ANALYSE DES BIFURCATIONS D'UN MODÈLE DE GAUSE GÉNÉRALISÉ AVEC RÉCOLTE DE PROIES ET FONCTION DE HOLLING TYPE III GÉNÉRALISÉE*

R.M.D. ETOUA[†]ET C. ROUSSEAU[‡]

RÉSUMÉ. Dans cet article, nous étudions un modèle de Gause généralisé avec récolte de proies et fonction de Holling de type III généralisée : $p(x) = \frac{mx^2}{ax^2 + bx + 1}$ Le but de notre étude est de déterminer le diagramme de bifurcations du modèle. Pour cela, nous étudions les bifurcations de col-noeud, la bifurcation de Hopf de codimension 1 et 2, la bifurcation de boucle hétéroclinique, et la bifurcation de col nilpotent de codimension 2 et 3. La bifurcation de col nilpotent de codimension 3 est le centre organisateur du diagramme de bifurcations. La bifurcation de Hopf est étudiée à l'aide d'un système de Liénard généralisé et, pour b = 0, nous discutons de l'intégrabilité du système. Le point nilpotent de multiplicité 3 se produit avec une droite invariante et peut avoir une codimension supérieure à 4. Mais, puisqu'il se produit avec une droite invariante, la plus grande codimension effective est 3. Nous développons des formes normales (dans lesquelles la droite invariante est conservée) pour étudier la bifurcation de col nilpotent. Pour b = 0, la réversibilité du déploiement du col nilpotent est discutée. Nous étudions le type de la boucle hétéroclinique et sa cyclicité. Les portraits de phase du diagramme de bifurcations (partiellement conjecturé sur la base des résultats obtenus) nous permettent de donner une interprétation biologique des comportements des deux espèces.

ABSTRACT. In this paper we study a generalized Gause model with prey harvesting and a generalized Holling response function of type III : $p(x) = \frac{mx^2}{ax^2+bx+1}$ The goal of our study is to give the bifurcation diagram of the model. For this we need to study saddle-node bifurcations, Hopf bifurcation of codimension 1 and 2, heteroclinic bifurcation, and nilpotent saddle bifurcation of codimension 2 and 3. The nilpotent saddle of codimension 3 is the organizing center for the bifurcation diagram. The Hopf bifurcation is studied by means of a generalized Liénard system, and for b = 0 we discuss the potential integrability of the system. The nilpotent point of multiplicity 3 occurs with an invariant line and can have a codimension up to 4. But because it occurs with an invariant line, the effective highest codimension is 3. We develop normal forms (in which the invariant line is preserved) for studying of the nilpotent saddle bifurcation. For b = 0, the reversibility of the nilpotent saddle is discussed. We study the type of the heteroclinic loop and its cyclicity. The phase portraits of the bifurcations diagram (partially conjectured via the results obtained) allow us to give a biological interpretation of the behavior of the two species.

Date: Le 27 juin 2009.

^{*}Ce travail a été supporté par le CRSNG du Canada

[†]Département de Mathématiques, Université de Montréal, C.P.6128, Succursale Centre-ville, Montréal, Québec, H3T 3J7, CANADA; e-mail :etouar@dms.umontreal.ca.

[‡]Département de Mathématiques, Université de Montréal, C.P.6128, Succursale Centre-ville, Montréal, Québec, H3T 3J7, CANADA; e-mail :rousseac@dms.umontreal.ca.

1. INTRODUCTION

Le premier modèle de système prédateur-proie fut suggéré indépendamment par A. Lotka(1925) [28] et V. Volterra(1926) [34]. Depuis ce temps, on raffine de tels systèmes pour mieux modéliser les caractéristiques spécifiques des populations étudiées. Comme ces systèmes dépendent des paramètres, l'outil de base est la théorie des bifurcations.

L'évolution d'une population x dont des individus sont régulièrement prélevés est modélisée (voir [3]) par

$$\dot{x} = F(x) - S(x, h),$$

où F(x) décrit la dynamique de la population sans récolte et S(x, h) est le taux auquel ces individus sont prélevés de la population; le paramètre h est appelé *l'intensité de la récolte*. Il existe deux stratégies principales de récolte ([3], [4]) : la première est de prélever un nombre constant d'individus par unité de temps, ce qu'on traduit par un taux constant S(x, h) = h; pour la deuxième stratégie, le nombre d'individus prélevés par unité de temps est proportionnel à la population de sorte que S(x, h) = hx. Des stratégies plus sophistiquées comme celle de prélevement périodique, etc., sont aussi étudiées. Dans ce travail, nous choisissons la première stratégie.

L'étude d'une dynamique des populations dont la récolte est permise est un sujet de bioéconomie mathématique ([4], [15], [36]), rattaché au chapitre de la gestion optimale des ressources renouvelables (voir Clark dans [8]). L'exploitation des ressources biologiques et la récolte des espèces en interaction sont notamment appliquées en pêcherie, foresterie et en gestion de la faune ([4], [15], [36]). Selon Clark dans [8], la gestion des ressources renouvelables est basée sur la notion de *rendement soutenu maximal* (communément abrégé par MSY, c'est-à-dire *maximum sustainable yield*) des récoltes ; le MSY, soit la récolte maximale permettant la survie, a la propriété que, si la récolte d'une espèce excède son MSY (c'est-à-dire si elle est en surexploitation [36]), alors cette espèce sera conduite à l'extinction.

Qualitativement, l'étude d'un modèle prédateur-proie avec récolte de proies, ou de prédateurs, ou des deux, est plus raffinée que celle d'un modèle prédateur-proie. Du point de vue des ressources renouvelables, on doit déterminer le MSY de la récolte (lorsque celle-ci est permise) de chaque population afin de donner la condition pour que chaque espèce soit écologiquement préservée comme c'est par exemple le cas dans [4], [15] et [36].

Le système que nous étudions, appelé dans la littérature modèle de Gause généralisé avec récolte de proies ([23], [19], [21], [35], [2]), est de la forme

(1.1)
$$\begin{cases} \dot{x} = g(x) - yp(x) - h_1 \\ \dot{y} = y[-d + cp(x)], \end{cases}$$

où x représente la population de proies, y représente la population de prédateurs, d est le taux de mortalité naturelle des prédateurs, la fonction $g(x) = rx(1 - \frac{x}{k})$ représente le comportement de la population des proies en l'absence des prédateurs : r est le taux de croissance de la population de proies x en l'absence de prédateurs et lorsque x est petite, alors que k est la capacité de l'environnement à supporter les proies. La fonction

(1.2)
$$p(x) = \frac{mx^2}{ax^2 + bx + 1}$$

(où m et a sont des constantes positives, et b est une constante quelconque), appelée dans la littérature fonction de réponse de Holling de type III généralisée [3], représente une des fonctions de réponse possibles des prédateurs relativement au nombre de proies : elle rend compte de la consommation de proies faite par les prédateurs. h_1 est le terme de récolte des proies (qui est ici un nombre fixe d'individus prélevés par unité de temps de la population de proies). c est le ratio de la quantité de proies consommées par les prédateurs sur celle de prédateurs nés. Le système précédent est, dans la littérature ([31],[4]), un cas particulier du modèle de Rosenzweig-MacArthur avec récolte de proies.

Une fonction de réponse de Holling de type III reflète à la fois une très faible prédation lorsque le nombre de proies est petit (p'(0) = 0) et un avantage du groupe de proies lorsque leur nombre est élevé (p(x) tend vers $\frac{m}{a}$ quand x tend vers l'infini) : ce phénomème est la défense de groupe comme c'est le cas dans [38]. Il existe plusieurs types de fonctions de réponse de Holling de type III généralisées suivant que l'avantage du groupe des proies est faible ou fort (figure 1.1) : Si b est négatif, l'avantage du groupe de proies est plus fort que si b est positif. Nous n'étudierons que le cas où $b \ge 0$. Récemment, dans le même esprit mais sans récolte de proies ni de prédateurs, Broer-Naudot-Roussarie-Saleh (voir [5]) et Coutu-Lamontagne-Rousseau (voir [29]) ont étudié respectivement un système prédateur-proie avec fonction de réponse de Holling de type IV $(p(x) = \frac{mx}{ax^2+bx+1})$ et un système prédateur-proie avec fonction de réponse de Holling de type III (avec b > 0, b = 0, ou b < 0). On note que, pour la fonction de Holling de type IV, la réponse des prédateurs tend vers zéro quand la population de proies tend vers l'infini ; ce qui traduit un très grand avantage de groupe pour les proies.

Du point de vue biologique, il est intéressant de déterminer comment le terme de récolte de proies affecte le sous-système $(1.1)|_{h_1=0}$ où p(x) est donné en (1.2).



FIG. 1.1. Fonction de Holling de type III généralisée.

Nous étudions donc le modèle suivant :

(1.3)
$$\begin{cases} \dot{x} = rx(1 - \frac{x}{k}) - \frac{mx^2y}{ax^2 + bx + 1} - h_1, \\ \dot{y} = y(-d + \frac{cmx^2}{ax^2 + bx + 1}), \\ x \ge 0, y \ge 0, \end{cases}$$

à huit paramètres : r, k, m, a, c, d, h_1 sont strictement positifs et $b \ge 0$. Mais, par la transformation linéaire et le changement d'échelle sur le temps suivants $(X, Y, T) = (\frac{1}{k}x, \frac{1}{ck}y, cmk^2t)$, on peut réduire le nombre de paramètres de (1.3) à 5 : Le système simplifié que nous considérerons est le suivant

(1.4)
$$\begin{cases} \dot{x} = \rho x (1-x) - y p(x) - \lambda, \\ \dot{y} = y (-\delta + p(x)), \\ x \ge 0, y \ge 0, \quad o \dot{u} \end{cases}$$

(1.5)
$$p(x) = \frac{x^2}{\alpha x^2 + \beta x + 1}$$

et les paramètres sont

(1.6)
$$(\rho, \alpha, \beta, \delta, \lambda) = \left(\frac{r}{cmk^2}, ak^2, bk, \frac{d}{cmk^2}, \frac{h_1}{cmk^3}\right)$$

Le diagramme de bifurcations mettra en évidence des conséquences biologiques surprenantes, et le fait qu'il faut être très prudent avec une stratégie de récolte de proies à taux constant. Même avec une très faible récolte, cette stratégie conduit systématiquement à l'extinction des espèces si le taux de mortalité des prédateurs est faible. Et même lorsqu'on attrape des valeurs des paramètres pour lesquelles il y a survivance des deux espèces, la région des conditions initiales permettant la survivance n'est pas toujours grande. Autre conclusion surprenante : le fait de commencer la récolte, même faible, lorsque le nombre de proies est élevé peut conduire systématiquement à l'extinction, alors qu'on aurait survivance si le nombre initial de proies était moins élevé, et ce, pour un même nombre initial de prédateurs ! Notre étude met donc en évidence l'intérêt de cette question et le besoin d'étudier de nouvelles stratégies de récoltes : autre taux de récolte de proies, ou encore récolte simultanée de prédateurs et de proies, afin d'identifier les stratégies de récoltes qui permettent d'éviter l'extinction des espèces.

L'article est organisé ainsi qu'il suit. La section 2 résume nos résultats. À la section 3 nous montrons que toutes les trajectoires demeurant dans le premier quadrant sont attirées vers une région finie du plan. À la section 4 nous étudions le nombre de points singuliers, leur type et l'étude des bifurcations de col-noeud. La bifurcation de Hopf de codimension 1 et 2 est étudiée à la section 5. Pour ce qui est de la section 6, nous discutons de la bifurcation de col-nilpotent de codimension 2 et 3 (qui est en fait le centre organisateur du diagramme de bifurcations). Finalement, à la section 7, nous donnons le diagramme de bifurcations global (partiellement conjecturé). Celui-ci nous permet, à la section 8, d'en déduire une interprétation biologique des comportements possibles en fonction des paramètres et des conditions initiales.

Remarque 1.1. (i) Lorsque λ est petit, le système (1.4) est une perturbation du sous-système (1.4) $|_{\lambda=0}$. Le diagramme de bifurcation du sous-système (1.4) $|_{\lambda=0}$ (déterminé dans [29] ou [17]) nous permettra donc de comprendre, à l'avant dernière section, celui du système (1.4) pour λ petit (voir la figure 2.2).

(ii) Le paramètre $\lambda_1 := \frac{\lambda}{\rho}$ est important car, comme on pourra le vérifier plus tard, toutes les expressions des surfaces de bifurcations sont homogènes en λ et ρ . (iii) Tous nos calculs sont faits à l'aide du logiciel MAPLE.

2. Résumé des résultats

L'axe x du système (1.3) est invariant. Le système a 2 points singuliers, C et D, sur l'axe x positif pour $\rho > 4\lambda$ et aucun pour $\rho < 4\lambda$, les deux points se confondant en un col-noeud pour $\rho = 4\lambda$. Dans le premier quadrant, on a au maximum un point singulier E qui est toujours de type anti-selle, c'est-à-dire, noeud, foyer, foyer faible ou centre. Le point singulier E disparaît du premier quadrant par une bifurcation de col-noeud en se confondant, soit avec C, soit avec D. Le point E peut avoir une bifurcation de Hopf d'ordre au plus deux. Lorsque l'ordre est deux, le deuxième coefficient de Lyapunov est positif (le point est répulsif). Ainsi, lorsque le système a deux cycles limites, le cycle attractif est entouré d'un cycle répulsif.

Théorème A. Si $\rho = 4\lambda$ et $\delta = \frac{1}{\alpha+2\beta+4}$, les trois points singuliers C, D et E se confondent en $B = (\frac{1}{2}, 0)$. Ce point est un col nilpotent. Si $\alpha = \frac{\beta^2+8\beta+24}{\beta+6}$ avec $\beta > 0$, ce col nilpotent est de codimension 4. Cependant, la contrainte que le système ait l'axe horizontal invariant diminue la codimension de un. Ce point est le centre organisateur du diagramme de bifurcations.

On a pu mettre en évidence les trois paramètres principaux du système, soit λ , α et δ . Ceci permet de donner le diagramme de bifurcations dans le plan (α, δ) pour différentes valeurs de λ .

Théorème B. Le diagramme de bifurcations avec portraits de phase du modèle (1.4) est, suivant les valeurs du paramètre $\lambda > 0$, présenté aux figures 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7 et 2.8 en utilisant les notations de la table 2.1. Il est le plus simple contenant toutes les contraintes du système. Les courbes de bifurcations de Hopf et de cols-noeuds sont exactes. Sont conjecturés :

- (1) la position exacte de la courbe de bifurcation de boucle hétéroclinique, mais cette courbe coupe toute droite $\delta = \text{constante exactement une fois}$;
- (2) l'unicité du lieu des bifurcations de codimension 2 (à savoir H_2 , C et BH_2) et, par ricochet, le triangle $C - H_2 - BH_2$ qui, pour $\beta > 0$, se déplace vers la droite quand λ décroît et, pour $\beta = 0$, se réduit au lieu $C = (\alpha, \delta)$ défini par $\alpha = \frac{\rho}{\lambda}$ et $\delta = \frac{\lambda}{2\rho}$.

Lorsque $\beta = 0$, on conjecture que le système a un centre dès que l'ordre de la bifurcation est supérieur ou égal à deux, le diagramme de bifurcaions étant celui de la figure 2.8.

3. Comportement des trajectoires à l'infini

Dans cette section, nous montrons que toutes les trajectoires de (1.4) demeurant dans le premier quadrant sont attirées vers une région finie du plan.

Théorème 3.1. Pour tous $\alpha, \beta, \delta, \rho, \lambda$ définis dans (1.4), il existe un rectangle $R = [0, 1] \times [0, l]$, où $l = l(\alpha, \beta, \delta, \rho, \lambda)$, dans lequel toute trajectoire qui reste toujours dans le premier quadrant vient se terminer.

Démonstration. En effet, on a pour x > 1 que $\dot{x} < 0$; alors toutes les trajectoires entrent dans la région « $x \leq 1$ ». Si $\delta > \frac{1}{\alpha}$, alors $\dot{y} < 0$ et, quel que soit l > 0, toutes les trajectoires entrent dans la région « $y \leq l$ ». Sinon, soit $x_p(\alpha, \beta, \delta)$ la solution de $p(x) = \delta$. Alors, $\dot{y} < 0$ si, et seulement si $x \in [0, x_p(\alpha, \beta, \delta)]$. Soit $\epsilon \in [0, x_p(\alpha, \beta, \delta)]$

H_a :	Bifurcation de Hopf attractive
H_r :	Bifurcation de Hopf répulsive
H_2 :	Bifurcation de Hopf de codimension deux
BH_a :	Boucle hétéroclinique attractive
BH_r :	Boucle hétéroclinique répulsive
BH_2 :	Boucle hétéroclinique de codimension deux
DC:	Double cycle
C:	Intersection entre (H) et (BH)
B_+ :	Bifurcation de col nilpotent avec coefficient de X^2Y positif
B_{-} :	Bifurcation de col nilpotent avec coefficient de X^2Y négatif
Cn_{a_i} :	Col-noeud attractif interne
Cn_{r_i} :	Col-noeud répulsif interne
Cn_{a_e} :	Col-noeud attractif externe
Cn_{r_e} :	Col-noeud répulsif externe
Тав. 2	.1. Description des courbes de bifurcation de la figure 6.3.



