

# ОБ ОЦЕНКАХ ХЕРША–ПЭЙНА–ШИФФЕРА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЗАДАЧИ СТЕКЛОВА

АЛЕКСАНДР ЖИРУАР, ИОСИФ ПОЛТЕРОВИЧ

Аннотация. В работе доказывается точность изопериметрического неравенства Херша–Пэйна–Шиффера для  $n$ -ного ненулевого собственного значения задачи Стеклова на ограниченной односвязной плоской области при всех  $n \geq 1$ . Равенство достигается в пределе для семейства односвязных областей, вырождающихся в несвязное объединение  $n$  одинаковых кругов. Аналогичные результаты получены для произведения двух последовательных собственных значений. Мы также приводим новое доказательство неравенства Херша–Пэйна–Шиффера при  $n = 2$ , из которого следует, что в этом случае оно строгое.

## 1. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

**1.1. Задача Стеклова.** Рассмотрим ограниченную односвязную плоскую область  $\Omega$  с липшицевой границей. Пусть  $\rho \in L^\infty(\partial\Omega)$  — неотрицательная функция на границе, тождественно не равная нулю. Задача на собственные значения с *граничными условиями Стеклова* определяется следующими соотношениями [29]:

$$(1.1.1) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в области } \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} u = \sigma \rho u & \text{на границе } \partial\Omega, \end{cases}$$

где  $\frac{\partial}{\partial \nu}$  — нормальная производная вдоль границы. Существуют различные физические интерпретации задачи Стеклова [3, 26]. В частности, она описывает колебания свободной мембраны, у которой вся масса  $M(\Omega)$  сосредоточена на границе  $\partial\Omega$  и распределена на ней с плотностью  $\rho$ :

$$(1.1.2) \quad M(\Omega) = \int_{\partial\Omega} \rho(s) ds.$$

Если  $\rho \equiv 1$ , то масса  $M(\Omega)$  в точности равна *длине границы* области  $\Omega$ .

Задача Стеклова имеет дискретный спектр, и собственные значения

$$0 = \sigma_0 < \sigma_1(\Omega) \leq \sigma_2(\Omega) \leq \sigma_3(\Omega) \leq \dots \nearrow \infty$$

---

Работа выполнена при поддержке канадского Национального исследовательского совета по науке и инженерии (NSERC) и квебекского Фонда естественно-научных и технологических исследований (FQRNT).

удовлетворяют следующим вариационным формулам [3, стр. 95 и стр. 103]:

$$(1.1.3) \quad \sigma_n(\Omega) = \inf_{E_n} \sup_{0 \neq u \in E_n} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dz}{\int_{\partial\Omega} u^2 \rho ds}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Точная нижняя грань здесь берется по всем  $n$ -мерным подпространствам  $E_n$  соболевского пространства  $H^1(\Omega)$ , ортогональным константам на  $\partial\Omega$ , т.е.  $\int_{\partial\Omega} u(s)\rho(s) ds = 0$  для всех  $u \in E_n$ . Заметим, что как и в случае задачи Неймана, спектр задачи Стеклова всегда начинается с нулевого собственного значения, соответствующего собственным функциям  $u = \text{const}$ .

Если плотность  $\rho$  тождественно равна единице, то собственные функции и собственные значения задачи Стеклова совпадают, соответственно, с собственными функциями и собственными значениями *оператора Дирихле-Неймана*

$$\Gamma : H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega),$$

задаваемого формулой

$$\Gamma f = \frac{\partial}{\partial\nu}(\mathcal{H}f).$$

Здесь  $\mathcal{H}f$  — гармоническое расширение функции  $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  во внутренность области  $\Omega$ . Если граница области достаточно гладкая, то оператор Дирихле-Неймана является псевдодифференциальным оператором первого порядка [31, стр. 37–38]. Он имеет множество важных приложений, в частности, к изучению обратных задач [32].

## 1.2. Оценки сверху на собственные значения задачи Стеклова.

Целью настоящей работы является изучение следующего вопроса:

**Вопрос 1.2.1.** *Насколько большим может быть  $n$ -ное собственное значение задачи Стеклова на ограниченной односвязной плоской области фиксированной массы?*

Для  $n = 1$  ответ на этот вопрос был получен Вайнстоком [34] в 1954-м году. Вайнсток доказал, что

$$(1.2.2) \quad \sigma_1(\Omega) M(\Omega) \leq 2\pi,$$

причем равенство достигается на круге с постоянной плотностью на границе. Заметим, что на единичном круге  $\mathbb{D}$  с единичной плотностью на границе, первое собственное значение Стеклова равно единице и имеет кратность два:  $\sigma_1(\mathbb{D}) = \sigma_2(\mathbb{D}) = 1$ . Неравенство Вайнстока послужило отправной точкой для многих работ [2, 18, 4, 10, 11]. Недавний обзор результатов на эту тему содержится в статье [1].

В 1974-м году, Херш, Пэйн и Шиффер [20, стр. 102] доказали следующие неравенства:

$$(1.2.3) \quad \sigma_m(\Omega) \sigma_n(\Omega) M(\Omega)^2 \leq \begin{cases} (m+n-1)^2 \pi^2 & \text{если } m+n \text{ нечетно,} \\ (m+n)^2 \pi^2 & \text{если } m+n \text{ четно.} \end{cases}$$

В частности, при  $m = n$  и  $m = n + 1$  мы получаем:

$$(1.2.4) \quad \sigma_n(\Omega)M(\Omega) \leq 2\pi n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$(1.2.5) \quad \sigma_n(\Omega)\sigma_{n+1}(\Omega)M(\Omega)^2 \leq 4\pi^2 n^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

**1.3. Основные результаты.** Легко видеть, что при  $n = 1$ , неравенства (1.2.4) и (1.2.5) являются равенствами на круге с постоянной плотностью  $\rho$  на границе. В работе [20] отмечается, что неравенства (1.2.3) вряд ли являются точными для всех  $m$  и  $n$ . Это утверждение, скорее всего, справедливо. В то же время, оказывается, что для  $m = n$  и  $m = n + 1$ , неравенства (1.2.3) *точны* при всех  $n \geq 1$ .

**Теорема 1.3.1.** *Существует семейство односвязных ограниченных областей  $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$  с липшицевой границей и плотностью  $\rho \equiv 1$  на ней, вырождающихся в несвязное объединение  $n$  одинаковых кругов при  $\varepsilon \rightarrow 0+$  таким образом, что*

$$(1.3.2) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \sigma_n(\Omega_\varepsilon)M(\Omega_\varepsilon) = 2\pi n, \quad n = 2, 3, \dots$$

и

$$(1.3.3) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \sigma_n(\Omega_\varepsilon)\sigma_{n+1}(\Omega_\varepsilon)M(\Omega_\varepsilon)^2 = 4\pi^2 n^2, \quad n = 2, 3, \dots$$

В частности, неравенства Херша–Пэйна–Шиффера (1.2.4) и (1.2.5) *точны* при всех  $n \geq 1$ .

