PLANS ET ANALYSES D'EXPÉRIENCES
STT 3410

Devoir 3 : à remettre le mercredi 24 novembre à 8h30.

1. Intervalle de confiance pour la moyenne dans un plan à classification simple avec un effet aléatoire :

Considérons le plan à classification simple avec effet aléatoire :

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, I; j = 1, \ldots, n_i,$$

où les α_i sont des variables aléatoires i.i.d. selon la loi $N(0, \sigma_A^2)$ indépendantes des variables aléatoires ϵ_{ij} i.i.d. de loi $N(0, \sigma_e^2)$.

a) Quelle est la variance de $\bar{Y}_{\cdot\cdot} = (n_{\cdot})^{-1} \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}$?
b) Trouvez un estimateur sans biais de cette variance.
c) Dans le cas d'un plan équilibré où les tailles d'échantillon n_i sont toutes égales à n, en utilisant l'estimateur sans biais de la variance trouvé en b), trouvez un intervalle de confiance bilatéral pour la moyenne (fixe) μ. Justifiez le quantile utilisé.

2. Puissance du test F :

La fonction Splus `pf(x,df1,df2,ncp)` calcule la fonction de répartition évaluée en `x` de la distribution F avec `df1` et `df2` degrés de liberté et paramètre de décentralité `ncp`, dont la valeur par défaut est de 0. Notez que le paramètre de décentralité en Splus est défini de la même manière que nous l'avons fait dans le cours.

Considérons le modèle du plan à classification simple à effet aléatoire décrit au problème 1 avec $n_i = n$ pour $i = 1, \ldots, I$, ainsi que le modèle du plan à classification simple à effet fixe donné par

$$Y_{ij} = \mu_i + \epsilon_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, I; j = 1, \ldots, n,$$

où les ϵ_{ij} sont des variables aléatoires i.i.d. selon la loi $N(0, \sigma_e^2)$.

a) Quelle est la puissance du test $F = CMA/CME$ de niveau 95% pour l'hypothèse $H_0 : \sigma_A^2 = 0$ versus l'hypothèse $H_A : \sigma_A^2 = 2$ lorsque $I = 5$, $n = 3$ et $\sigma_e^2 = 8$.
b) Quelle est la puissance du test $F = CMA/CME$ de niveau 95% pour l'hypothèse H_0 : $I^{-1} \sum_{i=1}^{I} (\mu_i - \bar{\mu}_{\cdot})^2 = 0$ versus l'hypothèse $H_A : I^{-1} \sum_{i=1}^{I} (\mu_i - \bar{\mu}_{\cdot})^2 = 2$ lorsque $I = 5$, $n = 3$ et $\sigma_e^2 = 8$. (Notez que $I^{-1} \sum_{i=1}^{I} (\mu_i - \mu_{\cdot})^2$ est la variance expérimentale des moyennes qui peut être comparée à σ_A^2 lorsque les moyennes sont aléatoires de telle sorte que les deux problèmes sont comparables).