FIG. 2.1. Diagramme de bifurcations et portraits de phase pour $\lambda = 0$ ([29] ou [17]).

suffisamment petit, alors $\dot{y} < 0$ dans la bande « $x \in [0, \epsilon]$ ». En plus, dans la région « $x \in [0, 1]$ », nous avons que $\dot{x} < 0$ si, et seulement si $y > \frac{\rho x(1-x) - \lambda}{p(x)}$. Soit

$$N := \max_{x \in [\epsilon, 1]} \frac{\rho x (1 - x) - \lambda}{p(x)}.$$



FIG. 2.2. Diagramme de bifurcations lorsque $\beta > 0$ et λ est petit



FIG. 2.3. Diagramme de bifurcations lorsque $\beta>0$ et λ n'est ni petit, ni proche de $\frac{\rho}{4}$

La pente du champ est donnée par

(3.1)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\delta - p(x)}{p(x) - \frac{\rho x(1-x) - \lambda}{y}}.$$

Or, on a que

(3.2)
$$\lim_{y \to +\infty} \frac{dy}{dx} = \frac{\delta - p(x)}{p(x)} \quad est \ born\acute{e} \ sur \ [\epsilon, 1].$$



FIG. 2.4. Diagramme de bifurcations lorsque $\beta > 0$ et λ est proche de $\frac{\rho}{4}$

Il existe donc au moins une trajectoire $(x(t), y(t)), t \in [0, T]$ telle que x(0) = 1, $x(T) = \epsilon$ et, pour tout $t, y(t) \ge N$: soit $(x_1(t), y_1(t)), t \in [0, T_1]$ la plus basse trajectoire vérifiant cette propriété. Posons

$$l := \max_{t \in [0, T_1]} y_1(t).$$

Par (3.2), il vient que les trajectoires ne peuvent pas aller à l'infini dans la demibande « $x \in [\epsilon, 1], y > N$ » et doivent donc entrer dans la bande « $x \in [0, \epsilon]$ » (où $\dot{y} < 0$). Dès qu'une trajectoire a pénétré cette bande, soit elle y reste pendant que y est décroissant, soit elle entre dans la bande « $x \in [\epsilon, 1]$ » à une hauteur y < N. Dans les deux cas, elle est attirée et reste pour toujours en dessous de la hauteur y = l.

4. BIFURCATION ET TYPE DES POINTS SINGULIERS

4.1. Nombre de points singuliers.

Théorème 4.1. Soit

(4.1)
$$x_{01} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\rho(\rho - 4\lambda)}}{2\rho}, x_{02} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\rho(\rho - 4\lambda)}}{2\rho}$$

Le nombre de points singuliers du système (1.4) est, suivant les valeurs des paramètres, donné au tableau 4.1.

Démonstration. Les points singuliers de (1.4) sont les points de coordonnées (x_0, y_0) , solutions du système d'équations d'inconnues (x, y)

(4.2)
$$\begin{cases} \rho x(1-x) - yp(x) - \lambda = 0, \\ y(-\delta + p(x)) = 0, \end{cases}$$



FIG. 2.5. Portraits de phase des diagrammes de bifurcations FI-GURE 2.2, FIGURE 2.3 et FIGURE 2.4.



FIG. 2.6. Diagramme de bifurcations et portraits de phase lorsque $\lambda = \frac{\rho}{4}$.

telles que $x_0 \ge 0, y_0 \ge 0$. De la deuxième équation de (4.2), on a y = 0 ou $p(x) = \delta$. Alors :

(1) Pour y = 0, la première équation de (4.2) donne :

(4.3)
$$\rho x^2 - \rho x + \lambda = 0$$



FIG. 2.7. Diagramme de bifurcations et portraits de phase lorsque $\lambda > \frac{\rho}{4}$.

Région	Point(s) singulier(s)
$\rho < 4\lambda$	aucun
$\rho = 4\lambda$	$(\frac{1}{2}, 0)$: point double si $\delta \neq \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4}$ et,
	point triple si $\delta = \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4}$
$\rho > 4\lambda \text{ et } x_0 \in]x_{01}, x_{02}[$	$(x_{01},0), (x_{02},0)$ et (x_0,y_0) où
	$p(x_0) = \delta$ et $y_0 = \frac{\rho x_0(1-x_0) - \lambda}{\delta}$
$\rho > 4\lambda$ et $x_0 = x_{01}$	$(x_{01}, 0)$ point double et $(x_{02}, 0)$
$\rho > 4\lambda$ et $x_0 = x_{02}$	$(x_{01}, 0)$ et $(x_{02}, 0)$ point double
$\rho > 4\lambda \text{ et } x_0 \in]0, x_{01}[\cup]x_{02}, +\infty[$	$(x_{01},0)$ et $(x_{02},0)$

TAB. 4.1. Nombre de points singuliers du sytème (1.4)

dont le discriminant est $\Delta_1 := \rho(\rho - 4\lambda)$. Ainsi :

- Lorsque $\rho < 4\lambda$, on n'a pas de point singulier sur y = 0.
- Lorsque $\rho = 4\lambda$, alors $(\frac{1}{2}, 0)$ est un point singulier double.
- Lorsque $\rho > 4\lambda$, alors (4.3) a deux solutions x_{01} et x_{02} données en (4.1) et correspondant aux points singuliers $(x_{01}, 0)$ et $(x_{02}, 0)$.
- (2) Pour $p(x) = \delta$, on cherche $x_0 \ge 0$ tel que $p(x_0) = \delta$ et

(4.4)
$$y_0 = \frac{1}{\delta} [\rho x_0 (1 - x_0) - \lambda]$$

Or, $p(x) = \delta$ si et seulement si

(4.5)
$$f(x) = (\alpha \delta - 1)x^2 + \beta \delta x + \delta = 0$$

Alors :

a) Si $\alpha\delta - 1 = 0$, alors la seule solution réelle de (4.5) est $x_{01} = \frac{-1}{\beta} < 0$. b) Si $\alpha\delta - 1 \neq 0$, alors le discriminant de (4.5) est

$$\Delta_2 := (\beta \delta)^2 - 4\delta(\alpha \delta - 1) :$$

b-1) Si $\alpha\delta - 1 > 0$ et $\Delta_2 > 0$ (resp. $\Delta_2 < 0$) alors (4.5) a deux solutions dont le produit est $\frac{\delta}{\alpha\delta - 1} > 0$ et la somme est $-\frac{\beta\delta}{\alpha\delta - 1} < 0$ (resp. (4.5) n'a pas de solution) : donc, il n'y a pas de point singulier admissible lorsque



FIG. 2.8. Diagramme de bifurcations et portraits de phase lorsque $\beta=0$ et $\lambda\in]0,\frac{\rho}{4}[$

 $\alpha\delta - 1 > 0.$

b-2) Si $\alpha\delta - 1 < 0$, alors $\Delta_2 > 0$. Ainsi, le produit des solutions de (4.5) est négatif et la solution positive est

(4.6)
$$x_0 = \frac{\beta \delta + \sqrt{\delta[\delta(\beta^2 - 4\alpha) + 4]}}{-2(\alpha \delta - 1)}.$$

Donc, on obtient au plus un point singulier (x_0, y_0) où x_0 , défini par $p(x_0) = \delta$, vérifie (4.6). Or y_0 , dont on a besoin qu'il soit positif, est défini par (4.4) qui, justement, montre que le signe de y_0 est exactement celui de $-\rho x_0^2 + \rho x_0 - \lambda$ dont le discriminant est $\Delta_1 := \rho(\rho - 4\lambda)$.

Conséquemment :

• Si $\rho < 4\lambda$, alors il n'y a aucun point singulier dans le premier quadrant ouvert car, dans ce cas on a (x_0, y_0) avec x_0 défini en (4.6) et $y_0 < 0$.

• Si $\rho = 4\lambda$, alors on a (x_0, y_0) avec x_0 défini en (4.6) et $y_0 = -\rho(x_0 - \frac{1}{2})^2 \leq 0$. En particulier, par (4.4), (4.1) et (4.5), on a le point singulier $(x_0 - \frac{1}{2}, y_0 = 0)$ si et soulement si $\delta = -\frac{1}{2}$

 $(x_0 = \frac{1}{2}, y_0 = 0)$ si, et seulement si $\delta = \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4}$.

• Si $\rho > 4\lambda$, alors, par (4.4), $y_0 \ge 0 \Leftrightarrow x_0 \in [x_{01}, x_{02}] \subset]0; +\infty[$, où x_{01} et x_{02} sont définis en (4.1).

Remarque 4.2 (Cas intéressants de b-2)). **b-2-1**) Si $\rho = 4\lambda$ et $\delta = \frac{1}{\alpha+2\beta+4}$ alors, on a bien $\alpha\delta - 1 < 0$ et, le point singulier $(\frac{1}{2}, 0)$ devient triple car $x_0 = \frac{1}{2}$ est solution double de (4.3) et solution simple de (4.5).

b-2-2) Si $\rho > 4\lambda$ et $x_0 = x_{01}$ ou $x_0 = x_{02}$ tels que $p(x_0) = \delta$, alors le point singulier $(x_0, 0)$ sera double, car x_0 est solution de (4.3) et (4.5). Ces dernières égalités représentent deux surfaces dans le produit de l'espace x par l'espace des paramètres : nous déterminerons leur équation dans l'espace des paramètres lors de l'étude des bifurcations des cols-noeuds.

4.2. Type des points singuliers. La matrice jacobienne de (1.4) en (x, y) est donnée par

(4.7)
$$\mathbf{Jac}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \rho - 2\rho x - \frac{xy(\beta x+2)}{(\alpha x^2 + \beta x+1)^2} & -p(x) \\ \frac{xy(\beta x+2)}{(\alpha x^2 + \beta x+1)^2} & -\delta + p(x) \end{pmatrix}$$

Par le tableau 4.1, il s'agit de l'étudier pour les deux cas suivants : $\rho = 4\lambda$ et $\rho > 4\lambda$. Dans cette sous-section nous nous limiterons au cas $\rho > 4\lambda$ et laisserons le cas $\rho = 4\lambda$ pour les sections 4.3 et 6.

Théorème 4.3. Pour $\rho > 4\lambda$, le type de chacun des points suivants $C = (x_{01}, 0)$, $D = (x_{02}, 0)$ et $E = (x_0, y_0)$ est, suivant les valeurs des paramètres, donné au tableau 4.2.

Démonstration. (1) Type des points singuliers $C = (x_{01}, 0)$ et $D = (x_{02}, 0)$ On a que $x_{01} := \frac{1}{2} - \eta$, $x_{02} := \frac{1}{2} + \eta$, où

(4.8)
$$\eta := \frac{\sqrt{\rho(\rho - 4\lambda)}}{2\rho}$$

En plus, $x_{01}x_{02} = \frac{\lambda}{\rho}$ et $x_{01} + x_{02} = 1$. Par (4.7), on a respectivement (4.9)

$$\mathbf{Jac}(\mathbf{C}) = \begin{pmatrix} 2\rho\eta & -p(\frac{1}{2}-\eta) \\ 0 & -\delta + p(\frac{1}{2}-\eta) \end{pmatrix} \quad et \quad \mathbf{Jac}(\mathbf{D}) = \begin{pmatrix} -2\rho\eta & -p(\frac{1}{2}+\eta) \\ 0 & -\delta + p(\frac{1}{2}+\eta) \end{pmatrix}.$$

On a : $p(\frac{1}{2} \pm \eta) > 0$ et $p'(x) = \frac{\beta x^2 + 2x}{(\alpha x^2 + \beta x + 1)^2} > 0$ pour tout x > 0; c'est-à-dire que p est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Or, $0 < \frac{1}{2} - \eta < \frac{1}{2} + \eta$; d'où

(4.10)
$$p\left(\frac{1}{2} - \eta\right) < p\left(\frac{1}{2} + \eta\right).$$

Le type des points C et D est donc celui du tableau 4.2.

Région	Points singuliers	Type
$\delta < p(\frac{1}{2} - \eta)$	C, D, E	C est un noeud répulsif
-		D et E sont des cols hyperboliques
		E non admissible
$\delta = p(\frac{1}{2} - \eta)$	C, D	C est un col-noeud répulsif (à venir)
-		D est un col hyperbolique
$p(\frac{1}{2} - \eta) < \delta < p(\frac{1}{2})$	C, D, E	C et D sont des cols hyperboliques
		E est un anti-selle
$p(\frac{1}{2}) \le \delta < p(\frac{1}{2} + \eta)$	C, D, E	C et D sont des cols hyperboliques
		E est un (foyer/noeud) attractif
$\delta = p(\frac{1}{2} + \eta)$	C, D	C est un col hyperbolique
-		D est un col-noeud attractif (à venir)
$\delta > p(\frac{1}{2} + \eta)$	C, D, E	D est un noeud attractif
-		C et E sont des cols hyperboliques
		E non admissible

TAB. 4.2. Types des points singuliers lorsque $\rho > 4\lambda$

(2) Type du point singulier $E = (x_0, y_0)$ La matrice jacobienne, (4.7), évaluée en ce point est

$$\mathbf{Jac}(\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0}) = \begin{pmatrix} \rho(1 - 2x_0) - y_0 p^{'}(x_0) & -\delta \\ y_0 p^{'}(x_0) & 0 \end{pmatrix}$$

dont la trace et le déterminant sont respectivement

$$Tr(\mathbf{Jac}(\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0})) = \rho(1 - 2x_0) - y_0 p'(x_0),$$

$$Det(\mathbf{Jac}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)) = \delta y_0 p \ (x_0) > 0.$$

En plus, $x_{01} < \frac{1}{2} < x_{02}$, d'où : i) Si $x_0 \in [\frac{1}{2}, x_{02}[$, ce qui correspond aux régions des paramètres $p(\frac{1}{2}) \le$ $\delta < p(\frac{1}{2} + \eta)$, alors $1 - 2x_0 < 0$ et $y_0 p'(x_0) > 0$; d'où $Tr(\mathbf{Jac}(\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0})) < 0$: Ey est donc un (noeud/foyer) attractif.

ii) Si $x_0 \in]x_{01}, \frac{1}{2}[$, ce qui correspond aux régions des paramètres $p(\frac{1}{2} - \eta) <$ $\delta < p(\frac{1}{2})$, alors $\rho(1-2x_0) > 0$ et $y_0 p'(x_0) > 0$. Il est donc possible que $Tr(\mathbf{Jac}(\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0})) := \rho(1 - 2x_0) - y_0 p'(x_0)$ s'annule. Par conséquent, puisqu'on a toujours $Det(\mathbf{Jac}(\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0})) := \delta y_0 p'(x_0) > 0$, on aura possiblement une bifurcation de Hopf au voisinage de $E = (x_0, y_0)$ dans ce cas.

L'étude du col-noeud lorsque $x_0 = x_{01}$ nous montrera que Tr > 0 dans un voisinage de x_{01} .

iii) Afin de mieux comprendre le diagramme de bifurcations, il est intéressant (quoique $y_0 < 0$) de voir que :

Si $x_0 < x_{01}$ ou $x_{02} < x_0$, ce qui correspond aux régions des paramètres $\delta < p(\frac{1}{2} - \eta)$ ou $\delta > p(\frac{1}{2} + \eta)$, alors : $y_0 < 0$ et $Det(\mathbf{Jac}(\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0})) :=$ $\delta y_0 p'(x_0) < 0$. Donc, $E = (x_0, y_0)$ y est un col hyperbolique.

4.3. Bifurcations de col-noeud.

Théorème 4.4. Le point double $B = (\frac{1}{2}, 0)$ est un col-noeud pour $\rho = 4\lambda$ et $\delta \neq \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4}$. Il est attractif si $\delta > \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4}$ et répulsif si $\delta < \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4}$.

Démonstration. En effet, par la translation « $x_1 = x - \frac{1}{2}$, $y_1 = y$ », on ramène notre singularité, $B = (\frac{1}{2}, 0)$, à l'origine. Au voisinage de $x_1 = 0$ et par le fait que $\rho = 4\lambda$, le système précédent devient (4.11)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \left(8 \frac{(\alpha\beta+6\alpha-8)y_1}{(\alpha+2\beta+4)^3} - \rho\right) x_1^2 - 4 \frac{(\beta+4)y_1x_1}{(\alpha+2\beta+4)^2} - \frac{y_1}{\alpha+2\beta+4} + O(|(x_1,y_1)|^4), \\ \dot{y}_1 = -8 \frac{(\alpha\beta+6\alpha-8)y_1x_1^2}{(\alpha+2\beta+4)^3} + 4 \frac{(\beta+4)y_1x_1}{(\alpha+2\beta+4)^2} - \frac{(-1+\delta\alpha+2\delta\beta+4\delta)y_1}{\alpha+2\beta+4} + O(|(x_1,y_1)|^4). \end{cases}$$

Les valeurs propres du linéarisé $\mathbf{M}_{\mathbf{B}}$ de (4.11) sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = -\delta + \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4} \neq 0$, et ont respectivement pour vecteurs propres $v_1 = (1,0)$ et $v_2 = (\frac{1}{\delta(\alpha + 2\beta + 4) - 1}, 1)$. $\mathbf{M}_{\mathbf{B}}$ est ainsi diagonalisable, avec comme matrice de passage

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\delta(\alpha + 2\beta + 4) - 1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par la transformation $\binom{X}{Y} = \mathbf{P}^{-1} \binom{x_1}{y_1}$, le système devient : (4.12)

$$\begin{cases} \dot{X} = -2 \, \frac{(\rho \,\alpha + 8 \,\delta + 4 \,\rho + 2 \,\rho \,\beta + 2 \,\delta \,\beta)XY}{(-1 + \delta \,\alpha + 2 \,\delta \,\beta + 4 \,\delta)(\alpha + 2 \,\beta + 4)} - \rho \, X^2 - \frac{(\rho \,\alpha + 4 \,\delta \,\beta + 4 \,\rho + 2 \,\rho \,\beta + 16 \,\delta)Y^2}{(\alpha + 2 \,\beta + 4)(-1 + \delta \,\alpha + 2 \,\delta \,\beta + 4 \,\delta)^2} + O(|(X, Y)|^3) \\ \dot{Y} = -\frac{(-1 + \delta \,\alpha + 2 \,\delta \,\beta + 4 \,\delta)Y}{\alpha + 2 \,\beta + 4} + 4 \, \frac{(\beta + 4)XY}{(\alpha + 2 \,\beta + 4)^2} + 4 \, \frac{(\beta + 4)Y^2}{(\alpha + 2 \,\beta + 4)^2(-1 + \delta \,\alpha + 2 \,\delta \,\beta + 4 \,\delta)} + O(|(X, Y)|^3). \end{cases}$$

On voit qu'il est inutile de calculer la variété centre. Le théorème de Chochita \ddot{i} chvili[1] donne directement que le système (4.12) est topologiquement équivalent au système suivant :

(4.13)
$$\begin{cases} \dot{X} = -\rho X^2 + O(|X|^4) \\ \dot{Y} = (\frac{1}{\alpha + 2\beta + 4} - \delta)Y. \end{cases}$$

En conséquence, étant donné que le coefficient de X^2 est $-\rho < 0$, alors le point double $B = (\frac{1}{2}, 0)$ est un col-noeud attractif (resp. répulsif) si $\delta > \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4}$ (resp. $\delta < \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4}$) et $\rho = 4\lambda$.