*Замечание 1.3.4.* Как будет показано в разделе 2.2, равенства (1.3.2) и (1.3.3) верны отнюдь не для всех семейств областей, вырождающихся в несвязное объединение  $n$  одинаковых дисков.

Было бы интересно проверить, влечет ли любое из соотношений (1.3.2) и (1.3.3) сходимость (в определенном смысле) семейства  $\Omega_\varepsilon$  к несвязному объединению  $n$  одинаковых кругов при  $n \geq 2$ .

*Замечание 1.3.5.* При  $\rho \equiv 1$ , из оценки (1.2.4) и стандартного изопериметрического неравенства в  $\mathbb{R}^2$  следует неравенство

$$\sigma_n(\Omega) \sqrt{\text{Area}(\Omega)} < n\sqrt{\pi}, \quad n \geq 2.$$

При условии, что *площадь* области  $\text{Area}(\Omega)$  фиксирована, точная оценка на  $\sigma_n$ ,  $n \geq 2$ , неизвестна (см. [16, Открытая проблема 25]).

Теорема 1.3.1 дает практически исчерпывающий ответ на Вопрос 1.2.1. Остается лишь проверить, являются ли неравенства (1.2.4) *строгими* при всех  $n \geq 2$ . Мы полагаем, что это верно. С помощью метода, предложенного в работе [14], мы доказываем этот результат для  $n = 2$ .

**Теорема 1.3.6.** *Неравенство (1.2.4) является строгим при  $n = 2$ :*

$$(1.3.7) \quad \sigma_2(\Omega)M(\Omega) < 4\pi.$$

Доказательство Теоремы 1.3.6 использует теорему Римана о конформном отображении, которая также применяется в работах [30, 34, 14]. Отметим, что исходное доказательство оценок (1.2.3) основано на совершенно других идеях.

**1.4. Сравнение с задачами Дирихле и Неймана.** Оценки (1.2.2) и (1.3.7) интересно сравнить с аналогичными результатами для собственных значений задач с граничными условиями Дирихле и Неймана. Эти задачи описывают колебания однородной мембраны, в поэтому ее масса определяется *площадью*.

Пусть  $0 < \lambda_1(\Omega) \leq \lambda_2(\Omega) \leq \dots$  и  $0 = \mu_0 < \mu_1(\Omega) \leq \mu_2(\Omega) \leq \dots$  — собственные значения задач Дирихле и Неймана, соответственно, на ограниченной плоской области  $\Omega$ . Имеют место следующие оценки:

- *Неравенство Фабера–Крана:*  $\lambda_1(\Omega)\text{Area}(\Omega) \geq \pi \lambda_1(\mathbb{D})$  (сформулировано Рэлеем в [27] в качестве гипотезы, доказано в [12] и [22]; более слабый вариант этой оценки был получен Курантом [7]).
- *Неравенство Крана:*  $\lambda_2(\Omega)\text{Area}(\Omega) > 2\pi \lambda_1(\mathbb{D})$  ([23]). Этот результат имеет интересную историю (см. [1, стр. 110]). Равенство достигается в пределе для семейства областей, вырождающихся в несвязное объединение двух одинаковых кругов.
- *неравенство Сегё–Вайнбергера:*  $\mu_1(\Omega)\text{Area}(\Omega) \leq \pi \mu_1(\mathbb{D})$ . Эта оценка была доказана Сегё [30] для односвязных плоских областей. Вайнбергер [33] обобщил ее на произвольные области в любой размерности.
- Если область  $\Omega$  односвязна, то  $\mu_2(\Omega)\text{Area}(\Omega) \leq 2\pi \mu_1(\mathbb{D})$ . Это неравенство было доказано в недавней работе авторов и Н. Надирашвили [14]. Равенство достигается в пределе для семейства областей, вырождающихся в несвязное объединение двух одинаковых кругов. Было бы интересно обобщить эту оценку на случай неодносвязных областей.

Для более высоких собственных значений Дирихле и Неймана, точные оценки такого вида неизвестны, и аналогия со случаем задачи Стеклова не прослеживается. Как отмечалось в [14, Замечание 1.2.8], несвязное объединение  $n$  одинаковых кругов не может максимизировать величину  $\mu_n(\Omega)\text{Area}(\Omega)$  для достаточно больших  $n$ , поскольку это противоречит закону Вейля. Это верно также и для задачи минимизации  $\lambda_n(\Omega)\text{Area}(\Omega)$ . В частности, имеется гипотеза, подтвержденная численными вычислениями, что минимум  $\lambda_3(\Omega)\text{Area}(\Omega)$  достигается на одном круге [35, 6].

**1.5. План работы.** В части 2 настоящей работы мы доказываем Теорему 1.3.1. Мы также строим семейство областей, вырождающихся в несвязное объединение двух кругов так, что все их собственные значения стремятся к нулю. Это явление довольно удивительно и не имеет аналогов для спектров задач Дирихле или Неймана. Последующие части

работы посвящены доказательству Теоремы 1.3.6. В части 3 мы применяем к задаче Стеклова метод “сложенных и перераспределенных мер”, предложенный в статье [25] и развитый в [14]. В части 4 мы используем топологические и аналитические идеи, чтобы построить двумерное пространство тест-функций для вариационного представления (1.1.3) второго собственного значения задачи Стеклова. Это пространство играет впоследствии ключевую роль в доказательстве неравенства (1.3.7).

## 2. МАКСИМИЗАЦИЯ И “КОЛЛАПС” СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЗАДАЧИ СТЕКЛОВА

**2.1. Доказательство Теоремы 1.3.1.** Начнем со случая  $n = 2$ . Для каждого  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{10})$ , рассмотрим односвязную плоскую область

$$(2.1.1) \quad \Omega_\varepsilon = \{|z - 1 + \varepsilon| < 1\} \cup \{|z + 1 - \varepsilon| < 1\} \subset \mathbb{C}.$$

При  $\varepsilon \rightarrow 0+$ , область  $\Omega_\varepsilon$  вырождается в несвязное объединение двух

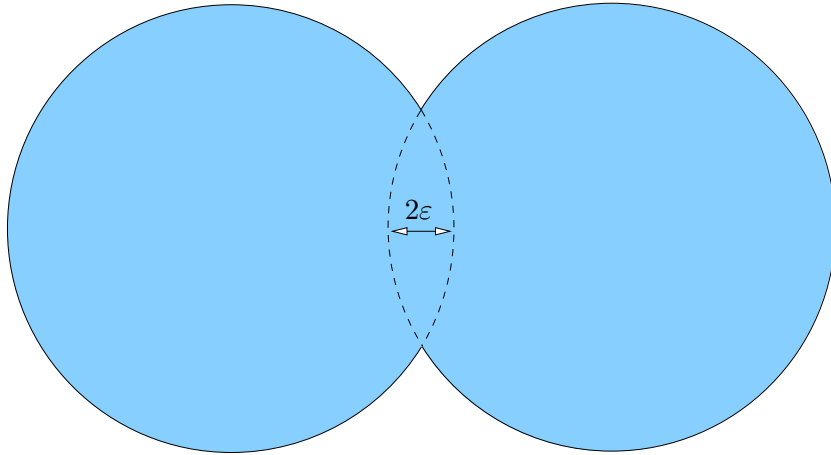


Рис. 1. Область  $\Omega_\varepsilon$  при  $n = 2$

одинаковых единичных кругов.

