MAT 6684W *Sujets spéciaux en théorie des nombres - formes modulaires*
Automne 2017, Plan de cours

Langage:	À déterminer en classe. Français/Anglais au bureau.
Échéancier :	Du 6 septembre au 6 décembre (pas de cours le 23 et le 25 octobre) lundi 11h-12h Pav. ANDRE-AISENSTADT 5183 et mercredi 13h - 15h Pav. ANDRE-AISENSTADT 5448

Professeure :	Matilde N. Lalín
	Pav. ANDRE-AISENSTADT 5145
	Disponibilités mardi 10h30 - 12h30 et mercredi 15h - 16h
	Possibilité d'autres périodes de disponibilité sur rendez-vous.
	`mlalin@dms.umontreal.ca`
	`www.dms.umontreal.ca/~mlalin/mat6684w`

Manuels recommandés :	"Modular forms", Lecture notes, P Bruin & S. Dahmen "A First Course in Modular Forms", GTM 228, Springer-Verlag 2005, F. Diamond & J Shurman "Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms", GTM 97, Springer-Verlag 1993, N. Koblitz Chapitre 7 de "A Course in Arithmetic", GTM 7, Springer-Verlag, 1996, J.P. Serre
Devoir:	Le devoir sera placé sur la page web du cours. Il faut le remettre en classe les jours: 25 septembre, 11 octobre, 30 octobre, 13 novembre, 27 novembre. Les devoirs qui seront remis en retard ne seront pas acceptés.
Barème :	Travaux pratiques (devoir) 100 % (Tous les devoirs seront répartis également.) Le devoir le moins bon de chaque étudiant sera ignoré.
Note final :	Combinaison des mesures absolues et de distribution.

Objectifs et généralités : Une forme modulaire est une fonction analytique complexe sur le demi-plan de Poincaré qui satisfait certaines propriétés de symétrie par rapport à l'action du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ (ou un de ses sous-groupes) et qui satisfait également à une certaine condition de croissance. Les coefficients du développement en série de Fourier d'une forme modulaire sont souvent des nombres entiers d'intérêt significatif en théorie de nombres. Les formes modulaires appartiennent à l'analyse complexe, mais elles ont joué un rôle clé dans la preuve du dernier théorème de Fermat par A. Wiles, dans le programme Langlands et dans de nombreuses autres questions en théorie des nombres, topologie algébrique, empilements compacts et théorie des cordes.

Matière : Le but de ce cours est d'étudier les fondements des formes modulaires.
Nous envisageons de discuter les sujets suivants.

1. Le groupe modulaire. Motivation, le demi-plan de Poincaré et les domaines fondamentaux.

2. Formes modulaires pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Définition et exemples, série d'Eisenstein et q-dévélopements. La série d'Eisenstein de poids 2. La forme modulaire Δ et la fonction modulaire j. La fonction η. La formule de valence.

3. Formes modulaires pour les sous-groupes de congruence. Sous-groupes de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, domaines fondamentaux et formes cuspidales. Exemples: la fonction θ, la série d'Eisenstein de poids 2. La formule de valence. Caractères de Dirichlet. Application des formes modulaires aux sommes des carrés.

4. Opérateurs de Hecke et formes propres. Les opérateurs T_α. Les opérateurs de Hecke pour $\Gamma_1(N)$. Description au niveau de réseaux. L'algèbre de Hecke. L'effet sur les q-expansions. Les formes propres de Hecke.

5. La théorie des formes primitives. Le produit scalaire de Petersson. Les adjoints des opérateurs Hecke. La théorie Atkin–Lehner. Formes primitives et non-primitives.

6. Fonctions L. La transformation de Mellin. La fonction L d'une forme modulaire.

7. Connexions avec courbes elliptiques (si le temps le permet).

Quelques rappels :

- La date limite pour modifier un choix de cours et pour abandonner un cours sans frais : le 20 septembre.

- La date limite pour abandonner un cours avec frais : le 10 novembre.

- Il est fait obligation à l'étudiant de motiver une absence prévisible à une évaluation dès qu'il est en mesure de constater qu'il ne pourra être présent, il appartiendra à l'autorité compétente de déterminer si le motif est acceptable (règlement des études de premier cycle `http://www.etudes.umontreal.ca/reglements/reglements.html`).