Théorème 4.5. Soit $\eta := \frac{\sqrt{\rho(\rho-4\lambda)}}{2\rho}$. Lorsque $\rho > 4\lambda$, le point singulier $C := (\frac{1}{2} - \eta, 0)$ (resp. $D := (\frac{1}{2} + \eta, 0)$) est un col-noeud répulsif (resp. attractif) sur la surface (Cn_r) (resp. (Cn_a)) d'équation $\delta = p(\frac{1}{2} - \eta)$ (resp. $\delta = p(\frac{1}{2} + \eta)$).

Si $\lambda \in]0, \frac{\rho}{4}[$, alors la réunion, (Cn), des surfaces de bifurcations de col-noeud, $(Cn_r): \delta = p(\frac{1}{2} - \eta)$ et $(Cn_a): \delta = p(\frac{1}{2} + \eta)$, est définie par l'équation :

(4.14)
$$(Cn): \left(\lambda^2 \alpha^2 + \rho \left(-2 \alpha + \beta^2 + \beta \alpha\right) \lambda + \rho^2 \left(1 + \beta + \alpha\right)\right) \delta^2 + \left(-2 \lambda^2 \alpha - \rho \left(-2 + \beta\right) \lambda - \rho^2\right) \delta + \lambda^2 = 0.$$

(4.14) est une équation polynomiale de degré 2 en δ , à coefficients polynomiaux en α, β, ρ et λ . A la limite, quand $\lambda = 0$, (Cn_r) se confond avec $\delta = 0$.

Démonstration. En effet, pour $a := \frac{1}{2} \pm \eta$, ces deux points doubles sont chacun de la forme M = (a, 0) tel que $\rho a^2 - \rho a + \lambda = 0$ et $p(a) = \delta$. La matrice jacobienne est donnée en (4.9). Elle a pour valeurs propres $\lambda_1 = \pm 2\rho\eta$ et 0. On a $\lambda_1 > 0$ en C et négatif en D. Un calcul permet de vérifier qu'un point M = (a, 0) est exactement de multiplicité 2. Si $\lambda \in]0, \frac{\rho}{4}[$, alors (Cn_r) et (Cn_a) correspondent aux lieux où un point singulier du premier quadrant ouvert se confond avec un point singulier situé sur l'axe des abscisses, c'est-à-dire lorsque le résultant de $f(x) := (\alpha \delta - 1)x^2 + \beta \delta x + \delta$ (qui donne l'abscisse des points singuliers dans le premier quadrant) et $g(x) := \rho x^2 - \rho x + \lambda$ (qui donne l'abscisse des points singuliers sur l'axe des x) est nul. Le résultant R de f et g est donné en (4.14). Le discriminant de R est donné par $\rho (\rho - 4\lambda) (\lambda \beta + \rho)^2 > 0$; d'où le résultat annoncé.

5. BIFURCATION DE HOPF

Lorsque nous étudierons la bifurcation de Hopf de notre système, nous le ramenerons à un système de Liénard généralisé car le calcul des coefficients de Lyapunov d'un tel système se fait très bien.

5.1. Calcul des coefficients de Lyapunov d'un système de Liénard généralisé. Considérons un système de Liénard généralisé,

(5.1)
$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = g(x) + yf(x), \quad o\dot{u} \end{cases}$$
$$g(x) := x + \sum_{i=2}^{+\infty} a_i x^i, \quad f(x) := \sum_{j=1}^{+\infty} b_j x^j.$$

On sait par [33] que, pour (5.1), il existe une série entière

(5.2)
$$F := \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \sum_{p=3}^{\infty} F_p(x, y) \quad o\dot{u} \quad F_p(x, y) = \sum_{i=0}^{p} a_{i,p-i} x^i y^{p-i}$$

telle que

(5.3)
$$\dot{F} = \sum_{k=1}^{\infty} L_k (x^2 + y^2)^{k+1}.$$

Les L_k sont appelés "coefficients de Lyapunov" ou, par [9], « coefficients de la bifurcation de Hopf » de (5.1). Ils sont trouvés en opérant degré par degré sur (5.3) :

Théorème 5.1. Les deux premiers coefficients de Lyapunov du sytème de Liénard généralisé, (5.1), simplifiés sous la condition que les précédents sont nuls, sont :

(5.4)
$$L_1 = \frac{1}{8}(b_2 - a_2b_1),$$

(5.5)
$$L_2 = \frac{1}{16} \left(\frac{5}{3} a_2 b_1 a_3 - \frac{5}{3} a_2 b_3 + b_4 - a_4 b_1 \right).$$

Remarque 5.2. Nous avons calculé L_3 , L_4 et L_5 pour valider notre conjecture que $E = (x_0, y_0)$ est un centre lorsque $\beta = 0$. Les formules se trouvent dans la thèse[17].

5.2. Existence et ordre de la Bifurcation de Hopf.

Théorème 5.3. Lorsque $\beta > 0$, on a une bifurcation de Hopf d'ordre inférieur ou égal à deux ([11],[27]) au voisinage de $E = (x_0, y_0)$. (où $x_0 \in]x_{01}, \frac{1}{2}[$) Lorsque l'ordre de la bifurcation est 2, le coefficient L_2 est strictement positif.

 $D\acute{e}monstration.$ On se rappelle ici que (5.6)

$$\begin{split} \rho > 4\lambda, 0 < \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\rho(\rho - 4\lambda)}}{2\rho} < x_0 < \frac{1}{2}, p(x_0) = \delta < \frac{1}{\delta}, y_0 = \frac{\rho x_0(1 - x_0) - \lambda}{\delta}, \\ Det(\mathbf{Jac}(\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0})) = \delta y_0 p'(x_0) > 0. \end{split}$$

Alors :

• On multiplie (1.4) par $q(x) := \alpha x^2 + \beta x + 1 > 0$, puis on ramène E à l'origine par la translation « $x_1 = x - x_0$, $y_1 = y - y_0$ ». En utilisant le fait que $p(x_0) = \delta$ et $y_0 = \frac{\rho x_0(1-x_0)-\lambda}{\delta}$, on obtient le système, **(S)**, suivant (5.7)

$$(\mathbf{S}) \begin{cases} \dot{x}_{1} = -\alpha \rho x_{1}^{4} - \rho \left(4 \alpha x_{0} - \alpha + \beta\right) x_{1}^{3} + \\ + \left(-y_{1} - \frac{5 \alpha \rho x_{0}^{4} - \beta \lambda x_{0} - 2 \alpha \rho x_{0}^{3} + 2 \beta \rho x_{0}^{3} + \rho x_{0} - \lambda}{x_{0}^{2}}\right) x_{1}^{2} - y_{1} x_{0}^{2} + \\ + \left(-2 y_{1} x_{0} - \frac{\rho x_{0} - 2 \lambda + 2 \alpha \rho x_{0}^{4} + \beta \rho x_{0}^{3} - \beta \lambda x_{0} - \alpha \rho x_{0}^{3}}{x_{0}}\right) x_{1}, \\ \dot{y}_{1} = \left(\frac{(\beta x_{0} + 1)y_{1}}{\alpha x_{0}^{2} + \beta x_{0} + 1} - \frac{(-\rho x_{0} + \rho x_{0}^{2} + \lambda)(\beta x_{0} + 1)}{x_{0}^{2}}\right) x_{1}^{2} + \\ + \left(\frac{x_{0}(\beta x_{0} + 2)y_{1}}{\alpha x_{0}^{2} + \beta x_{0} + 1} - \frac{(\beta x_{0} + 2)(-\rho x_{0} + \rho x_{0}^{2} + \lambda)}{x_{0}}\right) x_{1}, \end{cases}$$

dont la matrice jacobienne, évaluée à l'origine, est

$$\mathbf{Jac}(\mathbf{x_1} = \mathbf{0}, \mathbf{y_1} = \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -\frac{\rho x_0 - 2\lambda + 2\alpha \rho x_0^4 + \beta \rho x_0^3 - \beta \lambda x_0 - \alpha \rho x_0^3}{x_0} & -x_0^2 \\ -\frac{(\beta x_0 + 2)(-\rho x_0 + \rho x_0^2 + \lambda)}{x_0} & 0 \end{pmatrix}.$$

• Pour avoir une bifurcation de Hopf, on doit faire l'hypothèse que la trace est nulle, c'est à dire

(5.8)
$$\lambda = \frac{\rho(2\alpha x_0^3 + \beta x_0^2 - \alpha x_0^2 + 1)x_0}{\beta x_0 + 2}.$$

(bien défini car, pour tous $\alpha > 0, \beta \ge 0, \rho > 0 : 0 < \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\rho(\rho-4\lambda)}}{2\rho} < x_0 < \frac{1}{2} \Rightarrow 2\alpha x_0^3 + \beta x_0^2 - \alpha x_0^2 + 1 > 0)$. Ce qui donne explicitement $Det(\mathbf{Jac}(\mathbf{x_1} = \mathbf{0}, \mathbf{y_1} = \mathbf{0})) = \rho(1 - 2x_0)(\alpha x_0^2 + \beta x_0 + 1)x_0^2 > 0$ car $0 < x_0 < \frac{1}{2}$.

• Considérons la transformation définie par « $X = x_1, Y = \frac{x_0^2}{\omega} y_1$ » où (5.9) $\omega^2 = \rho(1 - 2x_0)(\alpha x_0^2 + \beta x_0 + 1)x_0^2.$

Alors, via
$$(5.8)$$
, le système (S) devient sous la forme

(5.10)
$$\dot{X} := -YP_0(X) + g_0(X), \quad \dot{Y} := g_1(X)Y + g_2(X),$$
où

$$P_0(X) = \frac{\omega(x_0 + X)^2}{x_0^2} > 0.$$

En multipliant (5.10) par $\frac{1}{P_0(X)}$ et en utilisant les mêmes notations de (5.10), on obtient un système de la forme

(5.11) $\dot{X} := -Y + L(X), \quad \dot{Y} := h_1(X)Y + h_2(X).$

Donc, en appliquant la transformation suivante au système précédent,

(5.12) $-Y_1 = -Y + L(X), \quad X_1 = X,$

on remet le système sous la forme de Liénard suivante

(5.13)
$$\begin{cases} \dot{X}_1 = -Y_1, \\ \dot{Y}_1 = g(X_1) + Y_1 f(X_1), \end{cases}$$

où

$$g(X) := X + \sum_{i=2}^{+\infty} a_i X^i, \quad f(X) := \sum_{i=1}^{+\infty} b_i X^i.$$

Les coefficients $a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4$... sont calculés avec Maple.

Ainsi, par les formules des coefficients de Lyapunov obtenues à la sous-section précédente et (5.9), avons-nous que le signe de L_1 est aussi celui de :

$$L_1(x_0) := \rho^2 x_0^2 (1 - 2x_0) (\alpha x_0^2 + \beta x_0 + 1)^2 [(\beta^3 + 2\alpha \beta - \alpha \beta^2) x_0^4 + (6\beta^2 - 6\alpha \beta) x_0^3 + (6\beta - 6\alpha) x_0^2 + 4\beta x_0 + 6]$$
(5.14)

qui s'annule en

(5.15)
$$\alpha = \frac{\beta^3 x_0^4 + 6\beta^2 x_0^3 + 6\beta x_0^2 + 4\beta x_0 + 6}{x_0^2 (-2\beta x_0^2 + 6\beta x_0 + 6 + \beta^2 x_0^2)}$$

(bien défini car, pour tout $\beta > 0 : 0 < x_0 < \frac{1}{2} \Rightarrow -2\beta x_0^2 + 6\beta x_0 + 6 + \beta^2 x_0^2 = \beta x_0(1-2x_0) + 5\beta x_0 + 6 + \beta^2 x_0^2 > 0$).

On remarque donc que $L_1(x_0)$ peut aussi s'écrire (en utilisant (5.8)) comme (5.16)

$$l_1(\lambda, x_0) := -2\beta^2 \rho \, x_0^5 - 6\,\rho \,\beta \, x_0^4 + \left(\lambda \,\beta^2 - 2\,\beta \,\lambda - \rho \,\beta - 6\,\rho\right) x_0^2 + 6\,\lambda \,\beta \, x_0 + 6\,\lambda.$$

Donc, pour cette valeur de α on a que le signe de L_2 est aussi celui de

$$L_{2}(x_{0}) = \frac{2 (-2 x_{0} + 1) x_{0}^{2} \beta \rho^{2} (\beta x_{0}^{2} + \beta x_{0} + 3)^{3} (\beta x_{0} + 2)^{7}}{(-2 \beta x_{0}^{2} + 6 \beta x_{0} + 6 + \beta^{2} x_{0}^{2})^{4}}$$

$$(5.17) \qquad \left[3 + (4 \beta + 18) x_{0} + 4 \beta x_{0}^{2} + 18 \beta x_{0}^{3} + 11 \beta^{2} x_{0}^{4} + \beta^{3} x_{0}^{5}\right]$$

qui est strictement positif pour tout $\beta > 0$; d'où le résultat.

5.3. Analyse du cas $\beta = 0$. On se rappelle que les résultats sur les bifurcations de col-noeuds et de Hopf d'ordre 1 sont les mêmes pour les cas $\beta > 0$ et $\beta = 0$ (voir les sous-sections précédentes y relatives). Pour les autres bifurcations, les cas $\beta > 0$ et $\beta = 0$ ne fonctionnent pas pareillement et nous voyons la conjecture suivante.

Conjecture 5.4. Si $\beta = 0$ et $L_1 = 0$, alors le point singulier $E = (x_0, y_0)$ est un centre (c'est-à-dire qu'il existe un voisinage U de E tel que toutes les orbites de $U \setminus \{E\}$ soient périodiques).

Illustration La conjecture est appuyée par le fait que lorsque $\beta = 0$ et $L_1 = 0$, alors $L_2 = L_3 = L_4 = L_5 = 0$; ce qui est, par [9], une condition nécessaire pour que $E = (x_0, y_0)$ soit un centre (détails des calculs en [17]).

6. BIFURCATION DE COL NILPOTENT

6.1. Forme normale au point nilpotent.

Théorème 6.1. Si $\rho = 4\lambda$ et $\delta = \frac{1}{\alpha+2\beta+4}$, alors il existe une bifurcation de col nilpotent au voisinage du point singulier $B = (\frac{1}{2}, 0)$: le système localisé au point

singulier de multiplicité 3 est, pour k > 5, C^k -équivalent au système

(6.1)
$$\begin{cases} X = Y + aX^2, \\ \dot{Y} = Y \left(X + \alpha_2 X^2 + \alpha_3 X^3 + \alpha_4 X^4 + O(|X|^5) \right), & où\\ \alpha_2 = -\frac{\alpha \beta + 6 \alpha - \beta^2 - 8 \beta - 24}{2 \left(\beta + 4\right)^2}. \end{cases}$$

Pour $\alpha_2 \neq 0$, le point est de codimension 3. Pour tout $\beta > 0$, α_2 s'annule en

(6.2)
$$\alpha = \alpha_{\beta} := \frac{\beta^2 + 8\beta + 24}{\beta + 6} > 0:$$

Si $\alpha = \alpha_{\beta}$ et $\beta > 0$, alors pour i = 3, 4, les coefficients de XⁱY dans la forme normale (6.1) deviennent $\tilde{\alpha}_i$, où :

$$\tilde{\alpha}_{3} = -\frac{3(\beta^{2} + 12\beta + 48)}{4(\beta + 6)^{2}} < 0 \quad et \quad \tilde{\alpha}_{4} = \frac{3\beta(\beta^{2} + 18\beta + 96)}{8(\beta + 6)^{3}} > 0.$$

Remarque 6.2. Si $\beta = 0$ et $\alpha_2 = 0$, alors $\alpha_4 = \alpha_6 = 0$. On conjecture donc que :

Conjecture 6.3. Si $\beta = 0$ et $\alpha_2 = 0$, alors la forme normale (6.1) est invariante sous le changement $X \mapsto -X, t \mapsto -t$, c'est-à-dire que le système est réversible et donc de codimension infinie.