**Лемма 2.1.2.** *Допустим, что  $\rho \equiv 1$  на  $\partial\Omega_\varepsilon$  для любого  $\varepsilon$ . Тогда*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \sigma_2(\Omega_\varepsilon) = 1.$$

Напомним, что если  $\rho \equiv 1$ , то  $\sigma_1(\mathbb{D}) = \sigma_2(\mathbb{D}) = 1$ .

*Замечание 2.1.3.* Это утверждение не назовешь неожиданным, но в то же время оно не следует напрямую из общих результатов о сходимости собственных значений. Сложность заключается в том, что семейство  $\Omega_\varepsilon$  не является *равномерно* липшицевым. Это эквивалентно тому, что семейство  $\Omega_\varepsilon$  не удовлетворяет равномерному условию конуса (см. [8, стр. 49] или [17, стр. 53]). Иными словами, невозможно выбрать константу Липшица равномерно по  $z \in \partial\Omega_\varepsilon$  и по  $\varepsilon$  *одновременно*. Действительно, легко

видеть, что константа Липшица становится неограниченной около точки  $z = 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Предельное поведение собственных значений задачи Стеклова в такой ситуации может быть априори весьма неожиданным, см. раздел 2.2.

*Доказательство Леммы 2.1.2.* Из неравенства (1.2.4) следует, что

$$\sigma_2(\Omega_\varepsilon)M(\Omega_\varepsilon) \leq 4\pi$$

для всякого  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{10})$ . Поскольку  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} M(\Omega_\varepsilon) = 4\pi$ , то

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0+} \sigma_2(\Omega_\varepsilon) \leq 1.$$

Остается проверить, что

$$(2.1.4) \quad \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0+} \sigma_2(\Omega_\varepsilon) \geq 1.$$

Ввиду Замечания 2.1.3, для того, чтобы применить стандартные результаты о сходимости собственных значений, нам необходимо “устранить” особенность в нуле у семейства областей  $\Omega_\varepsilon$ . Введем обозначение:  $\Omega'_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \cap \{\Re z < 0\}$ . Рассмотрим вспомогательную задачу со смешанными граничными условиями на области  $\Omega'_\varepsilon$ : наложим условия Неймана на интервале  $\Omega_\varepsilon \cap \{\Re z = 0\}$  и оставим условия Стеклова на  $\partial\Omega'_\varepsilon \cap \partial\Omega_\varepsilon$ . Пусть  $0 = \sigma_0^N(\Omega'_\varepsilon) < \sigma_1^N(\Omega'_\varepsilon) \leq \sigma_2^N(\Omega'_\varepsilon) \dots$  — спектр этой смешанной задачи (она естественным образом возникает при изучении колебаний жидкости, см. [13]). Добавление условий Неймана внутри области увеличивает пространство допустимых тест-функций. Поэтому, согласно стандартному принципу монотонности, [3, стр. 100], собственные значения уменьшаются. Следовательно,

$$\sigma_2(\Omega_\varepsilon) \geq \sigma_1^N(\Omega'_\varepsilon),$$

и, тем самым, чтобы доказать (2.1.4), достаточно проверить, что

$$(2.1.5) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \sigma_1^N(\Omega'_\varepsilon) = 1.$$

Семейство областей  $\Omega'_\varepsilon$  сходится к  $\mathbb{D}$  в дополнительной топологии Хаусдорфа (см. [5, стр. 101]) при  $\varepsilon \rightarrow 0+$ . Более того, поскольку области  $\Omega'_\varepsilon$  равномерно липшицевы одновременно и по  $z \in \partial\Omega'_\varepsilon$ , и по  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{10})$ , операторы расширения  $H^1(\Omega_\varepsilon) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^2)$  равномерно ограничены [5, р. 198]. Аналогичным образом, нормы операторов ограничения на границу тоже равномерно ограничены [9]. Заметим, что часть границы  $\partial\Omega'_\varepsilon$ , совпадающая с  $\Omega_\varepsilon \cap \{\Re z = 0\}$ , на которой задано условие Неймана, вырождается в точку  $z = 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0+$ . Следовательно, из отношения Рэлея для смешанной задачи Неймана–Стеклова [13, стр. 673]) немедленно вытекает равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \sigma_n^N(\Omega'_\varepsilon) = \sigma_n(\mathbb{D}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Полагая  $n = 1$ , мы получаем соотношение (2.1.5). Лемма доказана.  $\square$

Завершим доказательство Теоремы 1.3.1. Из оценки (1.2.5) и очевидного неравенства  $\sigma_{n+1}(\Omega_\varepsilon) \geq \sigma_n(\Omega_\varepsilon)$  следует, что (1.3.2) влечет (1.3.3). Следовательно, достаточно доказать соотношение (1.3.2). При  $n = 2$  оно следует из Леммы 2.1.2. При  $n > 2$  доказательство аналогично. Пусть  $\Omega_\varepsilon$  — объединение  $n$  кругов радиуса  $1 + \varepsilon$  с центрами в точках  $z = 2k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ . Сделаем разрезы вдоль вертикальных линий  $\Re z = 2k - 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  и наложим условия Неймана вдоль этих разрезов. Мы получим  $n$  вспомогательных смешанных задач двух видов: два крайних круга имеют единственный разрез (как и выше, обозначим соответствующие области символом  $\Omega'_\varepsilon$ ), а промежуточные круги имеют два разреза — один слева и другой справа (соответствующие области обозначим  $\Omega''_\varepsilon$ ). Спектры каждой из  $n$  вспомогательных граничных задач начинаются с нулевого собственного значения. Используя, как и выше, принцип монотонности, мы получаем:

$$\sigma_n(\Omega_\varepsilon) \geq \min(\sigma_1^N(\Omega'_\varepsilon), \sigma_1^N(\Omega''_\varepsilon)).$$

Доказывая, как и в случае  $n = 2$ , сходимость собственных значений вспомогательных задач, мы приходим к равенствам:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \sigma_1^N(\Omega'_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \sigma_1^N(\Omega''_\varepsilon) = 1.$$

Тем самым,  $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0+} \sigma_n(\Omega_\varepsilon) \geq 1$ . Поскольку  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} M(\Omega_\varepsilon) = 2\pi n$ , из неравенства (1.2.4) следует, что  $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0+} \sigma_n(\Omega_\varepsilon) \leq 1$ . Таким образом,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \sigma_n(\Omega_\varepsilon) = 1$ . Теорема 1.3.1 доказана.