- Le plagiat attention, c'est sérieux! L'étudiant est invité à consulter le site `http://www.integrite.umontreal.ca`

- Pour la disponibilité des livres en bibliothèque, contacter le comptoir de prêt (`http://www.bib.umontreal.ca/nous-joindre/MI.htm`) ou la bibliothécaire Ferroudja Nazef (`f.nazef@umontreal.ca`)

Clause de non-responsabilité : Les erreurs typographiques dans ce plan de cours sont sujettes à des changements qui seront annoncés en classe.

MAT 6684W *Special Topics in Number Theory - Modular Forms*
Fall 2017, Syllabus

Language:	To be determined (lectures). French and English (office hours).
Dates:	September 6 to December 6 (no classes on October 23 and 25) Mondays 11AM - 12PM, Pav. ANDRE-AISENSTADT 5183 and Wednesdays 1PM - 3PM, Pav. ANDRE-AISENSTADT 5448

Professor:	Matilde N. Lalín
	Pav. ANDRE-AISENSTADT 5145
	Office hours Tuesdays 10:30AM - 12:30PM and
	Wednesdays 3PM - 4PM or by appointment.
	`mlalin@dms.umontreal.ca`
	`www.dms.umontreal.ca/~mlalin/mat6684w`

Recommended Bibliography:	"Modular forms", Lecture notes, P Bruin & S. Dahmen "A First Course in Modular Forms", GTM 228, Springer-Verlag 2005, F. Diamond & J Shurman "Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms", GTM 97, Springer-Verlag 1993, N. Koblitz Chapter 7 of "A Course in Arithmetic", GTM 7, Springer-Verlag, 1996, J.P. Serre
Homework:	Homework assignments will be posted in the course website. They will be due in class as follows: September 25, October 11, October 30, November 13, November 27. Late assignments will not be accepted.
Grade Weights:	Homework 100 % (Assignments will have the same weight.) The worst of the five assignment marks will be dropped.
Final Mark:	Based on a combination of absolute measures and distribution.

Objectives and General Description: A modular form is a complex analytic function on the complex upper half plane which satisfies certain precise symmetric properties with respect to the action of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ (or one of its subgroups) and it also satisfies certain growth condition. The coefficients of the Fourier series expansion of a modular form are often integers of significant number-theoretical interest. Modular forms belong to complex analysis but they played a key role in the proof Fermat's Last Theorem by A. Wiles, in the Langlands programme, and many other questions in number theory, algebraic topology, sphere packing, and string theory.

Topics: The goal of this class is to study the basics of modular forms and, time permitting, their relationship with elliptic curves.

We plan to discuss the following topics.

1. The modular group. Motivation, the upper half-plane, and fundamental domains.

2. Modular forms for $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Definition and examples, Eisenstein series and their q-expansions. The Eisenstein series of weight 2. The modular form Δ and the modular function j. The η-function. The valence formula.

3. Modular forms for congruence subgroups. Congruence subgroups of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, fundamental domains and cusps. Examples: the θ-functions, Eisenstein series of weight 2. The valence formula. Dirichlet characters. Application of modular forms to sums of squares.

4. Hecke operators and eigenforms. The operators T_α. Hecke operators for $\Gamma_1(N)$. Lattice interpretation. The Hecke algebra. The effect on q-expansions. Hecke eigenforms.

5. The theory of newforms. The Petersson inner product. The adjoints of Hecke operators. Atkin-Lehner theory. Oldforms and newforms

6. L-functions. The Mellin transform. The L-function of a modular form.

7. Connections to elliptic curves (time permiting).

Some Reminders:

- The deadline for adding/dropping or withdrawal of a course with refund at **Université de Montréal** is September 20.

- The deadline for withdrawal of a course without refund at **Université de Montréal** is November 10.

- It is the responsability of the student to notify the instructor of a previsible absence from an exam as soon as possible. The supporting documentation will be evaluated by the correspondent authority who will determine if the reasons for the absence are properly justified. (As per the regulations in `http://www.etudes.umontreal.ca/reglements/reglements.html`.)

- Plagiarism is a serious offence! Students are invited to consult the site `http://www.integrite.umontreal.ca`

- To check for book availability in the library, contact the circulation desk (`http://www.bib.umontreal.ca/nous-joindre/MI.htm`) or the librarian Ferroudja Nazef (`f.nazef@umontreal.ca`)

Disclaimer: Any typographical errors in this Course Outline are subject to change and will be announced in class. When in doubt, the French version of this document takes precedence.