- Remarque 6.4. (1) Dans le cas $\alpha_2 = 0$ et $\tilde{\alpha}_4 \neq 0$, on conjecture que la codimension est 4 parce que le coefficient $\tilde{\alpha}_3$ ne semble jouer aucun rôle dans la structure du diagramme de bifurcation. Il n'en joue aucun pour les bifurcations globales et il reste à vérifier que c'est toujours le cas pour les bifurcations globales.
 - (2) Dans notre système, la contrainte que la droite d'équation Y = 0 est invariante diminue la codimension effective de un.

Démonstration du théorème 6.1. Celle-ci sera faite en plusieurs étapes :

(1) Localisation du système initial : On ramène la singularité $B = (\frac{1}{2}, 0)$ à l'origine par la translation « $x_1 = x - \frac{1}{2}, y_1 = y$ », on tient compte du fait que $\delta = \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4}$ et $\rho = 4\lambda$, et on multiplie le système obtenu par $\frac{1}{p(x_1+\frac{1}{2})} > 0$.

Posons $K := \frac{4(\beta+4)}{\alpha+2\beta+4}$. Alors, par la transformation « $x_2 = Kx_1$, $y_2 = -Ky_1$ »le sytème précédent devient : (63)

$$\begin{cases} \dot{x}_{2} = \frac{(\alpha+2\beta+4)^{4}\rho(\beta+8)x_{2}^{5}}{16(\beta+4)^{4}} - \frac{(\alpha+2\beta+4)^{3}\rho(\beta+6)x_{2}^{4}}{8(\beta+4)^{3}} - a x_{2}^{3} + a x_{2}^{2} + y_{2} + O(|x_{2}|^{6}), \\ \dot{y}_{2} = y_{2} \left[-\frac{(\alpha+2\beta+4)^{3}(\beta+10)x_{2}^{4}}{8(\beta+4)^{4}} + \frac{(\alpha+2\beta+4)^{2}(\beta+8)x_{2}^{3}}{4(\beta+4)^{3}} - \frac{(\alpha+2\beta+4)(\beta+6)x_{2}^{2}}{2(\beta+4)^{2}} + x_{2} + O(|x_{2}|^{5}) \right], \\ O) \end{cases}$$

ou

(6.4)
$$a := -\frac{\rho \left(\alpha + 2\beta + 4\right)^2}{4(\beta + 4)} < 0,$$

dont la matrice jacobienne, évaluée à l'origine, est $\mathbf{J} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) Changement de variables normalisantes et d'échelle sur le temps : Il existe un changement de variables préservant la droite invariante $y_2 = 0$ et un changement d'échelle sur le temps ramenant le système (6.3) à

(6.5)
$$\begin{cases} \dot{X} = Y + aX^2, \\ \dot{Y} = Y \left(X + O(|X|^2) \right). \end{cases}$$

En effet, le système (6.3) est de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_2 := y_2 + a x_2^2 h(x_2), \\ \dot{y}_2 := y_2 g(x_2), \quad o \dot{u} \end{cases}$$

(6.6)
$$h(x_2) = 1 - x_2 + O(|x_2|^2)$$
 et $g(x_2) = x_2 + O(|x_2|^2)$

Considérons maintenant les changements de variables et d'échelle sur le temps suivants

(6.7)
$$X = x_2 \sqrt{h(x_2)} = x_2 (1 + O(|x_2|)) := H(x_2), \quad t = k(X)T$$

оù

$$k(X) := (H^{-1})'(X) = 1 + O(|x_2|).$$

On a

8)

$$\frac{dX}{dT} = \frac{dX}{dx_2} \frac{dx_2}{dt} \frac{dt}{dT} = H'(x_2) \left[y_2 + ax_2^2 h(x_2) \right] k(X) = \left[\left(H^{-1} \right)'(X) \right]^{-1} (Y + aX^2) \left(H^{-1} \right)'(X) = Y + aX^2 \quad et$$

$$\frac{dY}{dT} = \frac{dY}{dy_2} \frac{dy_2}{dt} \frac{dt}{dT}$$
(6.9)
$$= Y \left(H^{-1}(X) + \sum_{i=2}^{6} \alpha_{0i} \left(H^{-1}(X) \right)^i + \dots \right) \left(H^{-1} \right)^i (X) = YG(X)$$

où G(X) = X + o(X) se calcule aisément. Ce qui est bien (6.1). Le détail des calculs et simplifications des α_i a été omis.

Type topologique du point singulier $B = (\frac{1}{2}, 0)$: Comme a < 0, alors le type topologique de B est celui d'un col nilpotent (figure 6.1). Ceci se voit aisément par un éclatement avec poids (voir aussi [39]).

6.2. Forme normale pour la famille déployant le col nilpotent. Soit

(6.10)
$$\nu_1 := \rho - 4\lambda, \quad \nu_2 := \delta - \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4} \quad et \quad \nu := (\nu_1, \nu_2).$$

Nous étudions le système (1.4) lorsque le paramètre $\nu := (\nu_1, \nu_2)$ est dans un voisinage de (0, 0) et que (x, y) est dans un voisinage de $(\frac{1}{2}, 0)$.

Proposition 6.5. Si (x, y, ν_1, ν_2) est dans un voisinage de $(\frac{1}{2}, 0, 0, 0)$, alors le système (1.4) est topologiquement orbitalement équivalent à

(6.11)
$$\begin{cases} \overline{X} = \overline{Y} + q(\overline{X})r(\overline{X}), \\ \overline{Y} = \overline{Y}f(\overline{X}), \quad ou \end{cases}$$



FIG. 6.1. Col nilpotent

(6.12)
$$\begin{cases} q(\overline{X}) := a\overline{X}^2 + \mu_0(\nu), \\ r(\overline{X}) := 1 + O(|\nu|) \left(1 + O(|\overline{X}|) \right), \\ f(\overline{X}) := O(|\nu|) + (1 + O(|\nu|)) \overline{X} + \sum_{i=2}^4 (\alpha_i + O(|\nu|)) \overline{X}^i + O(|\overline{X}|^5), \end{cases}$$

les α_i étant définis en (6.1).

 $D\acute{e}monstration.$ Afin d'alléger le texte et pour ne pas nous répéter, nous allons plutôt expliquer la méthode et, lorsque c'est utile, nous présenterons certaines expressions. En effet :

• On applique la translation « $x_1 = x - \frac{1}{2}$, $y_1 = y$ » on divise par $p(x_1 + \frac{1}{2})$ et on obtient un système dont \dot{y}_1 a pour coefficient en x_1y_1 l'expression suivante

(6.13)
$$K_{\nu_2} = \frac{4(\beta+4)}{\alpha+2\beta+4} [1+\nu_2(\alpha+2\beta+4)].$$

• On applique la transformation « $x_2 = K_{\nu_2} x_1$, $y_2 = -K_{\nu_2} y_1$ » où K_{ν_2} est donné en (6.13) : On obtient

(6.14)
$$\begin{cases} \dot{x}_2 = f_2(x_2, \nu_1, \nu_2) + y_2, \\ \dot{y}_2 = y_2 g_2(x_2, \nu_1, \nu_2), \quad o \dot{u} \\ f_2(0, 0, 0) = 0, \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(0, 0, 0) = 0 \quad et \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2}(0, 0, 0) = a < 0 \end{cases}$$

Alors, par le théorème de préparation de Weierstrass [10], il existe une fonction analytique u dans un voisinage de $(0,0,0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ et deux fonctions analytiques $\epsilon_0(\nu_1,\nu_2)$ et $\epsilon_1(\nu_1,\nu_2)$ dans un voisinage $(0,0) \in \mathbf{R}^2$ telles que u(0,0,0) = a < 0, $\epsilon_0(0,0) = 0$, $\epsilon_1(0,0) = 0$ et

$$f_2(x_2,\nu_1,\nu_2) = \left[\epsilon_0(\nu_1,\nu_2) + \epsilon_1(\nu_1,\nu_2)x_2 + x_2^2\right]u(x_2,\nu_1,\nu_2).$$

Ainsi

(6.15)
$$\dot{x}_2 = y_2 + \left[\left(x_2 + \frac{\epsilon_1(\nu)}{2} \right)^2 - \frac{\epsilon_1(\nu)^2 - 4\epsilon_0(\nu)}{4} \right] u(x_2, \nu_1, \nu_2),$$

où $u(x_2, 0, 0) = ah(x_2)$ et $h(x_2)$ est défini au (6.6).

• On obtient le résultat en appliquant la translation «
$$X = x_2 + \frac{\epsilon_1(\nu)}{2}, Y = y_2$$
 » et
en posant $\mu_0(\nu_1, \nu_2) := -\frac{a[\epsilon_1(\nu_1, \nu_2)^2 - 4\epsilon_0(\nu_1, \nu_2)]}{4}$.

Théorème 6.6. (1) Si $\alpha_2 \neq 0$, alors le système (1.4) est topologiquement orbitalement équivalent à

(6.16)
$$\begin{cases} \dot{X} = Y + a(\nu)X^2 + \mu_2, \\ \dot{Y} = Y \left(\mu_3 + X + \epsilon_2 X^2 + O(X^3) \right) + Y^2 Q_1(X,\nu), \\ o \dot{u} \ a(\nu) < 0, \ \epsilon_2 = \mp 1, \ Q_1(X,0) = 0. \end{cases}$$

(2) Si $\alpha_2 = 0$ et $\beta > 0$, alors le système (1.4) est topologiquement orbitalement équivalent à

(6.17)
$$\begin{cases} \dot{X} = Y + a(\nu)X^2 + \mu_2, \\ \dot{Y} = Y \left[\mu_3 + X + \mu_4 X^2 + \hat{\alpha}_3 X^3 + X^4 + O(X^5) \right] + Y^2 Q_2(X,\nu), \\ o \dot{u} \ a(\nu) < 0, \ \hat{\alpha}_3 := (\tilde{\alpha}_3 + O(|\nu|)(\tilde{\alpha}_4 + O(|\nu|))^{-\frac{2}{3}}, \ Q_2(X,0) = 0. \end{cases}$$

Démonstration. On commence par appliquer au système dépendant des paramètres les transformations qui, pour $\nu = 0$ l'amènent sous la forme (6.1). On lui applique ensuite la proposition 6.5. On prend maintenant les changements de variable et d'échelle sur le temps suivants

(6.18)
$$\overline{X} = X, \overline{Y} = Yr(\overline{X}), \overline{t} = \frac{t}{r(\overline{X})}.$$

Alors

(6.19)
$$\dot{Y} := \frac{dY}{dt} = Y \left[\frac{f(X)}{r(X)} - \frac{r'(X)q(X)}{r(X)} \right] + Y^2 \left[-\frac{r'(X)}{r(X)} \right],$$

où $f(X),\,r(X)$ et q(X) sont définis en (6.12). Ainsi (6.20)

$$\begin{cases} X = Y + q(X), \\ \dot{Y} = Y \left[(\alpha + 2\beta + 4)\nu_2 - \frac{\epsilon_1(\nu)}{2} + o(|\nu|) + (1 + O(|\nu|))X + (\alpha_2 + O(|\nu|))X^2 \\ + O(|\nu|)X^3 + (\alpha_4 + O(|\nu|))X^4 + O(|X|^5) \right] + Y^2 Q_1(X,\nu), \end{cases}$$

où $Q_1(X,0) = 0$ parce qu'on est parti d'un système qui avait déjà cette forme pour $\nu = 0$ et que la transformation est l'identité pour $\nu = 0$. Posons $K_1 := 1 + O(|\nu|)$. Deux cas s'imposent :

• Si $\alpha_2 \neq 0$, alors la transformation « $\tilde{X} = K_1 X$, $\tilde{Y} = K_1 Y$ » permet de se ramener au cas $\alpha_2 = \pm 1$ en renommant *a* et $\mu_0(\nu)$.

• Si $\alpha_2 = 0$ et $\beta > 0$, alors $\alpha_2 + O(|\nu|)$ (le coefficient de YX^2 dans (6.20)) devient $O(|\nu|)$ (indépendant des deux premiers). Comme $\overline{\alpha}_4 > 0$ par le théorème 6.1, la transformation « $\tilde{X}_1 = (\overline{\alpha}_4)^{\frac{1}{3}}X$, $\tilde{Y}_1 = (\overline{\alpha}_4)^{\frac{2}{3}}Y$ » et une multiplication du système permettent de se ramener à $\alpha_4 = 1$.

6.3. Diagramme de bifurcations des familles (6.16) et (6.17). Tel que pressenti dans ce genre de problèmes, le diagramme de bifurcations de la famille (6.16) sera le même (toplogiquement) que celui de la famille standard

(6.21)
$$\begin{cases} \dot{X} = Y + a(\nu)X^2 + \mu_2, \\ \dot{Y} = Y\left(\mu_3 + X + \epsilon_2 X^2\right), \end{cases}$$

et nous pressentons que, de même, le diagramme de bifurcation de la famille (6.17) sera le même que celqui de la famille standard

(6.22)
$$\begin{cases} \dot{X} = Y + a(\nu)X^2 + \mu_2, \\ \dot{Y} = Y \left(\mu_3 + X + \mu_4 X^2 + \tilde{\alpha}_3 X^3 + X^4\right), \end{cases}$$

où $\epsilon_2 = \pm 1$, $a(\nu) < 0$ pour $\nu := (\nu_1, \nu_2)$ suffisamment petit et $\mu_i := \mu_i(\nu)$.

Nous discuterons ceci en détails dans [18] et beaucoup de détails se trouvent dans [17]. Pour fin de complétude, nous donnons un abrégé de la preuve ici : pour aider à l'interprétation, on utilise les mêmes lettres C, D et E que pour les points singuliers correspondants de (1.4). Mais il faut remarquer que la région y > 0 de (1.4) correspond ici à Y < 0.

Théorème 6.7. le digramme de bifurcations du système (6.16) se trouve à la figure 6.2. La figure présente le cas $\epsilon_2 = +1$ et le cas $\epsilon_2 = -1$ est obtenu par la transformation $(X, Y, \mu_2, \mu_3, t) \longmapsto (-X, Y, \mu_2, -\mu_3, -t)$.

Démonstration. Le système a deux points singuliers C et D sur l'axe X lorsque μ_2 est positif et une bifurcation de col-noeud pour $\mu_2 = 0$. Par le théorème des fonctions implicites, on peut voir qu'on a un autre point singulier $E = (x_0, y_0)$ qui est un anti-selle (resp. selle) lorsqu'il est situé en dessous (resp. au-dessus) de Y = 0. Au moment où le point E traverse l'axe X en C (resp. D), on a une bifurcation de col-noeud attractif (resp. répulsif). Dans la région où E est anti-selle on a une bifurcation de Hopf d'ordre 1, dont le premier coefficient de Lyapunov a le signe de ϵ_2 . Le cycle limite qu'elle fait naître autour de E doit disparaître avant que E ne traverse dans la région Y > 0. Ceci ne peut se produire que dans une bifurcation de boucle hétéroclinique. Le rapport d'hyperbolicité d'un point de selle est la valeur absolue du quotient de sa valeur propre négative par sa valeur propre positive. Soit r_C (resp. r_D) le rapport d'hyperbolicité de C (resp. D). En calculant le produit $r_C r_D$ au moment de la boucle hétéroclinique, on vérifie que $r_C r_D > 1$ (resp. $r_C r_D < 1$), c'est-à-dire que cette bouche est répulsive (resp. attractive) pour $\epsilon_2 > 0$ (resp. $\epsilon_2 < 0$). Comme le système est rotationnel en μ_3 pour μ_2 fixé, ceci nous donne que le lieu de la boucle hétéroclinique est de la forme $\mu_3 = g(\mu_2)$ pour $\mu_2 > 0.$

Théorème 6.8. le digramme de bifurcations du système (6.17) a une structure de cône. Son intersection avec une sphère S_{ϵ} se trouve à la figure 6.3 (voir aussi table 2.1), où $S_{\epsilon} = \{(\mu_2, \mu_3, \mu_4) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \mu_2^2 + \mu_3^2 + \mu_4^2 = \epsilon^2\}$ avec $\epsilon > 0$ suffisamment petit. Sont exactes : les bifurcations de col-noeud, de Hopf d'ordre 1 et 2, et la position qualitative de la boucle hétéroclinique. Sont conjecturées :

- la structure de cône;

- l'unicité des points correspondant à une boucle hétéroclinique d'ordre 2;
- l'ordre exact de la bifurcation hétéroclinique lorsqu'il est supérieur à 1;
- l'unicité du point d'intersection de la bifurcation de Hopf avec la boucle hétéroclinique;
- la conséquence qu'il y a au plus deux cycles limites.

Dans le cas particulier où $\hat{\alpha}_3 = O(\nu)$ et le terme en XY^2 a un coefficient $O(\nu)$, ces conjectures deviennent des preuves.



FIG. 6.2. Diagramme de bifurcations et portraits de phase du système (6.21) pour $\epsilon_2 = +1$.