**2.2. “Коллапс” спектра задачи Стеклова.** Семейство областей  $\Omega_\varepsilon$ , построено путем “растаскивания” кругов, в то время как геометрически более естественным кажется соединить их маленькими перешейками, исчезающими при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Однако, как показывает приведенный ниже пример, предельное поведение собственных значений задачи Стеклова при таком вырождении областей может оказаться весьма неожиданным.

Как и ранее, положим  $\rho \equiv 1$ . Пусть  $\Sigma_\varepsilon = \mathbb{D}_1 \cup P_\varepsilon \cup \mathbb{D}_2$  — область,

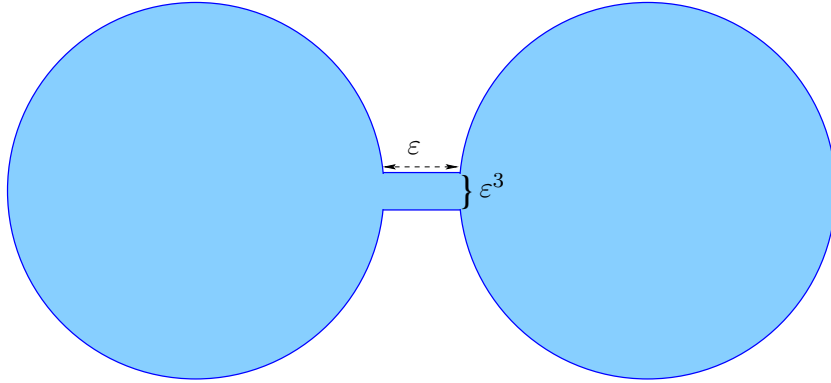


Рис. 2. Область  $\Sigma_\varepsilon$

полученная соединением двух единичных кругов  $\mathbb{D}_1$  и  $\mathbb{D}_2$  при помощи прямоугольного перешейка  $P_\varepsilon$  длины  $\varepsilon$  и ширины  $\varepsilon^3$  (см. Рис. 2). Меньшие стороны  $P_\varepsilon$  являются хордами граничных окружностей  $\partial\mathbb{D}_1$  и  $\partial\mathbb{D}_2$ . То, что ширина перешейка стремится к нулю гораздо быстрее длины, имеет принципиальное значение. Для простоты предположим, что круги и перешеек расположены таким образом, что область  $\Sigma_\varepsilon$  симметрична относительно обеих осей координат. Легко видеть, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  мы получаем в пределе удивительное соотношение:

$$(2.2.1) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sigma_n(\Sigma_\varepsilon) = 0$$

для всех  $n = 1, 2, \dots$ . Действительно, рассмотрим попарно ортогональные тест-функции, зануляющиеся на множестве  $(\mathbb{D}_1 \cup \mathbb{D}_2) \setminus P_\varepsilon$  и равные  $\sin \frac{2\pi nx}{\varepsilon}$  внутри перешейка  $P_\varepsilon$ . Тогда, для всякого  $n$ , градиент такой тест-функции имеет порядок  $n/\varepsilon$ , площадь  $P_\varepsilon$  равна  $\varepsilon^4$ , а длина “внешней” части границы  $\partial P_\varepsilon \cap \partial \Sigma_\varepsilon$  равна  $2\varepsilon$ . Заметим также, что построенные тест-функции склеиваются непрерывным образом вдоль меньших сторон прямоугольника  $P_\varepsilon$ , и поэтому принадлежат соболевскому пространству  $H^1(\Sigma_\varepsilon)$ . Тем самым, для каждого фиксированного  $n$ , соответствующее отношение Рэля имеет порядок  $n^2\varepsilon$  и стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , откуда следует формула (2.2.1).

Похожие конструкции использовались ранее при изучении граничных задач с условиями Неймана (см. [21, 15] и работы, цитируемые в этих статьях). Однако, собственные значения области  $\Sigma_\varepsilon$  с условиями Неймана сходятся к соответствующим собственным значениям несвязного объединения двух кругов при  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Полный “коллапс” спектра задачи Стеклова, наблюдающийся в приведенном выше примере, связан с тем, что в этом случае в знаменателе отношения Рэля стоит интеграл по границе. Заметим, что периметр перешейка  $P_\varepsilon$  стремится к нулю гораздо медленнее, чем его площадь и, поэтому, для каждого фиксированного  $n$ , числитель в отношении Рэля стремится к нулю намного быстрее, чем знаменатель.

В последующих частях работы мы доказываем Теорему 1.3.6.

### 3. СЛОЖЕННЫЕ И ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕННЫЕ МЕРЫ

**3.1. Конформное отображение на круг.** Пусть  $\Omega$  — ограниченная односвязная плоская область с липшицевой границей. Как и выше,  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  обозначает открытый единичный круг. По теореме Римана о конформном отображении (см. [31, стр. 342]), существует конформный диффеоморфизм  $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ , продолжающийся до гомеоморфизма  $\overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\Omega}$  (чтобы не усложнять обозначения, здесь и далее мы обозначаем конформное отображение и его продолжение вплоть до границы одним и тем же символом). Пусть  $ds$  — мера длины на границе  $\partial\Omega$ , а  $d\mu$



— прообраз меры  $\rho(s)ds$  под действием отображения  $\phi$ . Иными словами,

$$(3.1.1) \quad \int_{\mathcal{O}} d\mu = \int_{\phi(\mathcal{O})} \rho(s) ds$$

для любого открытого подмножества  $\mathcal{O} \subset S^1$ . Принимая во внимание соотношение (3.1.1) и используя конформную инвариантность интеграла Дирихле, мы можем переписать вариационную формулу (1.1.3) для  $\sigma_2$  в следующем виде:

$$(3.1.2) \quad \sigma_2(\Omega) = \inf_E \sup_{0 \neq u \in E} \frac{\int_{\mathbb{D}} |\nabla u|^2 dz}{\int_{S^1} u^2 d\mu}.$$

Точная нижняя грань здесь берется по всем двумерным подпространствам  $E \subset H^1(\mathbb{D})$ , таким что  $\int_{S^1} u d\mu = 0$  для любого  $u \in E$ .

