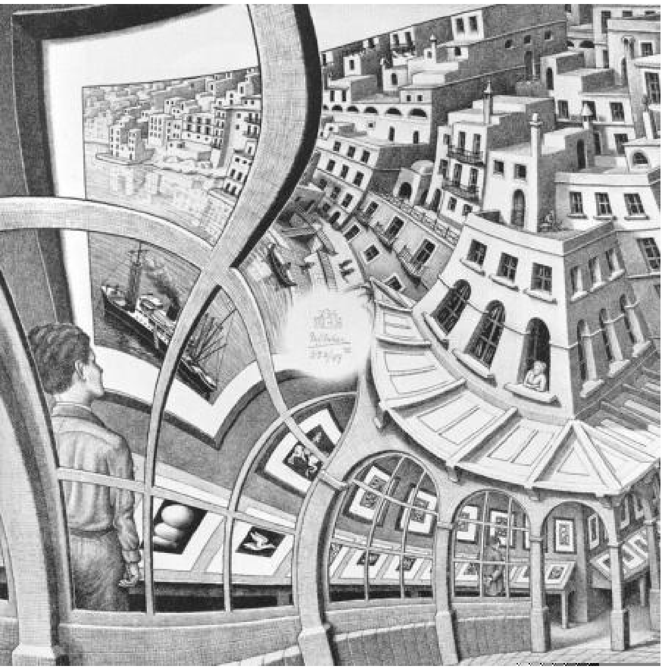


Finir une gravure d'Escher

Qui ne connaît l'artiste néerlandais Maurits Cornelis Escher? Mathématicien à ses heures, il nous a laissé des dizaines de lithographies, toutes plus fascinantes les unes que les autres.

Philippe Carphin
Christiane Rousseau
Université de Montréal

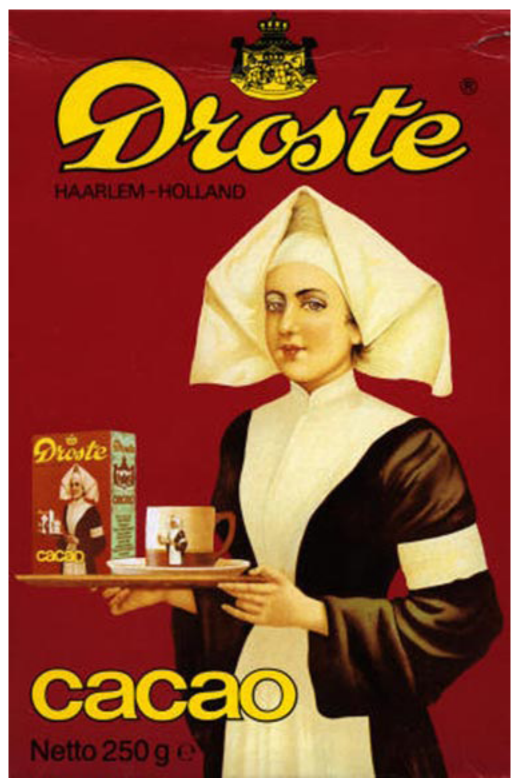
En général, la clé pour appécier une gravure de Escher est raisonnablement accessible à un mathématicien, que ce soit les pavages réguliers du plan ou du plan hyperbolique, ou encore ces cycles infernaux ou l'eau ne cesse de descendre. Plus que toutes les autres, sa lithographie « Expositions d'estampes » a fasciné les scientifiques. C'est qu'elle est inachevée! Était-elle inachevable?

La question a divisé les scientifiques jusqu'à ce que Hendrik W. Lenstra et Bart de Smit la complètent en 2003.

Plusieurs lecteurs ont peut-être vu le film de Jean Bergeron « Achever l'inachevable », dans lequel Hendrik Lenstra raconte sa fascination devant cette gravure et le « Eureka » qui a permis à son équipe d'entreprendre la longue tâche de complétion de la gravure.

Que vous ayez ou non vu le film, vous êtes sans doute encore mystifié par cette gravure. Nous allons mettre nos lunettes mathématiques pour dévoiler le mystère de cette complétion.