Démonstration. L'etude des points singuliers est similaire au cas précédent. Dans le cas de la bifurcation de Hopf d'ordre 2, il est facile de vérifier que le terme en X^3Y de coefficient $\hat{\alpha}_3$ ne joue pas de rôle important et ne peut détruire la tendance donnée par le terme en X^4Y . Pour μ_2 , μ_3 fixés (resp. μ_2 , μ_4 fixés), le système est rotationnel en μ_4 (resp. μ_3), ce qui nous montre que la surface de bifurcation de boucle hétéroclinique ne coupe qu'une fois chaque droite correspondante. Nous obtenons donc bien la position qualitative de la surface. Il est clair que la bifurcation hétéroclinique est répulsive (resp. attractive) au voisinage de $\mu_2 = \mu_3 = 0$, $\mu_4 > 0$ (resp. $\mu_4 < 0$) et que la quantité $r_C r_D - 1$ doit donc s'annuler entre les deux. Une manière de faire une étude complète de l'ordre de la bifurcation hétéroclinique lorsque supérieur à 2 est de faire un éclatement qui nous ramène à une perturbation d'un système hamiltonien. Mais, pour cela, nous avons besoin de la condition $\hat{\alpha}_3 = O(\nu)$. Par contre, dans ce dernier cas, nous pouvons prouver tous les détails ([18]).



FIG. 6.3. Trace du diagramme de bifurcations sur S_{ϵ} et portraits de phase du système (6.22) (voir aussi table 2.1).

Nous continuous à travailler pour boucher les trous dans la preuve du théorème 6.8. Une meilleure forme normale pour un système avec une droite invariante permettrait de rendre notre argument tout à fait rigoureux.

7. DIAGRAMME DE BIFURCATIONS

7.1. **Présentation de la section.** On rappelle que le système que nous étudions a 5 paramètres réels : ρ , α , δ , λ sont strictement positifs, $\beta \ge 0$; et nous avons utilisé

le paramètre η défini en (4.8).

Par l'étude (précédente) des bifurcations de (1.4), celles-ci n'ont lieu que sous les conditions de base suivantes :

(7.1)
$$\rho \ge 4\lambda \quad ou \quad \delta < \frac{1}{\alpha}.$$

On choisit de présenter le diagramme de bifurcations dans l'espace $(\alpha, \delta, \lambda)$ pour les différentes valeurs de (β, ρ) . La plupart du temps, nous donnerons les coupes du diagramme de bifurcations dans le plan (α, δ) pour différents $\lambda \ge 0$.

Commençons par la petite remarque suivante.

Remarque 7.1. La droite d'équation y = 0 reste invariante sous le flot du système (1.4) alors que l'axe des ordonnées n'est plus invariant dès que $\lambda \neq 0$.

7.2. Position des bifurcations de col-noeud.

Théorème 7.2. (1) Dans le plan (α, δ) , soit

(7.2)
$$(CN): \delta = p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4}:$$

 (Cn_r) , (CN) et (Cn_a) sont des branches d'hyperboles représentées à la figure 7.1(a).

Plus précisément :

(2) Si $\lambda = \frac{\rho}{4}$ alors :

• la réunion de (Cn_r) et (Cn_a) se confond exactement avec (CN), qui correspond à un point singulier triple sur l'axe des x (i.e $B = (\frac{1}{2}, 0)$, col nilpotent);

• il existe un col-noeud répulsif, (CN_r) , (resp. attractif, (CN_a) ,) si $\delta < \frac{1}{\alpha+2\beta+4}$ (resp. si $\delta > \frac{1}{\alpha+2\beta+4}$) : voir la figure 7.1(b).

- (3) (Cn_a) est en-dessous de (CN) qui, à son tour, est en-dessous de (Cn_r) .
- (4) La droite d'équation :
 - $\delta = 0$ est asymptote horizontale à (Cn_r) , (Cn_a) et à (CN).
 - $\alpha = 0$ intersecte (Cn_r) , (Cn_a) et (CN) respectivement aux points $(0, f_r(0))$, $(0, f_a(0))$ et $(0, f_n(0))$ où $f_r(0) := \frac{(\frac{1}{2} - \eta)^2}{\beta(\frac{1}{2} - \eta) + 1}$, $f_a(0) := \frac{(\frac{1}{2} + \eta)^2}{\beta(\frac{1}{2} + \eta) + 1}$ et $f_n(0) = \frac{1}{2(\beta+2)}$.

 $D\acute{e}monstration$. En effet :

- (1) On sait que (Cn_r) est donné par $\delta = p(\frac{1}{2} \eta)$ et (Cn_a) par $\delta = p(\frac{1}{2} + \eta)$. La figure 7.1(a) découle donc de l'étude des fonctions $p(\frac{1}{2} - \eta)$, $p(\frac{1}{2})$ et $p(\frac{1}{2} + \eta)$ qui sont toutes de la forme $\frac{c_1}{\alpha c_2 + c_3}$ où $c_i > 0$.
- (2) Si $\lambda = \frac{\rho}{4}$, alors $\eta = 0$ et $g(x) := \rho x^2 \rho x + \lambda$ a une racine double; ainsi : • (Cn_r) et (Cn_a) se confondent exactement le long de la courbe (CN) qui correspond au point singulier triple $B = (\frac{1}{2}, 0)$, col nilpotent;
 - par la sous-section 4.3, les deux points singuliers de l'axe des abscisses se confondent de sorte que l'on obtienne un col-noeud répulsif, (CN_r) , (resp. attractif, (CN_a)) si $\delta < \frac{1}{\alpha+2\beta+4}$ (resp. si $\delta > \frac{1}{\alpha+2\beta+4}$).
- (3) Découle de $\frac{1}{2} \eta \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} + \eta$ car p est croissante.



FIG. 7.1. Sections, parallèles au plan (α, δ) , des surfaces de bifurcations de col-noeud (Cn_r) , (Cn_a) , (CN_r) et (CN_a) .

(4) Vient de la forme des courbes $p\left(\frac{1}{2} \pm \eta\right)$ et $p\left(\frac{1}{2}\right)$.

7.3. Bifurcation de Hopf. Rappelons qu'ici, on a (5.6) pour η défini en (4.8).

Théorème 7.3. Les différentes sections de la surface (\mathcal{H}) de bifurcation de Hopf par des plans parallèles au plan (α, δ) dans le premier quadrant sont représentées à la figure 7.2.



FIG. 7.2. Les sections, parallèles au plan (α, δ) dans le premier quadrant, de la surface de bifurcation de Hopf (\mathcal{H}) .

Proposition 7.4. Pour tout $\lambda \in]0, \frac{\rho}{4}[$, la surface de bifurcation de Hopf (dans l'espace $(\alpha, \delta, \lambda)$) est :

(i) strictement comprise entre $(Cn_r): \delta = p(\frac{1}{2} - \eta)$ et $(CN): \delta = p(\frac{1}{2})$; (ii) incluse dans la surface d'équation

$$(7.3) \ P(\alpha,\delta,\lambda) := A(\alpha,\lambda)\delta^4 + B(\alpha,\lambda)\delta^3 + C(\alpha,\lambda)\delta^2 + D(\alpha,\lambda)\delta + E(\alpha,\lambda) = 0, \quad o\dot{u}$$

$$\begin{split} \dot{A}(\alpha,\lambda) &= \alpha \left(-\beta^2 + 4\,\alpha\right) \left(\lambda^2 \alpha^2 + \rho \left(\rho - 2\lambda + \beta\lambda\right)\alpha + \rho\lambda\beta^2 + \rho^2 \left(1 + \beta\right)\right),\\ B(\alpha,\lambda) &= -\alpha^2 \left(16\,\alpha - 3\,\beta^2\right)\lambda^2 - \rho \left(2\,\alpha\,\beta^2 - 16\,\alpha^2 + \beta^4 - \alpha\,\beta^3 + 8\,\alpha^2\beta\right)\lambda \\ &-\rho^2 \left(\beta^3 + \beta^2 - \alpha\,\beta^2 + 8\,\alpha^2\right),\\ C(\alpha,\lambda) &= 3\,\alpha \left(-\beta^2 + 8\,\alpha\right)\lambda^2 + 4\,\rho \left(-\beta^2 - 2\,\alpha + \beta\,\alpha\right)\lambda + \rho^2 \left(-2\,\beta + 5\,\alpha\right),\\ D(\alpha,\lambda) &= \left(\beta^2 - 16\,\alpha\right)\lambda^2 - \rho^2 \quad et \quad E(\alpha,\lambda) = 4\,\lambda^2. \end{split}$$

Démonstration. Soit $\lambda \in]0, \frac{\rho}{4}[$:

(i) Découle de (5.6) et du fait que p est strictement croissante dans $]0, +\infty[$.

(ii) Le déterminant de la matrice jacobienne de (1.4) en (x_0, y_0) étant strictement positif, il y a bifurcation de Hopf lorsque la trace de cette matrice est nulle, c'està-dire lorsque s'annule le résultant de $f(x) := (\alpha \delta - 1)x^2 + \beta \delta x + \delta$ et

(7.5)
$$u(x) := -2\rho\alpha x^4 + \rho(\alpha - \beta)x^3 + (-\rho + \lambda\beta)x + 2\lambda.$$

Remarque 7.5. Pour tout $\rho \geq 4\lambda$, le facteur

$$A_0(\alpha,\lambda) := \lambda^2 \alpha^2 + \rho \left(\rho - 2\lambda + \beta\lambda\right) \alpha + \rho\lambda\beta^2 + \rho^2 \left(1 + \beta\right)$$

de $A(\alpha, \lambda)$ est strictement positif.

On va étudier en détails la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ et déterminer lesquelles de ses branches correspondent à une bifurcation de Hopf.

Remarque 7.6. Pour α grand, on voit que les coefficients de $P(\alpha, \delta, \lambda)$ sont de signe alterné. Ceci signifie, par le critère de Descartes, qu'il y a zéro ou 2 ou 4 branches à l'infini dans le premier quadrant. Dans la suite, nous allons voir que ce n'est que 2 dès que $\lambda > 0$.

Afin de nous aider à analyser $P(\alpha, \delta, \lambda)$, on donne, par le théorème suivant, un extrait des résultats classiques sur le nombre de racines d'un polynôme de degré 4.

Théorème 7.7 (Extrait du théorème 5.3.2 de [17], voir aussi [25]). Soit $P(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ où $a_4 \neq 0$, $P(x) \in \mathbf{R}[x]$, et Δ , son discriminant. Soit $P_1(X) = a_4 \left(X^4 + pX^2 + qX + r\right)$ l'image de P(x) par la translation $X = x + \frac{a_3}{4a_4}$, dont le discriminant est noté par Δ_1 . Alors $\Delta = \Delta_1$. Lorsque $q \neq 0$, on a

(7.6)
$$\Delta = \frac{a_4^6}{27} \left[4 \left(p^2 + 12r \right)^3 - \left(8p^3 + 27q^2 - 6p(p^2 + 12r) \right)^2 \right] \\ = \frac{a_4^6}{27} \left[-729 q^4 + 108 p \left(-p^2 + 36 r \right) q^2 + 432r \left(p^2 - 4r \right)^2 \right]$$

(i) Si $\Delta < 0$, alors P(x) aura deux racines simples réelles et deux racines simples complexes.

(ii) Si $\Delta = 0$, alors :

- pour $p^2 + 12r = 0$, P(x) aura une racine triple réelle et une racine simple réelle;
- pour $p^2 + 12r \neq 0$ et $(p^2 4r \leq 0 \text{ ou } p \geq 0)$, P(x) aura une racine double réelle et deux racines simples complexes;
- pour $p^2 + 12r \neq 0$ et $p^2 4r > 0$ et p < 0, P(x) aura une racine double réelle et deux racines simples réelles.

(iii) $Si \Delta > 0$, alors :

- pour $p^2 4r \le 0$ ou $p \ge 0$, P(x) aura quatre racines simples complexes;
- pour $p^2 4r > 0$ et p < 0, P(x) aura quatre racines simples réelles.

Théorème 7.8. La restriction de la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ au premier quadrant est représentée à la figure 7.3. Plus spécialement :

(i) La droite $\alpha = \frac{\beta^2}{4}$ (resp. $\delta = 0$) est asymptote verticale (resp. horizontale).

(ii) Pour λ petit, la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ admet un unique point de rebroussement qui, venant de l'infini à $\lambda = 0$, a pour coordonnées ($\alpha_r = \alpha(\lambda), \delta_r = \delta(\lambda)$) telles que $\alpha_r \to +\infty, \delta_r \to 0^+$ quand $\lambda \to 0$.





FIG. 7.3. Les branches de la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ dans le premier quadrant.

Démonstration. (i) Dans l'expression de $P(\alpha, \delta, \lambda)$, $(4\alpha - \beta^2)$ est un facteur de $A(\alpha, \lambda)$, le coefficient de δ^4 . Dans l'expression de $P(\alpha, \delta, \lambda)$, δ^4 est un facteur du coefficient de α^4 ; d'où le résultat.

(ii) Soit λ petit. Posons $\tau := \frac{1}{\alpha}$, $P(\alpha, \delta, \lambda) := P_1(\tau, \delta, \lambda)$ et $\frac{\partial P}{\partial \delta}(\alpha, \delta, \lambda) := P_2(\tau, \delta, \lambda)$.

Soit $D_{\lambda}(\tau)$ le résultant de $P_1(\tau, \delta, \lambda)$ et $P_2(\tau, \delta, \lambda)$ par rapport à δ , alors

$$D_{\lambda}(\tau) = \tau^{2} \left[\left(-24 + 3\beta^{2}\tau \right) \lambda^{2} + \left(4\rho\tau^{2}\beta^{2} + \left(-4\rho\beta + 8\rho \right)\tau \right) \lambda + 2\rho^{2}\tau^{2}\beta - 5\rho^{2}\tau \right] \\ \left[\left(-128 + \tau^{2}\beta^{4} + 16\beta^{2}\tau \right) \lambda^{4} + \left(64\rho\tau^{2}\beta^{2} - 64\rho\left(\beta - 2\right)\tau \right) \lambda^{3} \\ + \left(-2\beta\rho^{2}\left(-16 + \beta \right)\tau^{2} - 48\rho^{2}\tau \right) \lambda^{2} + \tau^{2}\rho^{4} \right] := \tau^{2}D_{1}(\tau,\lambda)D_{2}(\tau,\lambda).$$

On a que

(7.7)
$$D_1(0,0) = 0 \quad et \quad \frac{\partial D_1}{\partial \tau}(0,0) = -5\rho^2.$$

Donc, par le théorème des fonctions implicites, pour λ petit, il existe un seul $\tau = \tau(\lambda)$ voisin de 0 (et donc un seul $\alpha(\lambda) := \alpha_r \to +\infty$) tel que $D_1(\tau(\lambda), \lambda) = 0$. Or, par le diagramme de Newton [10] de $D_1(\tau, \lambda)$, on voit que les termes dominants de ce dernier sont $-24\lambda^2$ et $-5\rho^2\tau$; alors $D_1(\tau, \lambda)$ est approximé, pour (λ, τ) petit, par $-24\lambda^2 - 5\rho^2\tau$. De même, $D_2(\tau, \lambda)$ est approximé, pour (λ, τ) petit, par $\tau^2\rho^4 - 48\rho^2\tau\lambda^2 - 128\lambda^4$. Pour la première approximation, la racine en τ correspondante est strictement négative : elle est exclue ! Pour la deuxième approximation, on a deux racines en τ de signes contraires : il existe donc une seule racine en τ strictement positive. En conséquence, il existe $\delta_r = \delta(\lambda)$ racine commune de $P_1(\tau, \delta)$ et $P_2(\tau, \delta)$. Enfin, on voit bien que $\delta_r \to 0^+$ car la droite d'équation $\delta = 0$ est, pour λ petit (resp. $\lambda = 0$) asymptote horizontale de toutes les branches (resp. une composante) de la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$.

(iii) En effet, le discriminant de $P(\alpha, \delta, \lambda)$ par rapport à δ est de la forme $\Delta(\alpha, \beta, \lambda) := 4\rho^2 \Delta_1(\alpha, \beta, \lambda) [\Delta_2(\alpha, \beta, \lambda)]^2$, où :

$$\Delta_2(\alpha,\beta,\lambda) = -2\rho^2\lambda\,\alpha^2 + \rho\,\left(18\,\beta^2\lambda^2 + \beta^3\lambda^2 + 2\,\rho^2 + 16\,\rho\,\beta\,\lambda - \rho^2\beta\right)\alpha$$
(7.8)
$$+\beta^2\left(\rho + \rho\,\beta + \lambda\,\beta^2\right)\left(\beta^2\lambda^2 - 2\,\rho\,\lambda + \rho^2 + 2\,\rho\,\beta\,\lambda\right)$$

et $\Delta_1(\alpha, \beta, \lambda)$ est un polynôme de degré 4 en α .

Or, puisque $\rho \geq 4\lambda$, alors $\Delta_2(\alpha, \beta, \lambda)$ (qui est un polynôme de degré 2 en α) admet deux racines de signes contraires. Il existe donc un seul $\alpha := \alpha^* > 0$ tel que $\Delta_2(\alpha^*, \beta, \lambda) = 0$ (et donc que $\Delta(\alpha^*, \beta, \lambda) = 0$). Conséquemment, la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ admet un point d'auto-intersection. Celui-ci, point double ou triple, est dans le premier quadrant : en effet, il y est pour $\lambda = \frac{\rho}{4}$ et $\lambda = 0$; donc, par continuité, il y reste. Sinon on aurait plus d'un point d'intersection avec l'axe des ordonnées; ce qui n'est pas le cas d'après la proposition 7.9 ci-dessous. Ou bien, s'il passe à l'infini, on aurait une seule branche infinie dans la direction α ; ce qui n'est pas le cas d'après la proposition 7.13 ci-dessous. Or, comme il sera vu à la proposition 7.17 ci-dessous, la branche supérieure de la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ dans le premier quadrant est non admissible pour la bifurcation de Hopf. Donc ce point d'intersection entre une branche pertinente et une branche non pertinente de la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ n'est pas utile pour notre diagramme de bifurcation.