**3.2. Гиперболические шапочки.** Пусть  $\gamma$  — геодезическая на плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре в круге. Иными словами,  $\gamma$  есть либо диаметр круга, либо дуга окружности, ортогональная абсолюте  $S^1 = \partial\mathbb{D}$ . Компонента связности множества  $\mathbb{D} \setminus \gamma$  называется *гиперболи-*

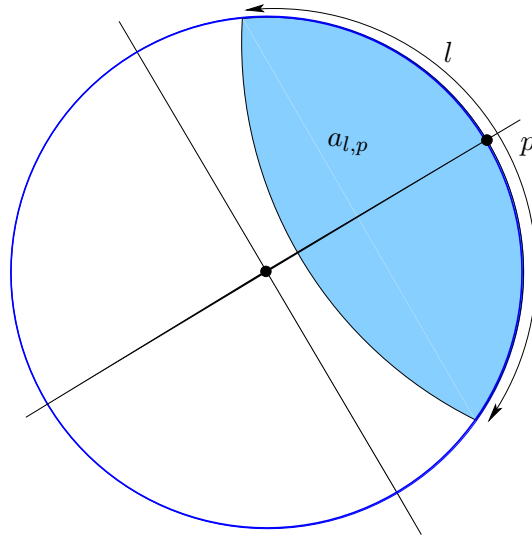


Рис. 3. Гиперболическая шапочка  $a_{l,p}$

*ческой шапочкой* [14]. Для каждой точки  $p \in S^1$  и произвольного числа  $l \in (0, 2\pi)$ , мы можем однозначно определить гиперболическую шапочку  $a_{l,p}$  следующим условием: дуга границы  $\partial a_{l,p} \cap S^1$  имеет длину  $l$  и ее центр находится в точке  $p$  (Рис. 3). Таким образом, можно отождествить пространство  $\mathcal{HC}$  всех гиперболических шапочек с цилиндром  $(0, 2\pi) \times S^1$ . Для каждой гиперболической шапочки  $a \in \mathcal{HC}$ , определим отображение  $\tau_a : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ , являющееся отражением относительно гиперболической геодезической, ограничивающей  $a$ . Иными словами,  $\tau_a$

— единственная нетривиальная конформная инволюция круга  $\mathbb{D}$ , оставляющая неподвижной каждую точку геодезической  $\partial a \cap \mathbb{D}$ . В частности,  $\tau_a(a) = \mathbb{D} \setminus \bar{a}$ .

Назовем *поднятием* функции  $u : \bar{a} \rightarrow \mathbb{R}$  функцию  $\tilde{u} : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$ , заданную соотношением

$$(3.2.1) \quad \tilde{u}(z) = \begin{cases} u(z) & \text{при } z \in \bar{a}, \\ u(\tau_a z) & \text{при } z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \bar{a}. \end{cases}$$

Заметим, что

$$(3.2.2) \quad \begin{aligned} \int_{S^1} \tilde{u} d\mu &= \int_{\partial a \cap S^1} u d\mu + \int_{\tau_a(\partial a) \cap S^1} u \circ \tau_a d\mu \\ &= \int_{\partial a \cap S^1} u (d\mu + \tau_a^* d\mu). \end{aligned}$$

Назовем меру

$$(3.2.3) \quad d\mu_a = \begin{cases} d\mu + \tau_a^* d\mu & \text{на } \partial a \cap S^1, \\ 0 & \text{на } S^1 \setminus \partial a \end{cases}$$

*сложенной мерой*. Формулу (3.2.2) можно переписать следующим образом:

$$\int_{S^1} \tilde{u} d\mu = \int_{S^1} u d\mu_a.$$

**3.3. Собственные функции на круге.** Для каждого вектора  $t \in \mathbb{R}^2$ , определим функцию  $X_t : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$ , равную скалярному произведению  $X_t(z) = z \cdot t$ ,  $z \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ . Пусть  $(e_1, e_2)$  — стандартный базис в  $\mathbb{R}^2$ . Тогда функции  $X_{e_1}$  и  $X_{e_2}$  образуют базис в первом собственном подпространстве задачи Стеклова на круге с единичной плотностью на границе. Метод Херша (см. [14, раздел 4.1]) позволяет нам предположить без ограничения общности, что центр масс меры  $d\mu$  расположен в нуле:

$$(3.3.1) \quad \int_{S^1} X_t d\mu = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^2.$$

Поворотом осей координат всегда можно добиться того, что

$$(3.3.2) \quad \int_{S^1} X_{e_1}^2 d\mu \geq \int_{S^1} X_t^2 d\mu, \quad \forall t \in S^1.$$

**3.4. Перераспределение меры.** Пусть  $a \in \mathcal{HC}$  — гиперболическая шапочка, а  $\psi_a : \mathbb{D} \rightarrow a$  — конформный диффеоморфизм. Следуя соглашению, принятому в разделе 3.1, продолжение этого диффеоморфизма до границы  $\overline{\mathbb{D}} \rightarrow \bar{a}$  мы тоже обозначаем символом  $\psi_a$ . Для каждого  $t \in \mathbb{R}^2$ , определим функцию  $u_a^t : \bar{a} \rightarrow \mathbb{R}$  по формуле

$$u_a^t(z) = X_t \circ \psi_a^{-1}(z) = t \cdot \psi_a^{-1}(z).$$

В доказательстве Леммы 4.1.1 будет использовано следующее вспомогательное утверждение.

**Лемма 3.4.1.** *Поднятие функции  $u_a^t$  не является гармонической функцией в круге  $\mathbb{D}$ .*

*Доказательство.* Допустим, что  $\tilde{u}_a^t$  — гармоническая функция. Тогда она гладкая, и поэтому, в соответствии с формулой (3.2.1), нормальная производная функции  $u_a^t$  должна равняться нулю в каждой точке  $p \in \partial a \cap \mathbb{D}$ . Легко проверить, что равенство нулю нормальной производной сохраняется при конформных преобразованиях. Следовательно, нормальная производная функции  $X_t = u_a^t \circ \psi_a$  зануляется на множестве  $\psi_a^{-1}(\partial a \cap \mathbb{D}) \subset S^1$ . В то же время, несложное вычисление показывает, что при  $s \neq \pm \frac{t}{|t|}$ ,  $\frac{\partial}{\partial n} X_t(s) \neq 0$ . Это противоречие завершает доказательство леммы.  $\square$

Пусть  $w_a^t \in C^\infty(\mathbb{D})$  — гармоническое расширение функции  $\tilde{u}_a^t|_{S^1}$ :

$$(3.4.2) \quad \begin{cases} \Delta w_a^t = 0 & \text{in } \mathbb{D}, \\ w_a^t = \tilde{u}_a^t & \text{on } S^1, \end{cases}$$

которое определяется однозначным образом. Функции  $w_a^t$  будут использованы ниже в качестве тест-функций в вариационной формуле (3.1.2). Заметим, что

$$(3.4.3) \quad \int_{S^1} \tilde{u}_a^t d\mu = \int_{S^1} u_a^t d\mu_a = \int_{S^1} X_t \psi_a^* d\mu_a.$$

Назовем меру

$$(3.4.4) \quad d\nu_a = \psi_a^* d\mu_a$$

перераспределенной мерой на  $S^1$ .

Назовем семейство конформных преобразований  $\{\psi_a : \mathbb{D} \rightarrow a\}_{a \in \mathcal{HC}}$  непрерывным, если отображение из множества  $(0, 2\pi) \times S^1 \times \mathbb{D}$  в круг, определенное по формуле  $(l, p, z) \mapsto \psi_{a_{l,p}}(z)$ , непрерывно. Следующая лемма описывает поведение перераспределенной меры  $d\nu_a$  при двух “противоположных” вырождениях гиперболической шапочки  $a$ : в точку  $p \in S^1$  и во весь круг.

