

Introduction à la logique

1 Introduction

2 Calcul propositionnel informel

Dans ce contexte, on considère des *propositions* que l'on notera A, B, C, \dots . Une proposition donnée est vraie V ou fausse F. Lorsqu'on veut mentionner une proposition arbitraire, on utilisera les lettres p, q, r, \dots . Les lettres p, q, r, \dots sont appelées *variables propositionnelles*. Ces variables peuvent prendre deux valeurs $\{V, F\}$ appelées *valeurs de vérité*.

À partir de propositions, on peut construire de nouvelles propositions en itérant les règles de construction suivantes :

- La *négation* d'une proposition A est la proposition $\sim A$. Elle est vraie si et seulement si A est fausse.
- La *conjonction* de deux propositions A et B est la proposition $A \wedge B$ (on lit « A et B »). Elle est vraie si et seulement si A et B sont simultanément vraies.
- La *disjonction* de deux propositions A et B est la proposition $A \vee B$ (on lit « A ou B »). Elle est vraie si et seulement si au moins une des propositions A et B est vraie.
- Si A et B sont deux propositions, on construit la proposition $A \rightarrow B$ (on lit « A implique B », ou encore « si A , alors B »). Elle est vraie dès que B est vraie ou A est fausse.
- Si A et B sont deux propositions, on construit la proposition $A \leftrightarrow B$ (on lit « A équivalent à B »). Elle est vraie si et seulement si A et B sont simultanément vraies et simultanément fausses.

Ces nouvelles propositions sont des *formules propositionnelles*. On les notera $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, etc.

2.1 Fonctions de vérité et tables de vérité

On peut associer une *fonction de vérité* à une formule construite à partir des règles précédentes. Ces fonctions de vérité seront notées respectivement $f^{\sim}, f^{\wedge}, f^{\vee}, f^{\rightarrow}, f^{\leftrightarrow}$. La première fonction f^{\sim} est une fonction d'une variable, alors que les autres sont des fonctions de deux variables. Les variables ne peuvent prendre que les deux valeurs V et F. Donc, on donne les valeurs de la fonction dans une table, appelée *table de vérité*.

Table de vérité de f^{\sim} .

p	$\sim p$
V	F
F	V

Tables de vérité de $f^{\wedge}, f^{\vee}, f^{\rightarrow}, f^{\leftrightarrow}$.

p	q	$p \wedge q$	p	q	$p \vee q$	p	q	$p \rightarrow q$	p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	F	F	V	F	F
F	V	F	F	V	V	F	V	V	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F	V	F	F	V

DÉFINITION 2.1 1. Une formule propositionnelle est une tautologie si sa fonction de vérité ne prend que la valeur V.

2. Une formule propositionnelle est une contradiction si sa fonction de vérité ne prend que la valeur F.

DÉFINITION 2.2 1. Si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont deux formules propositionnelles, on dit que \mathcal{A} implique logiquement \mathcal{B} si $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ est une tautologie.

2. Si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont deux formules propositionnelles, on dit que \mathcal{A} est logiquement équivalent à \mathcal{B} si $(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$ est une tautologie.

2.2 Règles de manipulation et de substitution

THÉORÈME 2.3 1. Si \mathcal{A} et $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ sont des tautologies, alors \mathcal{B} est une tautologie.

2. Soit \mathcal{A} est une formule propositionnelle dans laquelle des variables propositionnelles p_1, \dots, p_n apparaissent et soient $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ des formules propositionnelles. Si \mathcal{A} est une tautologie, alors la formule propositionnelle \mathcal{B} obtenue de \mathcal{A} en remplaçant chaque occurrence de p_i par \mathcal{A}_i est aussi une tautologie.
3. Pour toutes formules propositionnelles \mathcal{A} et \mathcal{B} , $(\sim(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}))$ est logiquement équivalent à $((\sim\mathcal{A}) \vee (\sim\mathcal{B}))$, et $(\sim(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}))$ est logiquement équivalent à $(\sim\mathcal{A}) \wedge (\sim\mathcal{B})$.
4. Si \mathcal{B}_1 est une formule propositionnelle obtenue de la formule propositionnelle \mathcal{A}_1 en substituant la formule propositionnelle \mathcal{B} à quelques occurrences de \mathcal{A} dans \mathcal{A}_1 et si \mathcal{B} est logiquement équivalent à \mathcal{A} , alors \mathcal{B}_1 est logiquement équivalent à \mathcal{A}_1 .
5. Soit \mathcal{A} une formule propositionnelle ne contenant que les connecteurs \sim, \wedge et \vee (on dit que \mathcal{A} est restreinte). Soit \mathcal{A}^* la formule propositionnelle obtenue de \mathcal{A} en échangeant \wedge et \vee et en changeant chaque variable propositionnelle par sa négation. Alors, \mathcal{A}^* est logiquement équivalente à $\sim\mathcal{A}$.
6. Soient $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ des formules propositionnelles. Alors, $(\bigvee_{i=1}^n (\sim\mathcal{A}_i))$ est logiquement équivalente à $(\sim(\bigwedge_{i=1}^n \mathcal{A}_i))$. Aussi, $(\bigwedge_{i=1}^n (\sim\mathcal{A}_i))$ est logiquement équivalente à $(\sim(\bigvee_{i=1}^n \mathcal{A}_i))$.

2.3 Formes normales

DÉFINITION 2.4 Une formule propositionnelle ne contenant que les connecteurs \sim, \wedge et \vee est appelée formule propositionnelle restreinte.