Il y a 5 endroits où l'étude de l'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ est plus facile :

$$\alpha = 0, \quad \alpha = \frac{\beta^2}{4}, \quad \delta = \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4}, \quad \lambda = 0, \quad \lambda = \frac{\rho}{4}.$$

On va étudier chacun des 5. En effet, notons

(7.9) $P_{(\alpha,\lambda)}(\delta) := P(\alpha,\delta,\lambda) = 0$

l'équation d'inconnue δ .

Proposition 7.9. Si $\alpha = 0$ et $\rho > 4\lambda$, alors l'équation (7.9) admet une seule solution positive, $\delta_1 \in [0, \frac{1}{2(\beta+2)}]$.

Démonstration. On a $P_{(0,\lambda)}(0) = 4\lambda^2 > 0$ et $P_{(0,\lambda)}\left(\frac{1}{2(\beta+2)}\right) < 0$; ainsi, il existe $\delta_1 \in]0, \frac{1}{2(\beta+2)}[$ tel que $P(0, \delta_1, \lambda) = 0.$

Montrons l'unicité de δ_1 . $P_{(0,\lambda)}(\delta)$ est un polynôme de degré 3 en δ , $P_{(0,\lambda)}(0) > 0$ et $\lim_{\delta \to +\infty} P_{(0,\lambda)}(\delta) = -\infty$. Alors, $P_{(0,\lambda)}(\delta)$ a un nombre impair de racines positives, soit 1 ou 3. Or, si on a 3 racines positives on doit avoir alternance de signe des coefficients de $P_{(0,\lambda)}(\delta)$; mais ceci n'est pas le cas car les coefficients de δ^3 et δ^2 dudit polynôme sont tous deux négatifs. Donc $P_{(0,\lambda)}(\delta)$ n'a qu'une seule racine positive.

Remarque 7.10. Lorsque $\alpha = \frac{\beta^2}{4}$ et $\rho > 4\lambda$, le nombre de solutions de l'équation (7.9) n'est pas pertinent pour l'obtention de la figure 7.3. Néanmoins, ce cas a été étudié profondément dans [17].

Proposition 7.11. (1) Pour $\lambda \neq \frac{\rho}{4}$ (CN) : $\delta = \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4}$ intersecte la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ en un point unique de coordonnées

(7.10)

$$(\alpha_0, \delta_0) = \left(\frac{(\beta+2)\left(\lambda\beta^2 + (\rho+4\lambda)(\beta+1)\right)}{\rho}, \frac{\rho}{(\beta+2)\left(\lambda\beta^2 + (\rho+4\lambda)\beta + 3\rho + 4\lambda\right)}\right)$$

(2) Pour $\lambda = \frac{\rho}{4}$, (CN) : $\delta = \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4}$ est une branche de la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$.

Démonstration. En injectant $\delta = \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4}$ dans $P(\alpha, \delta, \lambda)$, alors celui-ci devient (7.11)

$$P_{\lambda}(\alpha) := \frac{2}{(\alpha + 2\beta + 4)^4} \left(\beta + 4\right)^2 \left(\rho - 4\lambda\right) \left(\alpha\rho - (\beta + 2)\left(\lambda\beta^2 + (\rho + 4\lambda)\left(\beta + 1\right)\right)\right).$$

Or, $P_{\lambda}(\alpha) = 0$ si, et seulement si $\rho = 4\lambda$ ou $\alpha = \alpha_0 := \frac{(\beta+2)(\lambda\beta^2 + (\rho+4\lambda)(\beta+1))}{\rho}$; en substituant $\alpha = \alpha_0$ dans (CN), on obtient $\delta = \delta_0 := \frac{\rho}{(\beta+2)(\lambda\beta^2 + (\rho+4\lambda)\beta+3\rho+4\lambda)}$. \Box

Remarque 7.12. Lorsque $\lambda = 0$, la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ est représentée à la figure 7.3(a). Plus spécialement, (voir la proposition 1.5.2 du chapitre 1 de [17]), on voit que ladite courbe a :

• quatre branches à l'infini dans la direction α : l'une est $\delta = 0$ et les 3 autres sont solutions d'un polynôme de degré 3 en δ . En effet, pour α grand, on voit facilement que le discriminant de $P(\alpha, \delta, 0)$ par rapport à δ est strictement positif et que la deuxième condition de **(iii)** du théorème 7.7 est satisfaite.

• seulement deux branches à l'infini dans la direction δ car pour, δ grand, on voit facilement que le discriminant de $P(\alpha, \delta, 0)$ par rapport à α est strictement négatif et le **(i)** du théorème 7.7 nous permet de conclure.

Proposition 7.13. Lorsque $\lambda > 0$, la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ a deux branches à l'infini dans les directions α et δ .

Démonstration. En effet :

• pour α grand, le discriminant de $P(\alpha, \delta, \lambda)$ en δ est du signe de

(7.12)
$$4\rho^2 (-27\rho^2\lambda^2\alpha^4) \left(-2\rho^2\lambda\alpha^2\right)^2,$$

qui est négatif.

• pour δ grand, le discriminant de $P(\alpha, \delta, \lambda)$ en α est du signe de

$$- \,\delta^{16}\rho^2 \left[\beta^2\rho(-\rho+4\lambda)(\beta^2\lambda+4\rho+2\beta\rho)^2\delta^4\right]$$

(7.13)
$$\left[\beta(\beta^2\lambda + \rho + \beta\rho)(\lambda\beta + \rho)(\beta^2\lambda + 4\rho + 2\beta\rho)\delta^2\right]^2,$$

qui est négatif. On conclut par le (i) du théorème 7.7.

Proposition 7.14. Lorsque $\lambda = \frac{\rho}{4}$, la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ est représentée à la figure 7.3(f); plus précisément :

$$\begin{array}{ll} (\mathbf{i}) \ P(\alpha, \delta, \lambda) = 0 \ si, \ et \ seulement \ si \ (CN) : \delta = \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4} \ ou \\ Q_{(\alpha,\beta)}(\delta) := \alpha \ (\alpha + 2\beta + 4) \left(-4\alpha + \beta^2\right) \delta^3 + \left(2\beta^3 + 12\alpha^2 + 4\beta^2 - 2\alpha\beta^2\right) \delta^2 \\ (7.14) \ + \left(\beta^2 + 8\beta - 12\alpha\right) \delta + 4 = 0. \\ (\mathbf{ii}) \ (CN) \ intersecte \ la \ courbe \ d'équation \ (7.14) \ au \ point \ de \ coordonnée \\ (\alpha_0(\beta), \delta_0(\beta)) = \left(\frac{(\beta + 2)(\beta^2 + 8\beta + 8)}{4}, \frac{4}{(\beta + 2)(\beta^2 + 8\beta + 16)}\right). \\ (2) \ Q_{(\alpha,\beta)}(\delta) = 0 \ n'intersecte \ pas \ \alpha = \frac{\beta^2}{4} \ dans \ le \ premier \ quadrant. \\ (3) \ Si \ \alpha \neq \frac{\beta^2}{4}, \ alors \ l'équation \ (7.14) : \\ (\mathbf{i}) \ admet \ une \ seule \ solution \ positive \ si \ \alpha > \frac{\beta^2}{4}; \\ (\mathbf{ii}) \ n'admet \ aucune \ solution \ positive \ si \ \alpha > \frac{\beta^2}{4}. \\ Démonstration. \ (1) \ (\mathbf{i}) \ En \ effet, \\ P_{\lambda}(\alpha, \delta)|_{\rho=4\lambda} := -\lambda^2 \left(\delta(\alpha + 2\beta + 4) - 1\right) \left[\alpha \left(\alpha + 2\beta + 4\right) \left(-4\alpha + \beta^2\right) \delta^3 \\ (7.15) \ + \left(12\alpha^2 + (4 - 2\alpha)\beta^2 + 2\beta^3\right) \delta^2 + \left(\beta^2 + 8\beta - 12\alpha\right) \delta + 4\right]; \\ d'où \ le \ résultat. \\ (\mathbf{ii}) \ est \ une \ conséquence \ immédiate \ de \ la \ proposition \ 7.11. \\ (2) \ Lorsque \ \alpha = \frac{\beta^2}{4}, \ Q_{(\alpha,\beta)}(\delta) \ devient \\ (7.16) \ Q_{\beta}(\delta) := \left(4\beta^2 + 2\beta^3 + \frac{1}{4}\beta^4\right) \delta^2 + \left(8\beta - 2\beta^2\right) \delta + 4 \\ dont \ le \ discriminant \ par \ rapport \ à \ \delta \ est \ -64\beta^3 < 0. \ Alors, \ Q_{\beta}(\delta) > 0. \\ (3) \ Soit \ \alpha \neq \frac{\beta^2}{4}, \ le \ discriminant \ de \ Q_{(\alpha,\beta)}(\delta) \ par \ rapport \ à \ \delta \ est \\ (7.17) \ D(\beta, \alpha) := -4 \ \left(432\alpha^2 - 72\alpha\beta^2 + 16\beta^3 + 4\alpha\beta^3 - \beta^4\right) \left(2\beta^2 + \beta^3 + 8\alpha\right)^2 \\ dont \ le \ signe \ est \ celui \ de \end{array}$$

(7.18)
$$d_{\beta}(\alpha) := -(432\,\alpha^2 - 72\,\alpha\,\beta^2 + 16\,\beta^3 + 4\alpha\,\beta^3 - \beta^4).$$

(i) Si $\alpha > \frac{\beta^2}{4}$, alors les coefficients $\alpha (\alpha + 2\beta + 4) (-4\alpha + \beta^2)$ et 4 de $Q_{(\alpha,\beta)}(\delta)$ sont de signes contraires. $Q_{(\alpha,\beta)}(\delta)$ étant de degré 3 en δ , il vient que (7.14) a 1 ou 3 solutions positives. Or, pour $\alpha > \frac{\beta^2}{4}$ on a que $432 \alpha^2 > 108\alpha\beta^2$ et $4\alpha\beta^3 > \beta^5$; d'où

$$\begin{aligned} 432\,\alpha^2 - 72\,\alpha\,\beta^2 + 16\,\beta^3 + 4\alpha\,\beta^3 - \beta^4 > &108\alpha\,\beta^2 - 72\,\alpha\,\beta^2 + 16\,\beta^3 + \beta^5 - \beta^4 \\ = &36\alpha\,\beta^2 + 16\,\beta^3 + \beta^5 - \beta^4 \\ (7.19) > &8\beta^4 + 16\,\beta^3 + \beta^5 > 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $D(\beta, \alpha) < 0$). Donc, (7.14) a une seule solution réelle qui est positive. (ii) Si $\alpha < \frac{\beta^2}{4}$, alors les coefficients $\alpha (\alpha + 2\beta + 4) (-4\alpha + \beta^2)$ et 4 de $Q_{(\alpha,\beta)}(\delta)$ ont le même signe. Donc, (7.14) a 0 ou 2 solutions positives. Or, le discriminant de $d_{\beta}(\alpha)$ par rapport à α est 16 $\beta^3 (\beta - 12)^3$. Alors,

- pour $\beta < 12$, (7.14) a une seule solution réelle qui est négative ;
- pour $\beta > 12$, alors $d_{\beta}(\alpha)$ admet deux racines distinctes $\alpha_1 < \alpha_2$:
- si $(\alpha < \alpha_1 \text{ ou } \alpha > \alpha_2)$, alors (7.14) a une seule solution réelle négative ;
- si $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, alors (7.14) a trois solutions réelles négatives. En effet, les

racines de $Q_{(\alpha,\beta)}(\delta)$ ne peuvent pas s'annuler, ni passer à l'infini (voir au (7.14)); alors, par continuité, celles-ci ne changeront jamais de signe!

Proposition 7.15. La courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ admet un point de contact d'ordre 2, (α^*, δ^*) pour $\lambda = \lambda^*$, avec la direction verticale, où $\lambda^* \in]0, \frac{\rho}{4}[, \alpha := \alpha^* > 0$ et $\delta = \delta^* \in]0, \frac{1}{\alpha+2\beta+4}[$ sont tels que

(7.20)
$$\begin{cases} P(\alpha, \delta^*, \lambda^*) = 0, \\ P_{\delta}^{'}(\alpha, \delta^*, \lambda^*) = 0, \\ P_{\delta}^{''}(\alpha, \delta^*, \lambda^*) = 0, \\ P_{\delta}^{'''}(\alpha, \delta^*, \lambda^*) \neq 0 \end{cases}$$

Démonstration. En effet :

- pour λ petit, il y a deux points à tangente verticale à la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ dans le premier quadrant;

- pour λ près de $\frac{\rho}{4}$, il n' y a aucun point à tangente verticale à la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$.

Or, par continuité, ces deux points ne peuvent sortir du premier quadrant (sinon on aurait 2 ou 3 points d'intersection avec l'axe des ordonnées; ce qui n'est pas le cas d'après la proposition 7.9!) ni aller à l'infini (sinon on aurait 4 branches à l'infini dans la direction α ; ce qui n'est pas le cas d'après la proposition 7.13!) : ils se confondent!

Ceci termine la preuve du théorème 7.8.

Remarque 7.16. Revenons à la figure 7.3. Intuitivement :

(1) Lorsque λ est petit, le (b) de la figure 7.3 naît :
- de la perturbation de deux courbes lorsque λ = 0 : δ = 0 (non admissible) et la courbe de bifurcation de Hopf;
- de l'existence d'un point de rebroussement venant de l'infini (voir le (iii))

du théorème 7.8).

- (2) La figure 7.3 (c) est, le passage nécessaire pour aller de (b) à (d).
- (3) Lorsque λ tend vers $\frac{\rho}{4}$ alors, dans le premier quadrant, la branche inférieure de la courbe d'équation $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ tend vers (CN).

Proposition 7.17. (1) La branche de solution de $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ qui intersecte (CN) ne concerne pas un point du premier quadrant.

(2) La branche de solution de $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ qui intersecte les droites d'équations $\alpha = \frac{\beta^2}{4}$ et $\alpha = 0$ est admissible pour la bifurcation de Hopf.

 $D\acute{e}monstration$. En effet :

(1) $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ intersecte (CN) en (α_0, δ_0) , défini par (7.10). Si on évalue $f(x) = (\alpha \delta - 1)x^2 + \beta \delta x + \delta$ en (α_0, δ_0) , on obtient

(7.21)
$$F(x) := \frac{\rho (1-2x) ((\beta+2)x+1)}{(\beta+2) (\lambda \beta^2 + (\rho+4\lambda)\beta + 3\rho + 4\lambda)}$$

dont les racines en x sont $x = \frac{1}{2}$ et $x = -\frac{1}{\beta+2}$. Mais, par l'expression de la trace (voir au (7.5)), on a que

(7.22)
$$u\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8(\beta+4)(4\lambda-\rho)} < 0 \quad et \quad u\left(-\frac{1}{\beta+2}\right) = 0,$$

32

c'est-à-dire que la trace n'est nulle qu'au point singulier dont l'abscisse est négative; ce dernier n'est donc pas du premier quadrant. Donc, par continuité, la branche de solution de $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ qui intersecte (CN) ne concerne pas un point du premier quadrant (car, puisque l'abscisse du point singulier ne peut passer ni par 0, ni par l'infini, alors celle-ci ne changera jamais de signe!).

(2) En effet, en injectant $\alpha = \frac{\beta^2}{4}$ dans $P(\alpha, \delta, \lambda)$, f(x) (caractérisant l'abscisse du point singulier) et u(x) (caractérisant la trace en ce point singulier), on obtient respectivement :

(7.23)

$$P_{(\beta,\lambda)}(\delta) := -\frac{1}{16}\beta^{2} \left(\lambda\beta^{2} + 4\rho + 2\beta\rho\right)^{2}\delta^{3} + \frac{1}{4}\beta \left[3\lambda^{2}\beta^{3} + 4\lambda\rho\beta^{2} + \rho \left(5\rho - 24\lambda\right)\beta - 8\rho^{2}\right]\delta^{2} + \left(-3\beta^{2}\lambda^{2} - \rho^{2}\right)\delta + 4\lambda^{2},$$

(7.24)
$$f_1(\delta, x) := \frac{1}{4} (x\beta + 2)^2 \delta - x^2 \quad et$$

(7.25)
$$u_1(x) := -\frac{1}{2}\rho \,\beta^2 x^4 + \rho \,\left(\frac{1}{4}\beta^2 - \beta\right) x^3 + (-\rho + \lambda \,\beta) \,x + 2\,\lambda.$$

Or $P_{\beta}(\delta, \lambda)$ et $f_1(\delta, x)$ admettent une racine commune en δ si, et seulement si le résultant en δ est nul. En notant ce résultant par $R_0(x)$, alors son expression est

(7.26)
$$R_0(x) := -\frac{1}{4} \left(-4\lambda + 2\rho x - \rho x^2 \beta + 2x^3 \rho \beta \right) \left[(3\rho \beta^2 + 2\rho \beta + 4\lambda \beta^3) x^3 + (5\rho \beta + 12\lambda \beta^2) x^2 + (2\rho + 12\lambda \beta) x + 4\lambda \right].$$

Celui-ci s'annule en un point x>0 si, et seulement si

(7.27)
$$R_1(x) := x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{\beta} - 2\frac{\lambda}{\beta\rho} = 0.$$

Mais en ce point singulier, la trace s'annule si, et seulement si le résultant en x de $R_1(x)$ et $u_1(x)$ est nul. Un calcul montre que ce résultant est effectivement identiquement nul. Aussi, $R_1(x)$ n'a que de(s) racine(s) positive(s), dont le nombre est 1 ou 3; en plus, puisque la branche de solution de $P(\alpha, \delta, \lambda) = 0$ qui intersecte $\alpha = \frac{\beta^2}{4}$ est strictement comprise entre (Cn_r) et (CN), on a donc que $x_0 \in]\frac{1}{2} - \eta, \frac{1}{2}[$. Par conséquent, l'ordonnée du point singulier et le déterminant du linéarisé du système y relatif sont strictement positifs. D'où le résultat par continuité.