**Лемма 3.4.5.** *Существует непрерывное семейство конформных диффеоморфизмов  $\{\psi_a : \mathbb{D} \rightarrow a\}_{a \in \mathcal{HC}}$ , такое что для всех гиперболических шапочек  $a \in \mathcal{HC}$  и всех векторов  $t \in \mathbb{R}^2$ ,*

$$(3.4.6) \quad \int_{S^1} w_a^t d\mu = 0,$$

$$(3.4.7) \quad \lim_{a \rightarrow \mathbb{D}} d\nu_a = d\mu,$$

$$(3.4.8) \quad \lim_{a \rightarrow p} d\nu_a = R_p^* d\mu,$$

где  $w_a^t$  определяется по формуле (3.4.2),  $d\nu_a$  — перераспределенная мера, заданная соотношением (3.4.4), а  $R_p(x) = x - 2(x \cdot p)$  — симметрия относительно диаметра, перпендикулярного вектору  $p \in S^1$ .

Две последние формулы в Лемме 3.4.5 требуют некоторых пояснений. Как отмечалось в разделе 3.2, пространство  $\mathcal{HC}$  можно отождествить с цилиндром  $(0, 2\pi) \times S^1$ , и сходимость в  $\mathcal{HC}$  понимается в смысле обычной топологии на этом цилиндре. Сходимость мер понимается в смысле топологии, задаваемой нормой

$$(3.4.9) \quad \|d\nu\| = \sup_{f \in C(S^1), |f| \leq 1} \left| \int_{S^1} f d\nu \right|.$$

*Доказательство.* Мы приводим лишь схему доказательства, подробности можно найти в работе [14, раздел 2.5]. Рассмотрим произвольное непрерывное семейство конформных диффеоморфизмов  $\{\phi_a : \mathbb{D} \rightarrow a\}_{a \in \mathcal{HC}}$ , такое что  $\lim_{a \rightarrow \mathbb{D}} \phi_a = \text{id}$ . Отображение  $\psi_a$  определяется как композиция преобразования  $\phi_a$  с автоморфизмами круга, возникающими в методе Херша. В частности, соотношение (3.4.6) оказывается автоматически выполнено. При вырождении шапочки  $a$  в полный круг  $\mathbb{D}$ , конформные диффеоморфизмы  $\psi_a$  сходятся к тождественному преобразованию на  $\mathbb{D}$ , откуда следует равенство (3.4.7). Наконец, полагая  $n = 1$  в утверждении [14, Лемма 4.3.2], мы получаем формулу (3.4.8).  $\square$

Зафиксируем семейство конформных отображений,  $\psi_a$  определенных в Лемме 3.4.5. Заметим, что перераспределенная мера  $d\nu_a$  непрерывно меняется при вырождении гиперболической шапочки  $a$ . Это свойство будет использовано в топологической части доказательства Предложения 4.2.2.

#### 4. ПОСТРОЕНИЕ ТЕСТ-ФУНКЦИЙ

**4.1. Оценка отношения Рэля.** Из формулы (3.4.6) следует, что функции  $w_a^t$ , определенные соотношением (3.4.2), могут быть использованы в качестве тест-функций в вариационном представлении (3.1.2) собственного значения  $\sigma_2$ . Для каждой гиперболической шапочки  $a \in \mathcal{HC}$ , обозначим через

$$E_a = \{w_a^t \mid t \in \mathbb{R}^2\}.$$

двумерное пространство тест-функций.

**Лемма 4.1.1.** *Для всякой тест-функции  $w_a^t \in E_a$  имеет место неравенство*

$$\int_{\mathbb{D}} |\nabla w_a^t|^2 dz < 2\pi.$$

*Доказательство.* Поскольку функция  $w_a^t$  гармоническая, ее интеграл Дирихле строго меньше, чем у любой другой функции из пространства  $H_1(\mathbb{D})$  с теми же граничными значениями. Функция  $\tilde{u}_a^t$  не является гармонической по Лемме 3.4.1, и поскольку она непрерывна, она не может

совпадать с  $w_a^t$  в пространстве  $H^1(\mathbb{D})$ . Таким образом,

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{D}} |\nabla w_a^t|^2 dz &< \int_{\mathbb{D}} |\nabla \tilde{u}_a^t|^2 dz = \int_a |\nabla u_a^t|^2 dz + \int_{\mathbb{D} \setminus a} |\nabla (u_a^t \circ \tau_a)|^2 dz \\
 (4.1.2) \quad &= 2 \int_a |\nabla u_a^t|^2 dz = 2 \int_{\mathbb{D}} |\nabla X_t|^2 dz = 2 \underbrace{\sigma_1(\mathbb{D})}_1 \overbrace{\int_{S^1} X_t^2 d\theta}^{\pi} = 2\pi.
 \end{aligned}$$

Второе и третье равенства в этой формуле следуют из сохранения интеграла Дирихле при конформных преобразованиях плоских областей.  $\square$

Пусть  $t_1, t_2 \in S^1$  — два перпендикулярных вектора. Для всякой гиперболической шапочки  $a \in \mathcal{HC}$  мы имеем:

$$\begin{aligned}
 \int_{S^1} (w_a^{t_1})^2 d\mu &= \int_{S^1} (X_{t_1})^2 d\nu_a \\
 (4.1.3) \quad &\geq \frac{1}{2} \int_{S^1} \overbrace{(X_{t_1})^2 + (X_{t_2})^2}^1 d\nu_a = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \rho(s) ds.
 \end{aligned}$$

Действительно, первое равенство следует из (3.4.2) и (3.4.3), последнее равенство вытекает из (3.2.3) и (3.1.1), а неравенство посередине можно считать верным без ограничения общности (если оно неверно, поменяем местами  $t_1$  и  $t_2$ ).

*Замечание 4.1.4.* Поскольку  $X_{t_1}^2 + X_{t_2}^2 = 1$  на окружности  $S^1$ , доказательство оценки (4.1.3) аналогично рассуждению, приведенному в статье [19]. Оно значительно проще доказательства аналогичного результата [14, Лемма 2.7.5] для задачи Неймана.

Рассмотрим одномерное пространство тест-функций

$$V_{t_1} = \{\alpha w_a^{t_1} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Из Леммы 4.1.1 и формулы (4.1.3) следует, что любая функция  $u \in V_{t_1}$  удовлетворяет неравенству

$$(4.1.5) \quad \frac{\int_{\mathbb{D}} |\nabla u|^2 dz}{\int_{S^1} u^2 d\mu} \leq \frac{4\pi}{M(\Omega)}.$$

Мы хотим показать, что существует такая гиперболическая шапочка  $a$ , что оценка (4.1.5) выполнена не только для  $u \in V_{t_1}$ , но и для *любой* функции  $u \in E_a$ . Поскольку пространство  $E_a$  двумерно, неравенство (1.3.7) будет тогда следовать из формул (4.1.5) и (3.1.2).