Vous avez sûrement déjà été fasciné par une image qui se trouve reproduite à l'intérieur d'elle-même. Hendrik Lenstra et Bart de Smit ont appelé ce phénomène, l'« effet Droste » à cause de la marque de cacao Droste vendu aux Pays-Bas.



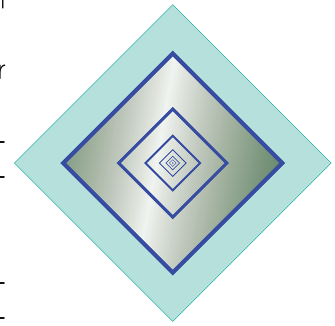
La caractéristique de cette image c'est qu'on retrouve une copie d'elle-même à l'intérieur de l'image. Si on décide de faire un zoom, on retrouve la même image. On a donc une infinité de nonnes qui s'accumulent en un point. Ce point est le centre de notre image : une infinité de tasses s'y accumulent, une infinité de boîtes de cacao s'y accumulent, etc. En faisant des zooms successifs on voit qu'on peut, en théorie, recouvrir le plan en entier avec notre image. Si l'on fait une homothétie d'un certain rapport *C*, on retrouve la même image. On dit que notre image est *invariante* sous une homothétie de rapport *C*.

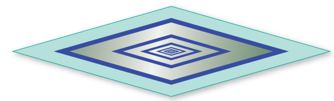
Le point de départ d'Escher est tout simplement une image invariante sous une homothétie de rapport 1/256.

Mais quelle transformation lui fait-il subir?

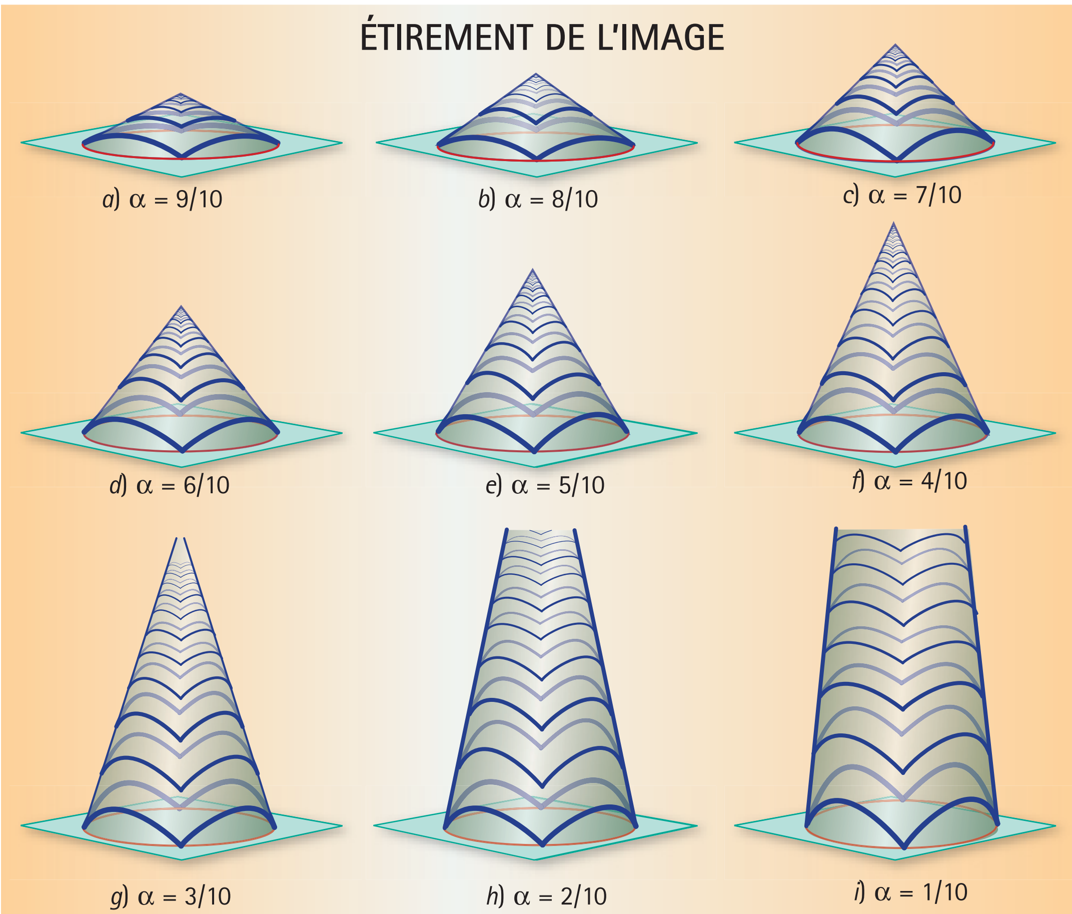
Faisons la démarche d'Escher sur l'image simple ci-contre.

