# Ensemble adéquat de connecteurs

18 septembre

## 0.1 Ensembles adéquats de connecteurs

DÉFINITION 0.1 *Un* ensemble adéquat de connecteurs *est un ensemble de connecteurs tel que toute fonction de vérité peut être représentée comme la fonction de vérité d'une formule propositionnelle ne contenant que des connecteurs de cet ensemble.*

On a déjà vu que $\{\sim, \wedge, \vee\}$ est un ensemble adéquat de connecteurs puisque toute formule propositionnelle a au moins soit une forme normale conjonctive soit une forme normale disjonctive n'utilisant que ces connecteurs. Mais on va voir qu'on peut faire mieux

DÉFINITION 0.2

1. *Le connecteur* NOR*, noté* « $\downarrow$ »*, a pour table de vérité :*

| $p$ | $q$ | $p \downarrow q$ |
|---|---|---|
| V | V | F |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

*Il est tel que* $(p \downarrow q)$ *est logiquement équivalent à* $(\sim(p \vee q))$.

2. *Le connecteur* NAND*, noté* « $|$ »*, a pour table de vérité :*

| $p$ | $q$ | $p \mid q$ |
|---|---|---|
| V | V | F |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | V |

*Il est tel que* $(p \mid q)$ *est logiquement équivalent à* $(\sim(p \wedge q))$.

THÉORÈME 0.3 *Les ensembles suivants de connecteurs sont adéquats :*

1. $\{\sim, \wedge\}$,

2. $\{\sim, \vee\}$,
3. $\{\sim, \rightarrow\}$,
4. $\{\downarrow\}$,
5. $\{|\}$.

PREUVE

1. Il faut montrer qu'on peut écrire une formule logiquement équivalente à $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ et n'utilisant que les connecteurs $\{\sim, \wedge\}$. La formule

$$(\sim((\sim\mathcal{A}) \wedge (\sim\mathcal{B})))$$

a cette propriété.

2. De même, la formule $(\sim ((\sim \mathcal{A}) \vee (\sim \mathcal{B})))$ est logiquement équivalente à $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$.

3. Il faut montrer qu'on peut écrire des formules logiquement équivalentes à $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ et $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, et n'utilisant que les connecteurs $\{\sim, \rightarrow\}$. Or, on sait que $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ est logiquement équivalente à $((\sim\mathcal{A}) \vee \mathcal{B})$. Donc, $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ est logiquement équivalente à $((\sim\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B})$.

   Aussi, $(\sim(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}))$ est logiquement équivalente à $(\sim((\sim\mathcal{A}) \vee \mathrm{B}))$, qui est elle-même logiquement équivalente à $\mathcal{A} \wedge (\sim\mathcal{B})$. Donc, $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ est logiquement équivalente à $(\sim(\mathcal{A} \rightarrow (\sim\mathcal{B})))$.

4. En regardant la table de vérité de $(p \downarrow p)$, on peut se convaincre que $(\mathcal{A} \downarrow \mathcal{A})$ est logiquement équivalente à $(\sim\mathcal{A})$. On sait aussi que $(\mathcal{A} \downarrow \mathcal{B})$ est logiquement équivalent à $(\sim(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}))$ qui est elle-même logiquement équivalente à $((\sim \mathcal{A}) \wedge (\sim \mathcal{B}))$. Donc, $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$ est logiquement équivalent à $((\sim\mathcal{A}) \downarrow (\sim\mathcal{B}))$, qui est elle-même logiquement équivalente à $((\mathcal{A} \downarrow \mathcal{A}) \downarrow (\mathcal{B} \downarrow \mathcal{B}))$. Ceci termine la preuve puisqu'on sait que $\{\sim, \wedge\}$ est une ensemble adéquat de connecteurs.

5. En regardant la table de vérité de $(p \mid p)$, on peut se convaincre que $(\mathcal{A} \mid \mathcal{A})$ est logiquement équivalente à $(\sim\mathcal{A})$. On sait aussi que $(\mathcal{A} \mid \mathcal{B})$ est logiquement équivalent à $(\sim(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}))$ qui est elle-même logiquement équivalente à $((\sim\mathcal{A}) \vee (\sim\mathcal{B}))$. Donc, $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ est logiquement équivalent à $((\sim\mathcal{A}) \mid (\sim\mathcal{B}))$ qui est elle-même logiquement équivalente à $((\mathcal{A} \mid \mathcal{A}) \mid (\mathcal{B} \mid \mathcal{B}))$. Ceci termine la preuve puisqu'on sait que $\{\sim, \vee\}$ est une ensemble adéquat de connecteurs.

$\square$

EXEMPLE 0.4 *Trouver une formule avec seulement* $|$ *et logiquement équivalente à* $p \to q$.

*On utilise que* $(p \to q)$ *est logiquement équivalente à* $((\sim p) \vee q)$*, et donc à* $(((\sim p) \mid (\sim p)) \mid (q \mid q))$*, elle-même logiquement équivalente à*

$$(((p \mid p) \mid (p \mid p)) \mid (q \mid q)).$$