**4.2. Простые и кратные меры.** Пусть дана конечная мера  $d\nu$  на окружности  $S^1$ . Рассмотрим квадратичную форму  $V_{d\nu} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , заданную формулой

$$V_{d\nu}(t) = \int_{S^1} X_t^2 d\nu.$$

Обозначим через  $\mathbb{R}P^1 = S^1/\mathbb{Z}_2$  проективную прямую, а через  $[t] \in \mathbb{R}P^1$  элемент, соответствующий паре точек  $\pm t \in S^1$ . Будем говорить, что  $[t] \in \mathbb{R}P^1$  есть *максимальное направление* меры  $d\nu$ , если  $V_{d\nu}([t]) \geq V_{d\nu}([s])$  для любого  $[s] \in \mathbb{R}P^1$ . Назовем меру  $d\nu$  *простой*, если ее максимальное направление единственно. В противном случае, назовем меру  $d\nu$  *кратной*.

**Лемма 4.2.1.** *Мера  $d\nu$  является кратной в том и только в том случае, если  $V_{d\nu}(t)$  не зависит от вектора  $t \in S^1$ .*

*Доказательство.* Утверждение леммы вытекает из простого факта, что  $V_{d\nu}(t)$  есть квадратичная форма. Детали доказательства можно найти в работе [14, Лемма 2.6.1].  $\square$

Заметим, что из формулы (3.3.2) следует, что  $[e_1]$  является максимальным направлением меры  $d\mu$ .

**Предложение 4.2.2.** *Если мера  $d\mu$  простая, то существует гиперболическая шапочка  $a \in \mathcal{HC}$  такая, что соответствующая перераспределенная мера  $d\nu_a$  кратная.*

Предложение 4.2.2 доказывается от противного. Предположим, что мера  $d\mu$ , а также меры  $d\nu_a$  для всех  $a \in \mathcal{HC}$ , простые. Для каждой гиперболической шапочки  $a$ , обозначим через  $[m(a)] \in \mathbb{R}P^1$  единственное максимальное направление перераспределенной меры  $d\nu_a$ .

По построению, сложенная мера  $d\mu_a$  непрерывно зависит от  $a$ . Семейство конформных отображений  $\psi_a$  непрерывно по Лемме 3.4.5 и, следовательно, перераспределенная мера  $d\nu_a$  тоже непрерывно зависит от  $a$ . Поэтому, квадратичная форма  $V_{d\nu_a}$  и единственное максимальное направление  $[m(a)]$  меры  $d\nu_a$  непрерывно зависят от  $a$ .

Изучим поведение максимального направления при вырождении гиперболической шапочки  $a$  в точку или во весь круг.

**Лемма 4.2.3.** *Допустим, что мера  $d\mu$ , а также меры  $d\nu_a$  для всех  $a \in \mathcal{HC}$ , простые. Тогда*

$$(4.2.4) \quad \lim_{a \rightarrow \mathbb{D}} [m(a)] = [e_1]$$

$$(4.2.5) \quad \lim_{a \rightarrow e^{i\theta}} [m(a)] = [e^{2i\theta}].$$

*Доказательство.* Во-первых, заметим, что формула (4.2.4) немедленно следует из соотношений (3.4.7) и (3.3.2). Докажем (4.2.5). Положим  $p = e^{i\theta}$ . По формуле (3.4.8) мы имеем:

$$(4.2.6) \quad \lim_{a \rightarrow p} \int_{S^1} X_t^2 d\nu_a = \int_{S^1} X_t^2 R_p^* d\mu = \int_{S^1} X_t^2 \circ R_p d\mu = \int_{S^1} X_{R_p t}^2 d\mu.$$

Поскольку мера  $d\mu$  простая,  $[e_1]$  есть ее единственное максимальное направление. Следовательно, правая часть равенства (4.2.6) максимальна при  $R_p t = \pm e_1$ . Применяя  $R_p$  с обеих сторон, мы получаем  $t = \pm e^{2i\theta}$  и, тем самым,  $[m(a)] = [e^{2i\theta}]$ . Лемма доказана.  $\square$

*Доказательство предложения 4.2.2.* Допустим, что мера  $d\nu_a$  простая для каждой гиперболической шапочки  $a \in \mathcal{HC}$ . Как отмечалось ранее, пространство  $\mathcal{HC}$  можно отождествить с открытым цилиндром  $(0, 2\pi) \times S^1$ . Определим отображение  $h : (0, 2\pi) \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1$  по формуле  $h(l, p) = [m(a_{l,p})]$ . Как было замечено выше, максимальное направление  $[m(a)]$  непрерывно зависит от  $a$ . Поэтому, применяя Лемму 4.2.3, мы получаем, что  $h$  продолжается до непрерывного отображения замкнутого цилиндра  $[0, 2\pi] \times S^1$ , при котором

$$h(0, e^{i\theta}) = [e_1], \quad h(2\pi, e^{i\theta}) = [e^{2i\theta}].$$

Это означает, что  $h$  есть гомотопия между тривиальной петлей и несжимаемой петлей в  $\mathbb{R}P^1$ . По очевидным топологическим причинам это невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство предложения.  $\square$

**4.3. Доказательство Теоремы 1.3.6.** Допустим, что мера  $d\mu$  простая. Согласно Предложению 4.2.2, существует такая гиперболическая шапочка  $a \in \mathcal{HC}$ , что соответствующая перераспределенная мера  $d\nu_a$  кратная. Тогда неравенство (4.1.5) справедливо для любой функции  $u \in E_a$ , и Теорема 1.3.6 немедленно следует из вариационного принципа (3.1.2) для  $\sigma_2$ .

Допустим теперь, что мера  $d\mu$  кратная. В этом случае доказательство значительно проще. Действительно, как следует из Леммы 4.2.1, любое направление  $[s] \in \mathbb{R}P^1$  является максимальным направлением меры  $d\mu$ . Возьмем двумерное пространство

$$E = \{X_t \mid t \in \mathbb{R}^2\}$$

в качестве пространства тест-функций в вариационной формуле (3.1.2) для  $\sigma_2$ . Заменяя  $w_a^t$  на  $X_t$  и аккуратно прослеживая выкладки, легко видеть, что множитель 2 в формуле (4.1.2) исчезает. Таким образом, из формулы (3.1.2) следует оценка

$$(4.3.1) \quad \sigma_2(\Omega) M(\Omega) \leq 2\pi,$$

более сильная, чем (1.3.7). Теорема 1.3.6 доказана.

*Замечание 4.3.2.* Если мера  $d\mu$  кратная, то Лемма 3.4.1 неприменима, поскольку мы не используем формулу (3.2.1). Это объясняет, почему мы получаем нестрогое неравенство (4.3.1). Действительно, равенство достигается на круге с постоянной плотностью на границе.

