 0 \quad \text{et} \quad c_k(f) = \frac{i(-1)^{k+1}}{k} \quad \text{si } k \neq 0.$$

Le théorème de Dirichlet étant applicable,

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin kx \quad \text{si } -\pi < x < \pi.$$

Choisissant $x = \pi/2$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Remplaçant x par $\pi - x$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{si } 0 < x < 2\pi.$$

5. Soient $f \in \mathcal{L}_{2\pi}^1$ une fonction réelle et

$$S(f)(x) = \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$$

sa série de Fourier écrite sous « forme réelle ». Quelle est l'expression intégrale des coefficients ? Que devient l'identité de Parseval ?

Solution. En utilisant l'identité d'Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

on trouve

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \sin kt \, dt$$

(y compris pour $a_0(f)$) et

$$\frac{1}{2}a_0(f)^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k(f)^2 + b_k(f)^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f|^2.$$

6. Soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ une fonction indéfiniment dérivable à support compact. Montrer que, quel que soit $N \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \xi^N \hat{f}(\xi) = 0.$$

En déduire que, si $f \in \mathcal{L}_\mathbb{C}^1(\mathbb{R})$,

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

Solution. En intégrant par parties sur un intervalle compact plus grand que le support de f , on obtient

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) \frac{e^{-i\xi t}}{-i\xi} dt \\ &= \dots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(N+1)}(t) \frac{e^{-i\xi t}}{(-i\xi)^{(N+1)}} dt \end{aligned}$$

de telle sorte que

$$\left| \xi^N \hat{f}(\xi) \right| \leq \frac{1}{|\xi|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f^{(N+1)}(t) \right| dt.$$

Dans le cas général, on peut supposer f réelle. Soient $f_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ des fonctions telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_1 = 0.$$

Alors

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{f}_n(\xi).$$

Donc, on aura

$$|\hat{f}(\xi)| \leq |\hat{f}(\xi) - \hat{f}_n(\xi)| + |\hat{f}_n(\xi)| < \epsilon$$

en choisissant d'abord n puis, n fixé, $|\xi|$ suffisamment grands.

7. Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$f(x) = e^{-|x|}.$$

En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \xi x}{1 + \xi^2} d\xi.$$

Solution. On a, si $\xi \neq 0$,

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-i\xi t} dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos \xi t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\xi} \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin \xi t dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\xi^2} \left(1 - \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos \xi t dt \right).\end{aligned}$$

en intégrant par parties deux fois. On en déduit que

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 + \xi^2}.$$

Cette transformée de Fourier étant intégrable, la formule d'inversion de Fourier s'applique et donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \xi x}{1 + \xi^2} d\xi = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}.$$

8. Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$f(x) = \mathbb{I}_{[-1,1]}(x).$$

En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

Solution. Un calcul simple donne

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-i\xi x} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \xi}{\xi}$$

et la relation de Parseval conduit à

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

9. Calculer la convolution $\mathbb{I}_{[-1,1]} * \mathbb{I}_{[-1,1]}$ et vérifier l'équation $\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$ dans ce cas.

Solution. En distinguant suivant les valeurs de x , on obtient

$$\mathbb{I}_{[-1,1]} * \mathbb{I}_{[-1,1]}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 \mathbb{I}_{[x-1, x+1]}(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (2 - |x|) \mathbb{I}_{[-2,2]}(x).$$

La relation $\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$ s'écrit ici

$$\frac{1 - \cos 2\xi}{\pi \xi^2} = \frac{2 \sin^2 \xi}{\pi \xi^2}.$$

10. Montrer que si $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R})$ on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) g(x) dx.$$

Solution. Lorsque $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R})$, le théorème de Fubini est applicable et donne

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \hat{g}(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{-ixy} dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) dy \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iyx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) g(y) dy. \end{aligned}$$

Dans le cas général, soient $f_A = f \mathbb{I}_{[-A,A]}$ et $g_A = g \mathbb{I}_{[-A,A]}$. Alors

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \hat{g}(x) dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_A(x) \hat{g}_A(x) dx \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_A(x) g_A(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) g(x) dx. \end{aligned}$$

11. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ une fonction continue telle que

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(k)| < +\infty.$$

Supposons que $\text{supp}(\hat{f}) = [\pi, \pi]$. Montrer que

$$c_k(\hat{f}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(-k).$$

En déduire la formule d'interpolation suivante

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(k) \frac{\sin \pi(x-k)}{\pi(x-k)}.$$

(le « théorème d'échantillonnage »). Que donne cette formule lorsque

$$\hat{f}(\xi) = (\pi - |\xi|)\mathbb{I}_{[-\pi, \pi]}(\xi)?$$

Solution. On a

$$\begin{aligned} c_k(\hat{f}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \hat{f}(t) e^{-ikt} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(-k). \end{aligned}$$

Par conséquent, en tout point de l'intervalle $[-\pi, \pi]$,

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(\hat{f}) e^{ik\xi} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(k) e^{-ik\xi}$$

et, en tout point de $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} f(k) e^{-ik\xi} e^{i\xi x} d\xi = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(k) \frac{\sin \pi(x-k)}{\pi(x-k)} \end{aligned}$$

en vertu du théorème de la convergence dominée. Si

$$\hat{f}(\xi) = (\pi - |\xi|)\mathbb{I}_{[-\pi, \pi]}(\xi),$$

on a

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{+\pi} (\pi - |\xi|) e^{i\xi x} d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos \pi x}{x^2}$$

de telle sorte que la formule est applicable et donne

$$\frac{1 - \cos \pi x}{x^2} = \frac{\pi^2}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k \neq 0} \frac{1 - (-1)^k}{k^2} \frac{\sin \pi(x-k)}{\pi(x-k)}.$$