Ceci termine la preuve du théorème 7.3. Comme conséquence des théorèmes 7.3, 7.2 et de la proposition 7.4, nous avons le résultat suivant.

Corollaire 7.18. Le digramme des bifurcations locales de codimension 1 du système (1.4) dans le premier quadrant est donné à la figure 7.4.

Les bifurcations qui nous manquent sont globales : la bifurcation de boucle hétéroclinique et la bifurcation de double cycle.



FIG. 7.4. Les surfaces des bifurcations locales du système (1.4) au premier quadrant du plan (α, δ) .

7.4. Positions des séparatrices des points singuliers de l'axe des x pour le système (1.4).

Théorème 7.19. On considère les points singuliers $C = (x_{01}, 0)$ et $D = (x_{02}, 0)$ de l'axe x. Dès que C ou D est un point de selle, sa séparatrice ne peut avoir d'asymptote verticale : elle vient de la droite pour C et de la gauche pour D comme sur la figure 7.6. En particulier, lorsque C et D sont des points de selle, les 3 positions possibles de leurs séparatrices sont présentées à la figure 7.7.

Démonstration. On a $x_{01} = \frac{1}{2} - \eta$ et $x_{02} = \frac{1}{2} + \eta$) pour $\eta := \frac{\sqrt{\rho(\rho - 4\lambda)}}{2\rho}$. • Les séparatrices de C et D ne peuvent pas aller à l'infini. En effet,

(7.28)

$$\lim_{y \to +\infty} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right)$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \frac{y(-\delta + p(x))}{-yp(x) + \rho x(1 - x) - \lambda}$$

$$= \frac{\delta - p(x)}{p(x)} := L(x).$$

Or, L est bornée comme fonction continue sur le compact $[x_1, x_2]$. Comme la pente du champ est bornée entre les droites d'équation $x = x_1$ et $x = x_2$, les séparatrices de C et D ne peuvent aller à l'infini.

De plus, $\dot{x} < 0$ sur $x = x_1$ et sur $x = x_2$, ce qui assure qu'au voisinage des points singuliers la portion de séparatrice contenue dans le premier quadrant se trouve dans la bande « $x \in]x_1, x_2[$ » (voir figure 7.5).

Il y a donc deux positions possibles pour les séparatrices de gauche et deux positions possibles pour les séparatrices de droite (voir figure 7.6).

• Si C et D sont des points de selle, alors les coordonnées du troisième point singulier $E = (x_0, y_0)$ vérifient $x_1 < x_0 < x_2$ et $y_0 > 0$.

Par ce qui précède, lorsque C et D sont des points de selle, les 3 positions possibles de leurs séparatrices sont présentées à la figure 7.7.

Proposition 7.20. Pour $\lambda, \alpha, \beta, \rho$ fixés tels que C et D sont des points de selle, la portion de la séparatrice de C (resp. D) dans la bande « $x \in]x_1, x_0]$ » (resp. « $x \in [x_0, x_2[$ ») se trouve au dessus de l'isocline $\dot{x} = 0$. Dans cette région, correspondant $\dot{a} \dot{x} < 0$, le champ de vecteurs est rotationnel en δ et les séparatrices bougent de



FIG. 7.5. Comportement des trajectoires aux voisinages de C et D (lorsque ceux-ci sont des points de selle)







FIG. 7.7. Positions possibles des séparatrices des points singuliers C et D (lorsque ceux-ci sont des points de selle)

manière monotone en δ : la séparatrice de C (resp. D) s'élève (resp. s'abaisse) lorsque δ augmente. Il y a donc au maximum une valeur de δ pour laquelle on a une bifurcation de boucle hétéroclinique.

Démonstration. Pour $\lambda, \alpha, \beta, \rho$ fixés, on vérifie facilement que le produit vectoriel du champ de vecteurs en δ_1 avec le champ de vecteurs en δ_2 ne s'annule pas dans la région $\dot{x} < 0$ si $\delta_1 \neq \delta_2$. Le mouvement monotone des séparatrices est montré par exemple dans [30].

7.5. Bifurcation de boucle hétéroclinique. À la figure 7.4, considérons chacun des cas où

(7.29)
$$\lambda \in]0, \frac{\rho}{4}[\quad et \quad p\left(\frac{1}{2} - \eta\right) < \delta < p\left(\frac{1}{2} + \eta\right).$$

Il y a exactement 3 points singuliers, C, D et E où $C = (\frac{1}{2} - \eta, 0)$ et $D = (\frac{1}{2} + \eta, 0)$ sont des points de selle situés sur l'axe des x et $E = (x_0, y_0)$ est dans le premier quadrant.

- **Proposition 7.21.** (1) Il y a bifurcation de boucle hétéroclinique dans la région bornée par (Cn_r) et (Cn_a) . Plus précisément, sur chaque droite $\alpha =$ constante, il existe un unique point de bifurcation de boucle hétéroclinique situé entre les intersections de cette droite avec (Cn_r) et (Cn_a) .
 - (2) Lorsque λ est petit, la surface de bifurcation de boucle hétéroclinique, (\mathcal{BH}) , tend vers $\delta = 0$.
- Démonstration. (1) Existence de la bifurcation de boucle hétéroclinique Dans la région bornée par (Cn_r) et (\mathcal{H}) , les positions des séparatrices (voir le théorème 7.19) et les portraits de phase (voir les figures 2.2, 2.3 et 2.4) de (1.4) au voisinage de (Cn_r) (où il n'y a pas de cycle limite parce que (x_0, y_0) se confond avec un point singulier de l'axe des x) et au voisinage de H_r (où il y a un cycle limite répulsif) montrent qu'il y a nécessairement une boucle hétéroclinique pour faire disparaître ce cycle limite avant le colnoeud, puisque le cycle ne peut pas disparaître à l'infini (voir le théorème 7.19). L'unicité de la valeur de δ vient de la proposition 7.20.
 - (2) Pour λ petit, on a que (Cn_r) et la branche inférieure de (\mathcal{H}) tendent vers $\delta = 0$ (voir les équations de (Cn_r) et de (\mathcal{H})). Comme (\mathcal{BH}) n'existe plus lorsque $\lambda = 0$, la seule possibilité est que (\mathcal{BH}) tende vers $\delta = 0$ lorsque λ tend vers 0.

Le type et la codimension de cette boucle hétéroclinique (dont la connexion \overline{CD} est fixée) sont donnés par la proposition suivante :

Proposition 7.22. Posons

(7.30)
$$H(\alpha) := \frac{1}{2} \left[p\left(\frac{1}{2} - \eta\right) + p\left(\frac{1}{2} + \eta\right) \right].$$

 $La \ boucle \ h\acute{e}t\acute{e}roclinique \ est:$

• de codimension supérieure ou égale à deux, c'est-à-dire $r_C r_D = 1$, si

(7.31)
$$(\mathcal{R}): \delta = H(\alpha);$$

• est répulsive (resp. attractive) (c'est-à-dire $r_C r_D < 1$ (resp. $r_C r_D > 1$)) et de codimension un si $\delta < H(\alpha)$ (resp. $\delta > H(\alpha)$).

Démonstration. Les critères $r_C r_D = 1$, $r_C r_D < 1$ et $r_C r_D > 1$ sont bien connus dans la littérature (voir par exemple [13]). On se rappelle que, pour $p(\frac{1}{2} - \eta) < \delta < p(\frac{1}{2} + \eta)$, les points C et D sont des cols hyperboliques; leurs rapports d'hyperbolicité sont respectivement donnés par

(7.32)
$$r_C := \frac{\delta - p(\frac{1}{2} - \eta)}{2\rho\eta} \quad et \quad r_D := \frac{2\rho\eta}{p(\frac{1}{2} + \eta) - \delta}$$

de sorte que

$$r_C r_D - 1 = \frac{2\delta - [p(\frac{1}{2} - \eta) + p(\frac{1}{2} + \eta)]}{p(\frac{1}{2} + \eta) - \delta}.$$

Par (7.29), le signe de $r_C r_D - 1$ est exactement celui de

$$N(\delta,\eta) := 2\delta - \left[p\left(\frac{1}{2} - \eta\right) + p\left(\frac{1}{2} + \eta\right)\right].$$

On voit bien que $N(\delta, \eta) = 0$ si, et seulement si (7.31).

Conjecture 7.23. Dans la région délimitée par (Cn_r) et (Cn_a) , le type (attractif ou répulsif) de l'unique branche de boucle hétéroclinique, (\mathcal{BH}) , est déterminé à partir du centre organisateur, c'est-à-dire lors de la bifurcation de col nilpotent au voisinage de $B = (\frac{1}{2}, 0)$ (point triple pour $\lambda = \frac{\rho}{4}$ et $\delta = \frac{1}{\alpha+2\beta+4}$). Ce point est de codimension 2 sauf pour $\alpha = \alpha_{\beta} := \frac{\beta^2+8\beta+24}{\beta+6} > 0$ où il est de codimension 3 lorsque $\beta > 0$. Au voisinage du point de codimension 3, on sait qu'on doit avoir une boucle hétéroclinique de codimension 2, obtenue comme $BH_2 := (\mathcal{BH}) \cap (\mathcal{R})$ où (\mathcal{R}) est donné en (7.31) et (7.30).

7.6. Lieu de la bifurcation de Hopf d'ordre 2. Par l'étude (faite à la section 5) des deux premiers coefficients de Lyapunov, la bifurcation de Hopf d'ordre 2 existe pour toutes les valeurs de $\lambda \in]0, \frac{\rho}{4}[$. Pour commencer, on fait une analyse supplémentaire du premier coefficient de Lyapunov dans l'espace des paramètres. En effet, à la section 5, nous avons vu via (5.6), que le premier coefficient de Lyapunov est, modulo un facteur multiplicatif positif le signe de $L_1(x)$ donné en (5.14) où x, abscisse du point singulier correspondant, est la racine positive de f(x) donné en (4.5). $L_1(x)$ s'annule au point singulier d'abscisse $x \neq \frac{1}{2}$ si, et seulement si son dernier facteur s'annule :

(7.33)

 $l_1(x,\alpha) := (\beta^3 + 2\alpha\beta - \alpha\beta^2) x^4 + (6\beta^2 - 6\alpha\beta) x^3 + (6\beta - 6\alpha) x^2 + 4\beta x + 6 = 0$

ou, selon une formule équivalente à $L_1(x)$ (obtenue de $L_1(x)$ par l'égalité $u(x) := -2 \rho \alpha x^4 + \rho (\alpha - \beta) x^3 + (-\rho + \lambda \beta) x + 2 \lambda = 0$ exprimant le fait que la trace est nulle au point singulier),

 $m_1(x,\lambda) := -2\beta^2 \rho x^5 - 6\rho \beta x^4 + \left(\lambda \beta^2 - 2\beta \lambda - \rho \beta - 6\rho\right) x^2 + 6\lambda \beta x + 6\lambda = 0.$ On observe que :

• $\lim_{\alpha \to 0} l_1(x, \alpha) = \beta^3 x^4 + 6 \beta^2 x^3 + 6 \beta x^2 + 4 x\beta + 6 > 0$ pour tout $x \in]\frac{1}{2} - \eta, \frac{1}{2}[;$ • $\lim_{\alpha \to +\infty} l_1(x, \alpha) = \lim_{\alpha \to +\infty} [-\alpha x^2 (-2x\beta (x-3) + x^2\beta^2 + 6)] < 0$ pour tout $x \in]\frac{1}{2} - \eta, \frac{1}{2}[;$

•
$$\lim_{\lambda \to 0} m_1(x,\lambda) = -\rho x^2 \left(2\beta^2 x^3 + 6\beta x^2 + \beta + 6 \right) < 0$$
 pour tout $x \in]\frac{1}{2} - \eta, \frac{1}{2}[;$

• Lorsque $\lambda \to \left(\frac{\rho}{4}\right)^-$, (\mathcal{H}) tend vers (CN) et $x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-$. Alors,

$$\lim_{\lambda \to \left(\frac{\rho}{4}\right)^{-}} m_1(x,\lambda) = -\frac{1}{4} \rho \left(-1+2x\right) \left[4x^4\beta^2 + 12\beta x^3 + 2\beta^2 x^3 + 6\beta x^2 + x^2\beta^2 + 12x + 6x\beta + 6\right] \to 0^+.$$

(7.35)

• Dans l'espace des paramètres, $L_1(x)$ et f(x) s'annulent au point singulier d'abscisse x si, et seulement si le résultant de $l_1(x, \alpha)$ et f(x), par rapport à x, est nul;

notons le par $L(\alpha, \delta)$. On obtient que

(7.36)
$$L(\alpha, \delta) = (2\beta^{3} + \beta^{2} - 2\alpha\beta^{2} - 6\alpha\beta + 9\alpha^{2})(\beta^{2} - 4\alpha)^{2}\delta^{4} + 12(\beta^{2} - 4\alpha)(2\beta^{3} + \beta^{2} - 2\alpha\beta^{2} - 6\alpha\beta + 9\alpha^{2})\delta^{3} + (468\alpha^{2} - 264\alpha\beta + 36\beta^{2} - 108\alpha\beta^{2} + 84\beta^{3})\delta^{2} + (72\beta - 216\alpha + 8\beta^{2})\delta + 36.$$

Posons $(\mathcal{L}) : L(\alpha, \delta) = 0$ et $H_2 := (\mathcal{H}) \cap (\mathcal{L})$ (le lieu de la bifurcation de Hopf d'ordre 2). Déterminons H_2 .

Comme à l'étude de (\mathcal{H}) , nous allons nous intéresser à ce qui se passe lorsque λ est petit, λ est proche de $\frac{\rho}{4}$ et lorsque λ n'est ni petit, ni proche de $\frac{\rho}{4}$:

7.6.1. Lieu de la bifurcation de Hopf d'ordre 2 lorsque λ tend vers 0.

Proposition 7.24. Lorsque λ est petit, le lieu de la bifurcation de Hopf d'ordre 2 est situé très loin à droite sur la courbe de Hopf (c'est-à-dire pour α très grand) et passe à l'infini quand $\lambda = 0$.

Démonstration. Pour $\lambda = 0$ on a une bifurcation de Hopf d'ordre un (voir [10],[27]). Alors, par stabilité structurelle, il vient que [27] : pour chaque compact K dans l'espace $(\alpha, \beta, \rho, \delta)$, il existe $\lambda_K > 0$ tel que l'ordre de la bifurcation de Hopf persistera à un si $(\alpha, \beta, \rho, \delta) \in K$ et $\lambda < \lambda_K$. Mais, l'espace $(\alpha, \beta, \rho, \delta)$ n'étant pas compact, alors on ne peut pas trouver un $\lambda_K > 0$ uniforme pour cet espace (plus K est grand, plus λ_K est petit). Or, pour β, ρ, δ fixés dans K, plus λ est petit, plus le α correspondant est grand. Donc, pour $\lambda \to 0$, le lieu de la bifurcation de Hopf d'ordre 2, notée $H_2 := (\alpha_p, \delta_p)$, correspond à $\alpha_p = \alpha(\lambda) \to +\infty$. Il reste à montrer que H_2 ne peut sortir du diagramme de bifurcations. En effet, par (5.14), on a que

$$\lim_{\alpha \to +\infty} L_1(x) = \lim_{\alpha \to +\infty} l_1(x, \alpha)$$
$$= \lim_{\alpha \to +\infty} \left[-\alpha x^2 \left(-2x\beta (x-3) + x^2\beta^2 + 6 \right) \right] < 0$$

(7.37)

pour tout $x \in \frac{1}{2} - \eta$, $\frac{1}{2}$ (région de la bifurcation de Hopf).

7.6.2. Lieu de la bifurcation de Hopf d'ordre 2 lorsque λ tend vers $\left(\frac{\rho}{4}\right)^{-}$.

Proposition 7.25. Lorsque λ tend vers $\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^{-}$, on a que :

- (1) (\mathcal{H}) tend vers (CN).
- (2) H_2 tend vers le point de coordonnées (α_n, δ_n) , définies par

(7.38)
$$\alpha_n := \frac{\beta^2 + 8\beta + 24}{\beta + 6} \quad et \quad \delta_n := \frac{\beta + 6}{3(\beta + 4)^2},$$

qui correspond au point nilpotent de codimension 3.

 $D\acute{e}monstration.$ (1) Découle de la proposition 7.11 (2).