Легко видеть, что если область  $\Omega$  имеет симметрию порядка  $q \geq 3$  (например, если  $\Omega$  — правильный  $q$ -угольник), то мера  $d\mu$  кратная, при условии, что граничная плотность  $\rho$  обладает такой же симметрией (см. [2] и [3, стр. 136-140]). В этих предположениях оценка (4.3.1) есть частный случай результата [3, Теорема 3.15]. Заметим, что из теоремы Куранта о нодальных областях собственных функций задачи Стеклова [24, часть 3] следует, что если  $\Omega$  и плотность  $\rho$  обладают симметрией порядка  $q \geq 3$ , то  $\sigma_1 = \sigma_2$  и оценка (4.3.1) следует из неравенства Вайнстока

(1.2.2). Действительно, в этом случае область  $\Omega$  имеет как минимум две оси симметрии, и каждая из них является нодальной линией собственной функции, соответствующей собственному значению  $\sigma_1$ . Таким образом, его кратность  $\text{mult}(\sigma_1) \geq 2$ . Мы не знаем ни одного примера, в котором мера  $d\mu$  кратная, а собственное значение  $\sigma_1$  при этом простое.

**Благодарности.** Авторы выражают признательность Михаилу Леви-тину, Марко Марлетте, Николаю Надирашвили, Юрию Сафарову и Марлен Фригон за полезные обсуждения. И. Полтерович благодарит за гостеприимство Институт Вейцмана (Израиль), где была завершена работа над этой статьей.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] ASHBAUGH, M. AND BENGURIA, R., *Isoperimetric inequalities for eigenvalues of the Laplacian*, Spectral theory and mathematical physics: a Festschrift in honor of Barry Simon's 60th birthday, 105–139, Proc. Sympos. Pure Math., **76**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, 2007.
- [2] BANDLE, C., *Über des Stekloffsche Eigenwertproblem: Isoperimetrische Ungleichungen für symmetrische Gebiete*. Z. Angew. Math. Phys. **19** (1968), 627–237.
- [3] BANDLE, C., *Isoperimetric inequalities and applications*, Pitman, Boston, 1980.
- [4] BROCK, F., *An isoperimetric inequality for eigenvalues of the Stekloff problem*, Z. Angew. Math. Mech. **81** (2001), 69–71.
- [5] BUCUR D. AND BUTTAZZO G., *Variational methods in shape optimization problems*, Birkhäuser, Boston, 2005.
- [6] BUCUR D. AND HENROT A., *Minimization of the third eigenvalue of the Dirichlet Laplacian*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, **456** (2000), 985–996.
- [7] COURANT, R., *Beweis des Satzes, daß von allen homogenen Membranen gegebenen Umfangs und gegebener Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton besitzt*, Math. Zeit. **1**. No. 2-3 (1918), 321–328.
- [8] DELFOUR, M. AND ZOLESIO, J.-P., *Shapes and geometries. Analysis, differential calculus, and optimization*, Advances in Design and Control, **4**. SIAM, Philadelphia, 2001.
- [9] DING, Z., *A proof of the trace theorem of Sobolev spaces on Lipschitz domains*, Proc. Amer. Math. Soc. **124**, No. 2 (1996), 591–600.
- [10] DITTMAR, B., *Sums of reciprocal Stekloff eigenvalues*, Math. Nachr. **268** (2004), 44–49.
- [11] EDWARD, J., *An inequality for Steklov eigenvalues for planar domains*, Z. Angew. Math. Phys. **45** (1994), 493–496.
- [12] FABER, G., *Beweis, dass unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt*, Sitzungberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München Jahrgang, (1923), 169–172.
- [13] FOX, D. AND KUTTLER, J., *Sloshing frequencies*, Z. Angew. Math. Phys. **34** (1983), no. 5, 668–696.
- [14] GIROUARD, A., NADIRASHVILI, N. AND POLTEROVICH, I., *Maximization of the second positive Neumann eigenvalue for planar domains*, arXiv:0803.4171, 1–24.
- [15] HEMPEL, R., SECO, L. AND SIMON, B., *The essential spectrum of Neumann Laplacians on some bounded singular domains*, J. Funct. Anal. **102** (1991), no. 2, 448–483.



- [16] HENROT, A., *Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.
- [17] HENROT, A. AND PIERRE, M., *Variation et optimisation de formes*, Springer, Berlin, 2005.
- [18] HENROT, A., PHILIPPIN, G. AND SAFOUI, A., *Some isoperimetric inequalities with application to the Stekloff problem*, arXiv:0803.4242, 1–16.
- [19] HERSCH, J., *Quatre propriétés isopérimétriques de membranes sphériques homogènes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **270**, (1970), A1645–A1648.
- [20] HERSCH, J., PAYNE, L. AND SCHIFFER, M., *Some inequalities for Stekloff eigenvalues*, Arch. Rat. Mech. Anal. **57** (1974), 99–114.
- [21] JIMBO, S. AND MORITA, Y., *Remarks on the behavior of certain eigenvalues on a singularly perturbed domain with several thin channels*, Comm. Partial Differential Equations **17** (1992), no. 3–4, 523–552.
- [22] KRAHN, E., *Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises*, Math. Ann. **94** (1924), 97–100.
- [23] KRAHN, E., *Über Minimaleigenschaften der Kugel in drei und mehr Dimensionen*, Acta Comm. Unic. Dorpat, **A9** (1926), 1–44.
- [24] KUTTLER, J. AND SIGILLITO, V., *An inequality of a Stekloff eigenvalue by the method of defect*, Proc. Amer. Math. Soc. **20** (1969) 357–360.
- [25] NADIRASHVILI, N., *Isoperimetric inequality for the second eigenvalue of a sphere*, J. Differential Geom. **61** (2002), no. 2, 335–340.
- [26] PAYNE, L., *Isoperimetric inequalities and their applications*, SIAM Review, **9**, No. 3 (1967), 453–488.
- [27] RAYLEIGH, J.W.S., *The theory of sound*, Vol. 1, McMillan, London, 1877.
- [28] REED, M. AND SIMON, B., *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*, Academic Press, New-York-London, 1978.
- [29] STEKLOFF, M., *Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **19** (1902), 455–490.
- [30] SZEGO, G., *Inequalities for certain eigenvalues of a membrane of given area*, J. Rational Mech. Anal. **3**, (1954), 343–356.
- [31] TAYLOR, M., *Partial differential equations II. Qualitative studies of linear equations*, Applied Mathematical Sciences **116**, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [32] UHLMANN, G. AND SYLVESTER, J., *The Dirichlet to Neumann map and applications*, Inverse problems in partial differential equations (Arcata, CA, 1989), 101–139, SIAM, Philadelphia, PA, 1990.
- [33] WEINBERGER, H. F., *An isoperimetric inequality for the  $N$ -dimensional free membrane problem*, J. Rational Mech. Anal. **5** (1956), 633–636.
- [34] WEINSTOCK, R., *Inequalities for a classical eigenvalue problem*, J. Rat. Mech. Anal. **3** (1954), 745–753.
- [35] WOLF, A. AND KELLER, J., *Range of the first two eigenvalues of the Laplacian*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, **447** (1994), 397–412.

КАРДИФФСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (УЭЛЬС, ВЕЛИКОБРИТАНИЯ) И МОНРЕАЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ (КВЕБЕК, КАНАДА)