Département de mathématiques et de statistique
Université de Montréal
Variable Complexe. Mat 2130. Examen intra
Le 15 février 2011
Professeure: Matilde N. Lalín

NOM:

CPER:

1. Aucune documentation permise.
2. Les téléphones cellulaires doivent être éteints. Les portables ne sont pas permis.
3. Ne pas oublier d'écrire vos nom et CPER sur cette feuille.
4. Lire attentivement les questions avant de commencer à travailler.
5. **Justifier tous vos raisonnements.**
6. Continuer sur le verso de la feuille si vous avez besoin de plus d'espace.
7. Répondre à toutes les questions.
8. Le total des points de cet examen vaut 20 (il y a 2 points additionnels).

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	3	4	6	5	4	22
Score:						

1. Soit $z = x + iy$ et $f(z) = e^{(e^z)}$

   (a) (1 point) Écrire $f(z)$ en termes de x et y.

   (b) (1 point) Déterminer $|f(z)|$ en termes de x et y.

   (c) (1 point) Résoudre $|f(z)| = 1$.

Solution:

(a)

$$e^{(e^{x+iy})} = e^{(e^x(\cos y + i\sin y))} = e^{(e^x \cos y)} e^{(ie^x \sin y)} = e^{(e^x \cos y)} \left(\cos\left(e^x \sin y\right) + i \sin\left(e^x \sin y\right)\right).$$

(b) $\left|e^{(e^{x+iy})}\right| = e^{(e^x \cos y)}$.

(c) Pour avoir $|f(z)| = 1$, il faut $e^{(e^x \cos y)} = 1$, et cela donne $e^x \cos y = 0$, alors $\cos y = 0$ et $y = \pi k + \frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Il n'y a pas de condition sur x.

2. Soit $\mathbb{S}^3 = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = 1\}$ la sphère de Riemann et

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{S}^3 &\rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \\ \rho(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \frac{\omega_1 + i\omega_2}{1 - \omega_3} \end{aligned}$$

la projection stéréographique.

Décrire (donner conditions pour les ω avec preuve) les ensembles $U, V \subset \mathbb{S}^3$ tels que

(a) (2 points) $\rho(U) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$

(b) (2 points) $\rho(V) = \left\{z \in \mathbb{C} \,|\, \arg(z) = \frac{\pi}{4}\right\}$

Solution: (a) Il faut $\left|\frac{\omega_1 + i\omega_2}{1-\omega_3}\right| < 1$. Alors,

$$\begin{aligned} 1 &> \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{(1-\omega_3)^2} = \frac{1-\omega_3^2}{(1-\omega_3)^2} = \frac{1+\omega_3}{1-\omega_3} \\ 1 - \omega_3 &> 1 + \omega_3 \\ 0 &> \omega_3 \end{aligned}$$

Cela correspond au hémisphère inférieur.

(b) Il faut $x = y > 0$, alors, $\omega_1 = \omega_2$ et $\frac{\omega_1}{1-\omega_3} > 0$. Si $\omega_3 = 1$, on a $\infty \notin \mathbb{C}$. Comme $1 > \omega_3$, on a que $1 - \omega_3 > 0$. Alors, il faut $\omega_1 = \omega_2 > 0$.

Cela correspond à une demi-circonference.

3. Soit

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z(1+z))^n}{2^n}.$$

(a) (4 points) Montrer que f converge dans l'ensemble $D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\} \cup \{z \in \mathbb{C} \,|\, |1+z| < 1\}$.

(b) (2 points) Trouver $z_0 \notin D$ tel que $f(z)$ converge dans z_0. Prouver que $f(z_0)$ converge.

Solution: (a) Le rayon de convergence de $g(w) = f(z)$ avec $w = z(1+z)$ est donné par $R = \frac{1}{\limsup(1/2^n)^{(1/n)}} = \frac{1}{\limsup 1/2} = 2$. Alors, $f(z)$ converge avec $|z(1+z)| < 2$. Si $|z| < 1$, on a que $|z+1| \leq |z| + 1 < 2$ et $|z(z+1)| < 2$. De même, si $|z+1| < 1$, on a que $|z| \leq |z+1| + 1 < 2$ et $|z(z+1)| < 2$. Alors tous les éléments de D satisfait que $|z(z+1)| < 2$ et la série converge dans cet ensemble.

(b) Prenons $z_0 = -\frac{1}{2} + i$. Maintenant, $|z_0| = |z_0 + 1| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} > 1$, alors $z_0 \notin D$. Mais $|z_0(z_0+1)| = \frac{1}{4} + 1 = \frac{9}{4} < 2$, alors, $f(z_0)$ converge.

Autres possibilités:

$z_0 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $|z_0| = |z_0+1| = \sqrt{\frac{1+3}{4}} = 1$, alors $z_0 \notin D$. Mais $|z_0(z_0+1)| = 1 < 2$, alors, $f(z_0)$ converge.

$z_0 = i$, $|z_0| = 1$, $|z_0+1| = \sqrt{2}$, alors, $z_0 \notin D$. Mais $|z_0(z_0+1)| = \sqrt{2} < 2$, alors, $f(z_0)$ converge.

4. Soit $v(x,y) = 2x(y-1)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

   (a) (3 points) Trouver une fonction u tel que $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ soit une fonction holomorphe.

   (b) (2 points) Exprimer f en termes de la variable z.

Solution: (a) Comme $v_x = 2(y-1) = -u_y$, on a que

$$u(x,y) = \int u_y(x,y)dy + c(x) = \int -v_x(x,y)dy + c(x) = \int -2(y-1)dy + c(x) = -(y-1)^2 + c(x).$$

Comme $v_y = 2x = u_x$, on a que $u_x(x,y) = c'(x) = 2x$, alors, $u(x,y) = x^2 - (y-1)^2 + c$.
On a que $f(x+iy) = (x^2 - (y-1)^2) + i2x(y-1) + c$ est holomorphe.

(b) Notons que $f(x+iy) = (x + i(y-1))^2$. Alors

$$f(z) = \left(\frac{z+\bar{z}}{2} + i\left(\frac{z-\bar{z}}{2i} - 1\right)\right)^2 + c = (z-i)^2 + c$$

5. Calculer $\int_{\mathcal{C}} \overline{z} dz$ sur les deux courbes:

   (a) (2 points) $|z-1|=1$ (parcouru dans le sens positif).

   (b) (2 points) $|z|=1$, $x \leq 0$. Le premier point étant $z=i$ et le dernier, $z=-i$.

Solution: (a) On a $z(t)=1+e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Alors $z'(t)=ie^{it}$ (comme $iz'(0)=-e^{i0}=-1$, la normale pointe vers l'interieur et l'orientation est positive) et

$$\int_{\mathcal{C}} \overline{z} dz = \int_0^{2\pi} (1+e^{-it}) ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} (ie^{it}+i) dt = 0 + 2\pi i = 2\pi i.$$

(b) On a $z(t)=e^{it}$, $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$. Alors $z'(t)=ie^{it}$, $z\left(\frac{\pi}{2}\right)=i$, $z\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-i$, et

$$\int_{\mathcal{C}} \overline{z} dz = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{-it} ie^{it} dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} i dt = \pi i.$$