Nous allons nous placer dans l'espace et imaginer notre image infinie sur le plan horizontal.





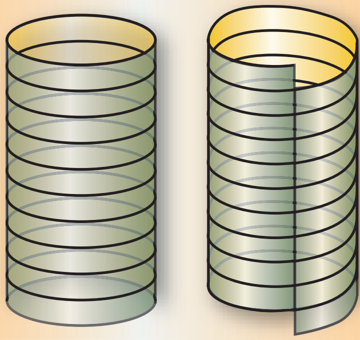
Nous allons supposer que cette image est élastique et nous allons la soulever à partir du centre. Pendant toute cette manœuvre, nous allons exiger que le cercle de rayon 1 reste fixe dans le plan horizontal. Au début nous obtenons un cône aplati, puis de plus en plus pointu. Le centre de l'image est situé au sommet du cône. Un paramète α décroissant de 1 à 0 va quantifier cette manœuvre, le cône ayant pour arête $1/\alpha$.



Étirement du cône lorsque α décroît de 1 à 0. Le cercle de rayon 1 reste fixe.

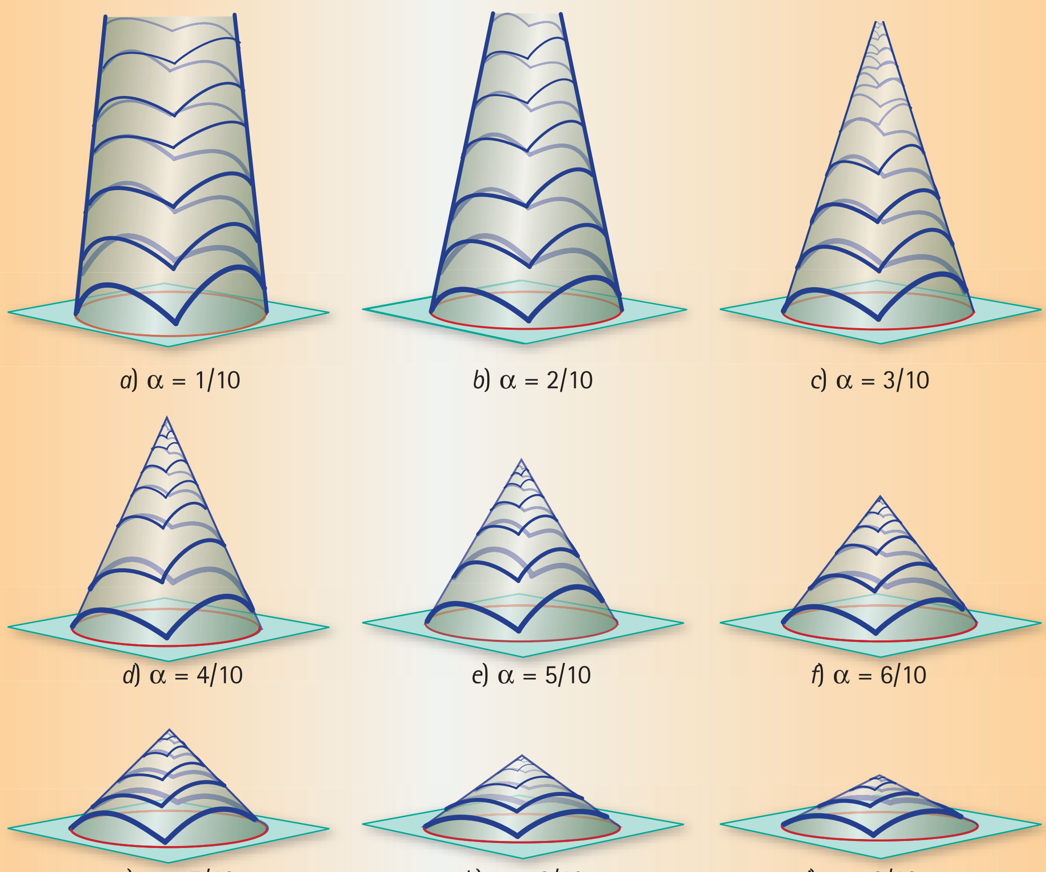
Le cône a pour arête $\frac{1}{\alpha}$.