(2) En effet :

(i) Posons $\sigma := \rho - 4\lambda$. Alors, $m_1(x, \lambda)$ est linéaire en σ . Donc, $m_1(z, \sigma) = 0$ a une unique solution $\sigma = \sigma(x)$ telle que $\sigma(\frac{1}{2}) = 0$.

(ii) $l_1(x, \alpha)$ est linéaire en α et a donc un unique zéro $\alpha = \alpha(x)$ tel que $\alpha(\frac{1}{2}) = \frac{\beta^2 + 8\beta + 24}{\beta + 6}$.

(iii) Le résultat suit en remplaçant $\alpha = \frac{\beta^2 + 8\beta + 24}{\beta + 6}$ dans l'équation (CN) : $\delta = \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4}$, on obtient $\delta = \frac{1}{3} \frac{\beta + 6}{(\beta + 4)^2}$.

7.6.3. Lieu de la bifurcation de Hopf d'ordre 2 lorsque λ n'est ni petit, ni proche de $\frac{\rho}{4}$.

Conjecture 7.26. (\mathcal{H}) et (\mathcal{L}) ont un seul point d'intersection dans le premier quadrant.

Illustration. En effet, s'il y en avait plus d'un, alors le passage de un (lorsque λ est proche de $\frac{\rho}{4}$) à deux ou trois (lorsque λ s'éloigne de $\frac{\rho}{4}$ sans être petit) nécessiterait l'existence d'un point de contact entre (\mathcal{H}) et (\mathcal{L}), c'est à dire que pour β , ρ et $\lambda \in]0, \frac{\rho}{4}[$ fixés, il existerait $\alpha = \alpha_c$ et $\delta = \delta_c$ tels que

(7.39)
$$\begin{cases} L(\alpha_c, \delta_c) = 0, \\ P(\alpha_c, \delta_c, \lambda) = 0, \\ \nabla L(\alpha_c, \delta_c) / / \nabla P(\alpha_c, \delta_c, \lambda) \quad i.e \quad \left(\frac{\partial P}{\partial \alpha} \frac{\partial L}{\partial \delta} - \frac{\partial P}{\partial \delta} \frac{\partial L}{\partial \alpha}\right)(\alpha_c, \delta_c) = 0 \end{cases}$$

La conjecture 7.26 suit de la conjecture suivante.

Conjecture 7.27. Il n'y a pas de solution « admissible » de (7.39).

Une telle conjecture peut être approchée avec les bases de Gröbner. Mais, les calculs étant lourds, nous nous sommes contentés de tests isolés (voir [17]).

7.6.4. Validation numérique de la position de H_2 . Posons $\lambda_1 := \frac{\lambda}{\rho}$. Pour β fixé, quelques tests numériques illustrent que :

• Si λ_1 est très petit, alors H_2 est situé non loin du point de rebroussement inférieur (c'est-à-dire sur la branche inférieure);

• Lorsque (\mathcal{H}) a un point de contact d'ordre 2 avec la verticale, alors H_2 est un peu à gauche de ce point ;

• Si λ_1 est proche de $\frac{1}{4}$, alors H_2 (qui, par la proposition 7.25, tend vers le point (α_n, δ_n) défini au (7.38)) est à gauche de C sur (\mathcal{H}) .

7.7. Diagramme de bifurcations et portraits de phase. Par le corollaire 7.18, la conjecture 7.23 et la figure 6.3, on a donc montré le théorème B.

Répétons la remarque de l'introduction à l'effet que le paramètre important est $\lambda_1 := \frac{\lambda}{\rho}$, plutôt que les deux paramètres indépendants λ et ρ . On a donc les trois paramètres essentiels : α , δ et λ_1 . Le paramètre β semble être une mesure de la non-intégrabilité du système. Lorsqu'on a deux cycles limites ou encore une boucle hétéroclinique, plus il est grand, plus les cycles sont hyperboliques.

8. INTERPRÉTATION BIOLOGIQUE

Nous donnons une interprétation biologique du système lorsque ses paramètres sont dans une région ouverte du diagramme de bifurcations (car le champ de vecteurs y est structurellement stable); et dans chacune de ces régions, on fait l'hypothèse que les conditions initiales sont réalistes biologiquement.

Remarque 8.1. Remarquons tout de suite que le modèle n'est pas réaliste dans une bande étroite le long de l'axe $y : x \in [0, \epsilon]$ car l'axe y n'est pas invariant et les trajectoires traverseraient du côté x < 0. Donc, il faut interpréter le modèle pour $x > \epsilon$ pour un certain $\epsilon > 0$.

Les régimes que nous allons définir sont stables pour des conditions initiales qui ne font partie ni d'une variété stable, ni d'une variété instable, ni d'un cycle limite instable; ce qui implique que le régime final sera le même après un petit changement de conditions initiales. Il y a trois types de régimes stables qu'un champ de vecteurs peut posséder :

• REP(Régime avec Extinction des Prédateurs) : C'est un régime où il existe un ouvert de conditions initiales pour lesquelles il y a extinction des prédateurs (en particulier, *aucun point singulier dans l'ouvert de conditions initiales*) et la population des proies atteint un équilibre stable.

• REM(Régime d'Équilibre Mixte) : un régime où il existe un ouvert de conditions initiales pour lesquelles les prédateurs et les proies coexistent en tendant vers une position d'équilibre stable (*point singulier attractif dans le premier quadrant* ouvert).

• RO(**R**égime **O**scillatoire) : un régime où il existe un ouvert de conditions initiales pour lesquelles les prédateurs et les proies tendent vers un régime oscillatoire stable (cycle limite stable).

A l'exception des régions ouvertes I et II (où il y a *extinction des proies*), chaque champ de vecteurs générique (c'est-à-dire dont les paramètres sont dans une région ouverte du diagramme de bifurcations) possède un des régimes stables décrits plus haut. Plus précisément :

- Le portrait de phase de la région ouverte **III** correspond au régime stable **REM** sous la séparatrice de gauche et à l'extinction des proies ailleurs.

- Le portrait de phase de la région ouverte V correspond au régime stable **REM** dans une très petite région qui est l'intérieur du cycle limite.

- Le portrait de phase de la région ouverte IV correspond au régime stable REP.

- Les portraits de phase des régions ouvertes **VI** et **VII** correspondent au régime stable **RO** mais seulement pour un petit ouvert de conditions initiales.

Ce qui frappe à l'observation des portraits de phase, c'est la vulnérabilité des deux espèces lorsqu'on introduit une récolte de proies du type considéré sans récolte correspondante de prédateurs, et ce, même si λ est petit. Un très grand nombre de positions initiales conduisent à l'extinction des deux espèces. Par exemple, c'est le cas de toutes les conditions initiales dans les régions I et II, même pour λ très petit. Les régions I et II correspondent à δ petit, soit un faible taux de mortalité des prédateurs. Dans les autres régions, un rôle très important est joué par les séparatrices des points C et D. Ainsi, dans les régions V et VI, toute condition initiale (x(0), y(0)) où x(0) grand et y(0) > 0 conduit à l'extinction des espèces. Il faut donc absolument être au dessus de la courbe de boucle hétéroclinique (régions III, IV et VII) pour qu'il existe des conditions initiales (x(0), y(0)) où x(0) grand et y(0) > 0 qui permettent la survivance de la population de proies : (x(0), y(0))doit être situé sous la séparatrice du point C, c'est-à-dire que seules des conditions initiales y(0) petites sur les prédateurs sont permises si l'on veut espérer que les proies survivent. Dès qu'il y a trop de prédateurs, le risque devient grand d'assister à l'extinction des proies. Comme conclusion générale, pour $\lambda = 0$, on observait la survivance des proies pour toutes les valeurs des autres paramètres et toutes les conditions initiales (x(0), y(0)) où x(0), y(0) > 0. Dans notre modèle, dès que λ est positif, si petit soit-il, pour toute valeur des autres paramètres, il existe des conditions initiales (x(0), y(0)) où x(0), y(0) > 0 conduisant à l'extinction des espèces.

Nos résultats suggèrent donc plusieurs pistes de recherche :

- faire une analyse quantitative des résultats ci-dessus pour déterminer la position approximative des séparatrices des points C et D, et ce, en se concentrant sur les ensembles de valeurs des paramètres qui sont réalistes biologiquement. Cette analyse permettra de déterminer quantitivement les conditions initiales permettant la survivance;
- voir si d'autres stratégies de récolte sont moins « dangereuses » écologiquement. C'est déjà le cas du taux S(x,h) = hx puisque le modèle avec un tel taux est équivalent, après changement d'échelle, à notre modèle (1.4) pour $\lambda = 0$ et de nouvelles valeurs des autres paramètres ;
- combiner la stratégie de récolte de proies étudiée ici avec une stratégie de récolte de prédateurs pour voir si la récolte simultanée de prédateurs et de proies permet d'assurer la survivance des deux populations.
- **Remarque 8.2.** (1) Lorsque $\lambda = 0$ et que $\beta \ge 0$, les portraits de phase des régions ouvertes I_0 , II_0 et III_0 (voir à la figure 2.1) correspondent respectivement aux régimes stables **REP**, **REM** et **RO**.
 - (2) Le rendement soutenu maximal (MSY) absolu de la récolte des proies est $\lambda_{MSY} = \frac{\rho}{4}$: si $\lambda \geq \frac{\rho}{4}$, alors $\dot{x} < 0$ et il y a donc extinction des proies.
 - (3) Bifurcation quantitative : Soit y > 0, on sait que y = y(-δ + p(x)) :
 a) Si δ < 1/α, alors il existe x₀ tel que p(x₀) = δ (voir la figure 8.1(a)) :



FIG. 8.1. \dot{y}

si $x < x_0$, alors $\dot{y} < 0$; si $x > x_0$, alors $\dot{y} > 0$; et si $x = x_0$, alors $\dot{y} = 0$. Donc y croît si x est grand et y décroît si x est petit. b) Si $\delta \ge \frac{1}{\alpha}$, alors $\dot{y} < 0$ pour tout $x \ge 0$ (voir la figure 8.1(b)).

(4) Cas extrêmes :

Par (2) et (3), on a donc les deux cas extrêmes suivants :

R.M.D. ETOUA[†]ET C. ROUSSEAU[‡]

- Il y a extinction des prédateurs quand δ est grand.
- À partir de $\lambda = \frac{\rho}{4}$, aucune population ne peut survivre.

REMERCIEMENTS

Nous sommes très reconnaissants envers Huaiping Zhu de nous avoir suggéré le sujet. Nous le remercions également, ainsi que Robert Roussarie, pour des discussions stimulantes et des suggestions pertinentes.

Références

- V.I. ARNOLD, Chapitres Supplémentaires de la Théorie des Équations Différentielles Ordinaires, Mir Moscou, (1980).
- [2] ANNIK MARTIN, Predator-Prey Models with Delays and prey harvesting, Master of Science thesis, Dalhousie University Halifax.Nova Scotia, (1999).
- [3] A.D. BAZYKIN, Nonlinear Dynamics of Interacting Populations, World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A, Vol. 11, World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd., (1998).
- [4] F. BRAUER ET C. CASTILLO-CHAVEZ, Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, (2001).
- [5] H.W. BROER, V. NAUDOT, R. ROUSSARIE, K. SALEH, Dynamics of a predator-prey model with non-monotonic response function, Disc. Cont. Dyn. Sys., Vol. 18 (2007), 221-251.
- [6] F. BRAUER ET A.C. SOUDACK, Stability Regions in Predator-Prey Systems with Constant Rate Prey Harvesting, J.Math.Biol., 8, 55-71, (1979).
- [7] F. BRAUER ET A.C. SOUDACK, Coexistence Properties of some Predator-Prey Systems under Constant Rate Harvesting and Stocking, J.Math.Biol., 12, 101-114, (1981).
- [8] C.W. CLARK, Mathematical Bioeconomics, The Optimal Management of Renewable Resources, 2nd ed., John Wiley and Sons, New York, Toronto, (1990).
- [9] M. CAUBERGH ET F. DUMORTIER, Hopf- Takens Bifurcations and Centres, Journal of Differential Equations, Vol. 202, 1-31, (2004).
- [10] S.N. CHOW ET J.K. HALE, Methods of Bifurcation Theory, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, (1982).
- [11] S.N. CHOW, C. LI ET D. WANG, Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields, Cambridge University Press, New York, (1994).
- [12] F. DUMORTIER, Local Study of Planar Vector Fields : Singularities and their Unfoldings, in Structures in Dynamics, Finite Dimensional Deterministic Studies., North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 161-241, (1991).
- [13] F. DUMORTIER, R. ROUSSARIE, C. ROUSSEAU, Elementary Graphics of Cyclicity One or Two, Nonlinearity 7, 1001-1043, (1994).
- [14] F. DUMORTIER, R. ROUSSARIE ET J. SOTOMAYOR, Generic 3-parameter Families of Planar Vector Fiels, Unfolding of Saddle, Focus and Elliptic Singularities with Nilpotent Linear Parts. In Lecture Notes in Math., Vol. 1480, 1-164, Spriger-Verlag, New York, (1991).
- [15] G.R. DAI ET M. TANG, Coexistence Region and Global Dynamics of a Harvested Predator-Prey System, SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 58, No. 1, 193-210, (1998).
- [16] G.R. DAI ET C. X. XU, Constant Rate Predator Harvested Predator-Prey System with Holling-type I Functional Response, Acta Math.Sci., Vol. 14, 134-144(in Chinese), (1994).
- [17] R.M.D. ETOUA, Étude d'un modèle de Gause généralisé avec récolte de proies et fonction de Holling type III généralisée, Thèse de Ph.D., Université de Montréal, (Novembre 2008).

- [18] R.M.D. ETOUA, Étude des familles standard des déploiements du col nilpotent dont l'axe des abscisses est invariante, en préparation.
- [19] H.I. FREEDMAN, Deterministic Mathematical Models in Population Ecology, Marcel Dekker, Inc, New-York, (1980).
- [20] H.I. FREEDMAN, Stability Analysis of a Predator-Prey System with Mutual Interference and Density-Dependent Death Rates, Bulletin of Mathematical Biology, 41, 67-78, (1979).
- [21] H.I. FREEDMAN ET G.S.K. WOLKOWICZ, Predator-Prey Systems with Group Defence : The Paradox of Enrichment Revisited, Bulletin of Mathematical Biology, Vol.48, No.5/6, 493-508, (1986).
- [22] G. FISCHER, Plane Algebraic Curves, Student Mathematical Library, vol. 15, (2001).
- [23] G.F. GAUSE, The Struggle for Existence, Williams and Wilkins, Baltimore, (1935).
- [24] J. GUCKENHEIMER ET P. HOLMES, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields, Springer-Verlag, New York, (1983).
- [25] R. GODEAU, Algèbre Supérieure : Deuxième Édition, Université Libre de Bruxelles, (1962).
- [26] C.S. HOLLING, The Functional Response of Predators to Prey Density and its Role in Mimicry and Population Regulation, Memoirs of the Entomological Society of Canada, Vol. 45, 3-60, (1965).
- [27] Y.A. KUZNETSOV, Elements of Applied Bifurcation Theory : Third Edition, Appl. Math. Sci. 112, Springer-Verlag, New York, (2004).
- [28] A. LOTKA, *Elements of Physical Biology*, Williams and Wilkins Co, Baltimore, (1925).
- [29] Y. LAMONTAGNE, C. COUTU ET C. ROUSSEAU, Bifurcation Analysis of a Predator-prey System with Generalised Holling Type III Function Response, à paraître dans Journal of Dynamics and Differential Equations.
- [30] L. PERKO, Differential equations and dynamical systems, Springer-Verlag (Texts in App. Math, no7), 3e édition (2002).
- [31] M.L. ROSENZWEIG ET R.H. MACARTHUR, Graphical Representation and Stability Conditions of Predator-Prey interactions, Am.Nat. 47, 209-223, (1963).
- [32] D. SCHLOMIUK, Algebraic and Goemetric Aspects of the Theory of Polynomial Vector Fields, in Bifurcations and Periodic Orbits of Vectors Fields, ed D. Schlomiuk (NATO ASI Series) series C, Vol 408, pp 429-467, (1993).
- [33] SHI-SHONGLING, A Method of Constructing Cycles without Contact around a Weak Focus, J. Differential Equations 41, 301-312, (1981).
- [34] V. VOLTERRA, Fluctuations in the Abundance of Species Considered Mathematically, "Nature", Vol. CXVIII, 558-560, (1926).
- [35] G.S.K. WOLKOWICZ, Bifurcation Analysis of a Predator-Prey System Involving Group Defence, SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 48, No. 3, 592-606, (1988).
- [36] D. XIAO ET L.S. JENNINGS, Bifurcations of a ratio-dependent predator-prey system with constant rate harvesting, SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 65, No. 3, 737-753, (2005).
- [37] D. XIAO ET S. RUAN, Global Analysis in Predator-Prey System with Nononotonic Functional Response, SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 61, No. 4, 1445-1472, (2001).
- [38] H. ZHU, S.A. CAMPBELL ET G.S.K. WOLKOWICZ, Bifurcation Analysis of a Predator-Prey System with Nonmonotonic Functional Response, SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol.63, No. 2, 636-682, (2002).
- [39] C. ROUSSEAU ET H. ZHU, PP-Graphics with a Nilpotent Elliptic Singularity in Quadratic Systems and Hilbert's 16th Problem, J. Differential Equations 196, 169-208, (2004).