CYLINDRE COUPÉ ET RECOLLÉ



À la limite, quand le sommet du cône est à l'infini (c'est-à-dire $\alpha = 0$), le cône est devenu un cylindre. Qu'est devenue notre image? Tout au long de la déformation, on a obtenu sur le cône une image invariante sous une homothétie centrée au sommet du cône mais, au fur et à mesure qu'on étire le cône, le rapport d'homothétie se rapproche de 1. À la limite, lorsqu'on a le cylindre, il est égal à 1. L'image sur le cylindre est invariante sous translation verticale! Elle est donc périodique avec une période verticale T_1. Sur le cylindre on observe une infinité d'images identiques sur des bandes l'une au dessus de l'autre. Coupons maintenant notre cylindre suivant une droite verticale. On peut faire glisser les deux côtés de la coupure l'un sur l'autre et les recoller après un décalage de T_1. La nouvelle image sur le cylindre est maintenant une spirale infinie, toujours périodique sous une période verticale. Il ne reste plus qu'à faire l'opération inverse : aplatir notre cylindre en un cône jusqu'à

APLATISSEMENT DU CÔNE APRÈS LA COUPURE DU CYLINDRE ET SON RECOLLEMENT AVEC UN DÉCALAGE

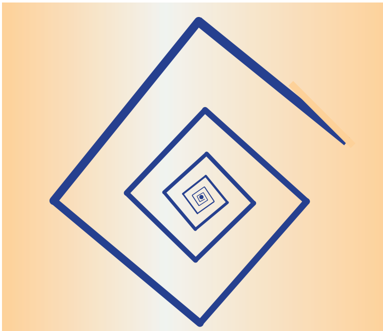


a) $\alpha = 1/10$ *b*) $\alpha = 2/10$ *c*) $\alpha = 3/10$

d) $\alpha = 4/10$ *e*) $\alpha = 5/10$ *f*) $\alpha = 6/10$

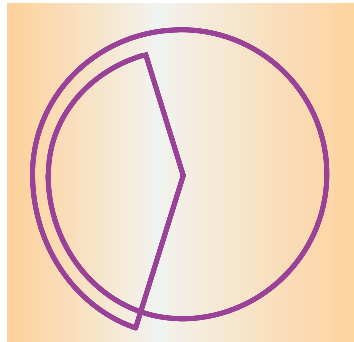
g) $\alpha = 7/10$ *h*) $\alpha = 8/10$ *i*) $\alpha = 9/10$

Le paramètre α croît de 0 à 1. Les courbes fermées sont devenues des spirales.

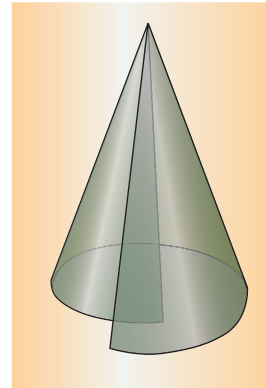


écraser l'image dans le plan.

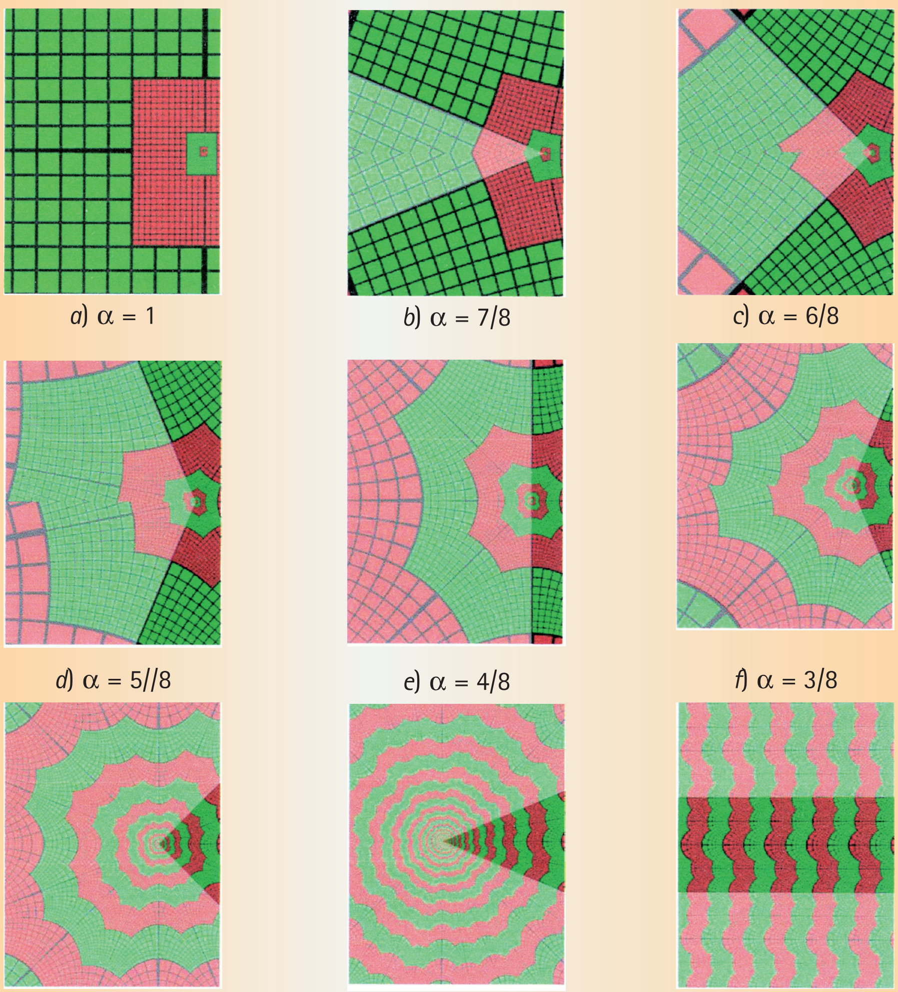
Mais comment mettre cela en équation pour programmer les étapes? On imagine que l'image est imprimée sur une feuille infinie enroulée sur le cylindre ou sur le cône et qu'on déroule cette feuille. Une feuille enroulée sur le cône aura la forme d'un secteur, mais on peut prendre l'angle du secteur arbitrairement grand.



Lorsqu'on déplie une feuille enroulée sur le cône, le motif qu'on obtient ne se re-



MOTIF SUR UN CÔNE DÉROULÉ LORSQUE α DÉCROÎT DE 1 À 0

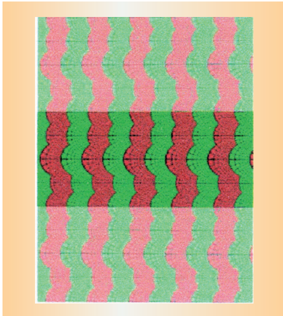


a) $\alpha = 1$ *b*) $\alpha = 7/8$ *c*) $\alpha = 6/8$

d) $\alpha = 5//8$ *e*) $\alpha = 4/8$ *f*) $\alpha = 3/8$

g) $\alpha = 2/8$ *h*) $\alpha = 1/8$ *i*) $\alpha = 0.0001$

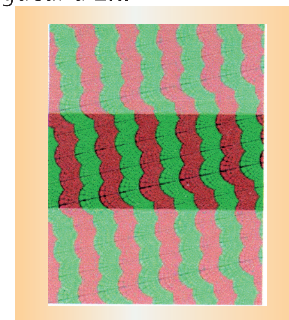
L'image de départ est une grille du style de celle utilisée par Escher.



ferme pas après un tour.

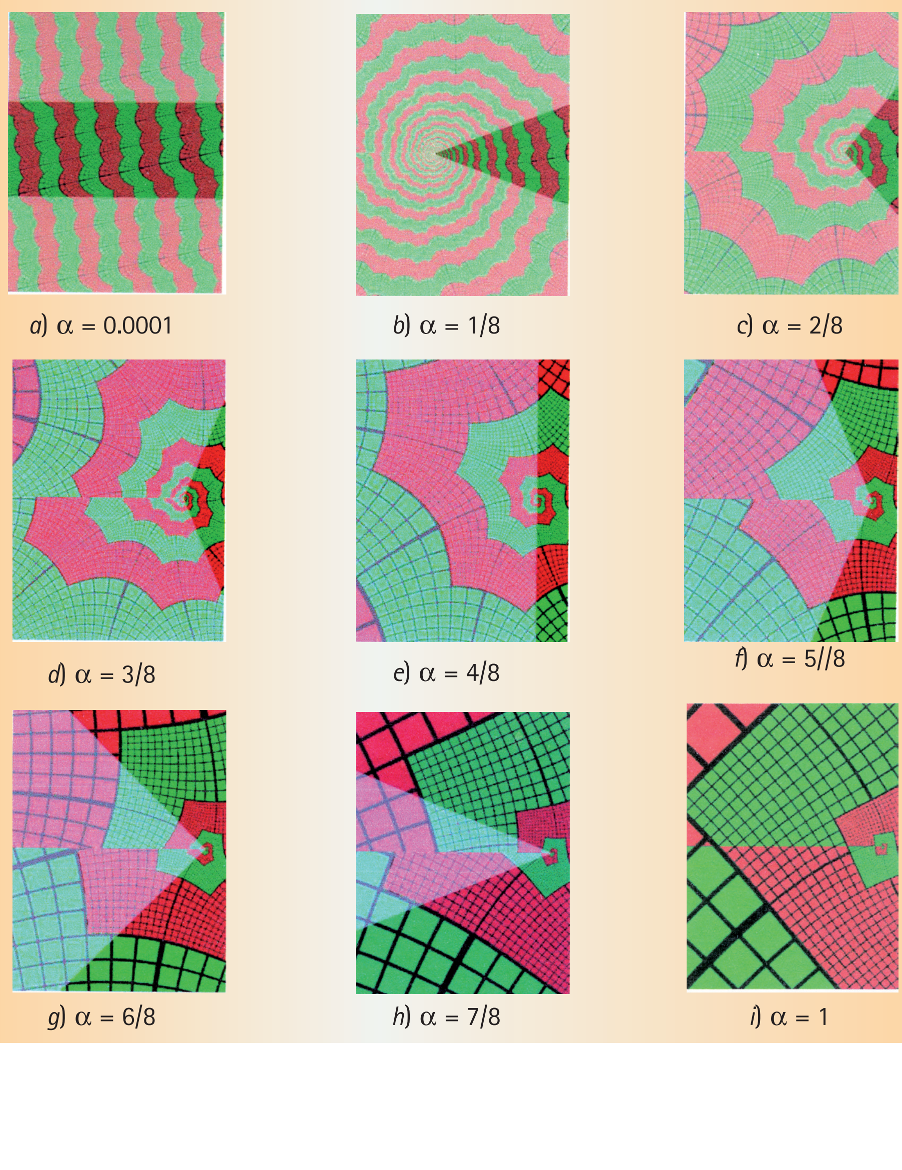
Pour notre dessin dans le plan, puisque le cercle de rayon 1 reste devant nos yeux, le sommet de la feuille s'éloigne à l'infini. Lorsqu'on déroule la feuille enroulée sur le cylindre, l'image obtenue est périodique sous deux périodes : la période T_1 (qu'on dessine horizontalement) et une période $T_2 = 2\pi$, soit la circonférence du cercle, qu'on dessine verticalement.

Mais alors, on a aussi des périodes obliques! Voilà l'origine du fameux angle de 157,6255960832 degrés qui a tellement intrigué Hendrik Lenstra. On tourne la figure de manière à amener le vecteur $T_1 + T_2$ en position verticale. On fait une homothétie de manière à ramener sa longueur à 2π.



Et, on fait la transformation inverse. En faisant cela à partir d'une grille carrée, on obtient une grille semblable aux grilles de construction qu'on retrou-

MOTIF SUR UN CÔNE DÉROULÉ LORSQUE α CROÎT DE 0 À 1

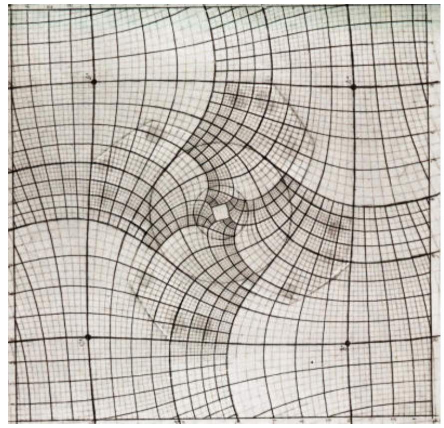


a) $\alpha = 0.0001$ *b)* $\alpha = 1/8$ *c)* $\alpha = 2/8$

d) $\alpha = 3/8$ e) $\alpha = 4/8$ *f)* $\alpha = 5//8$

g) $\alpha = 6/8$ *h)* $\alpha = 7/8$ *i)* $\alpha = 1$

Dessin complété par l'équipe de Lenstra, avant transformation.



Grille d'Escher.

ve dans les dessins d'Escher (figure ci-contre). Toutes les constructions d'Escher respectent les angles : ce sont des transformations conformes[1]. L'analyse complexe nous fournit des formules très simples pour ces transformations (voir encadré).

Vous pouvez regarder une animation de la construction d'une telle image réalisée par Philippe Carphin sur le site de la revue : www.accromath.ca.

Gravure complétée par l'équipe de Lenstra à partir du dessin complété.

1. Voir *La cartographie*, dans Accromath vol. 3, hiver-printemps 2008.

La mise en équation des transformations

On représente un point (x, y) du plan par le nombre complexe $z = x + iy$. Nos transformations sont de la forme $z \mapsto f(z)$. Pour envoyer le plan sur un cône, on utilise $z \mapsto z^{\alpha}$, que l'on peut voir en coordonnées polaires comme $(r, \theta) \mapsto (r^{\alpha}, \alpha\theta)$. Au départ, $\alpha = 1$. Ensuite, on fait décroître α vers 0. Mais on aussi envoyer le centre à l'infini. Donc, on va plutôt utiliser la formule :

$$z \mapsto Z = \frac{z^{\alpha} - 1}{\alpha}.$$

Quelle est la limite quand $\alpha = 0$? Précisément $z \mapsto Z = \log z$ (c'est un joli exercice)! Au début, l'image d'Escher était invariante sous l'homothétie $z \mapsto zC$, pour $C = 1/256$. Que se passe-t-il pour l'image finale lorsqu'on a appliqué le logarithme? Comme $\log zC = \log z + \log C$, elle est devenue invariante sous une translation de période :

$$T_1 = \log C = -\log 256.$$

La deuxième période est $T_2 = 2\pi i$. Considérons le nombre complexe

$$A = \frac{T_2}{T_2 - T_1} = \frac{2\pi i}{2\pi i + \log 256}.$$

Multiplier Z par A, c'est lui appliquer une homothétie dont le rapport est le module de A, suivie d'une rotation dont l'angle est l'argument de A. En appliquant la transformation inverse (c'est-à-dire $Z \mapsto e^{Z}$), on trouve $z' = e^{AZ}$. Faisons le calcul si $Z = \log z$:

$$z' = e^{A \log z} = e^{\log z^{A}} = z^{A}.$$

L'image initiale était invariante sous l'homothétie $z \mapsto zC$, ce qui donne que la nouvelle image est invariante sous $z \mapsto C^{A}z$. Si on fait le calcul, le module de C^{A} est environ 1/22,58 et l'argument 157,63 degrés, soit l'angle observé par Hendrik Lenstra.