THÉORÈME 2.5 Toute fonction de vérité définie sur un ensemble de n variables propositionnelles p_1, \dots, p_n est la fonction de vérité $f : \{V, F\}^n \rightarrow \{V, F\}$ d'une formule propositionnelle.

THÉORÈME 2.6 Toute formule propositionnelle contenant les variables propositionnelles p_1, \dots, p_n et qui n'est pas une contradiction est logiquement équivalente à une formule propositionnelle de la forme $(\bigvee_{i=1}^m (\bigwedge_{j=1}^n Q_{ij}))$, où chaque Q_{ij} est, soit p_j , soit $\sim p_j$. Cette forme est appelée forme normale disjonctive.

COROLLAIRE 2.7 Toute formule propositionnelle contenant les variables propositionnelles p_1, \dots, p_n et qui n'est pas une tautologie est logiquement équivalente à une formule propositionnelle de la forme $(\bigwedge_{i=1}^m (\bigvee_{j=1}^n Q_{ij}))$, où chaque Q_{ij} est, soit p_j , soit $\sim p_j$. Cette forme est appelée forme normale conjonctive.

2.4 Ensembles adéquats de connecteurs

DÉFINITION 2.8 Un ensemble adéquat de connecteurs est un ensemble de connecteurs tel que toute fonction de vérité peut être représentée comme la fonction de vérité d'une formule propositionnelle ne contenant que des connecteurs de cet ensemble.

DÉFINITION 2.9 1. Le connecteur NOR (logiquement équivalent à $(\sim(p \vee q))$), noté \Downarrow , a pour table de vérité :

p	q	$p \Downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

2. Le connecteur NAND (logiquement équivalent à $(\sim(p \wedge q))$), noté \mid , a pour table de vérité :

p	q	$p \mid q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

THÉORÈME 2.10 Les ensembles suivants de connecteurs sont adéquats :

1. $\{\sim, \wedge\}$,
2. $\{\sim, \vee\}$,
3. $\{\sim, \rightarrow\}$,
4. $\{\downarrow\}$,
5. $\{\}$.

3 La formalisation du calcul propositionnel

DÉFINITION 3.1 Un système formel L du calcul propositionnel est défini comme :

1. Un alphabet infini de symboles :

$$\sim, \rightarrow, (,), p_1, p_2, p_3, \dots$$

2. Un ensemble de formules bien formées (formules bf) défini inductivement comme suit :

(i) Pour tout i , p_i est une formule bf;

(ii) Si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont des formules bf, alors $(\sim\mathcal{A})$ et $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ sont des formules bf.

(iii) Toute formule bf est obtenue en appliquant les règles (i) et (ii) un nombre fini de fois.

3. Un ensemble infini d'axiomes obtenu à partir des 3 schémas suivants : pour toutes formules bf \mathcal{A} , \mathcal{B} et \mathcal{C} , les formules bf suivantes sont des axiomes :

(L1) $(\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}))$;

(L2) $((\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})) \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C})))$

(L3) $((\sim\mathcal{A}) \rightarrow (\sim\mathcal{B})) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$

4. Une règle de déduction, le modus ponens, qui dit que \mathcal{B} est une conséquence directe de \mathcal{A} et $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$.

DÉFINITION 3.2 Une preuve dans L est une suite finie $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ de formules bf telles que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, soit \mathcal{A}_i est un axiome de L , soit \mathcal{A}_i se déduit de deux éléments précédents, \mathcal{A}_j et \mathcal{A}_k , $j, k < i$, par utilisation du modus ponens. On dira que cette suite représente une preuve de \mathcal{A}_n dans L , et on dira que \mathcal{A}_n est un théorème de L .

DÉFINITION 3.3 Soit Γ un ensemble de formules bf de L . Une suite finie $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ de formules bf est une déduction de Γ si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on a une des situations suivantes :

(a) \mathcal{A}_i est un axiome de L ;

(b) \mathcal{A}_i est dans Γ ;

(c) \mathcal{A}_i se déduit de deux éléments précédents, \mathcal{A}_j et \mathcal{A}_k , $j, k < i$, par utilisation du modus ponens. On dira que cette suite représente une preuve de \mathcal{A}_n dans L , et on dira que \mathcal{A}_n est un théorème de L .

On dit que \mathcal{A}_n se déduit de Γ dans L , ou encore que \mathcal{A}_n est une conséquence de Γ dans L . On écrira $\Gamma \vdash_L \mathcal{A}_n$.

THÉORÈME 3.4 (Théorème de déduction) Soit Γ un ensemble de formules bf de L possiblement vide, et \mathcal{A} et \mathcal{B} deux formules bf de L . Si $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\} \vdash_L \mathcal{B}$, alors $\Gamma \vdash_L (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$.

PROPOSITION 3.5 (Réciproque du théorème de déduction) Si $\Gamma \vdash_L (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$, alors $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\} \vdash_L \mathcal{B}$.

COROLLAIRE 3.6 (Syllogisme hypothétique) Soient \mathcal{A} , \mathcal{B} et \mathcal{C} des formules bf de L . Alors,

$$\{(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}), (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})\} \vdash_L (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}).$$

PROPOSITION 3.7 Pour toutes formules bf \mathcal{A} et \mathcal{B} , de L , les formules suivantes sont des théorèmes de L :

(a) $(\sim\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}))$,

(b) $((\sim\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A})$.

3.1 Le théorème d'adéquation

DÉFINITION 3.8 Une valuation de L est une fonction v dont le domaine est l'ensemble des formules bf de L et l'image est l'ensemble $\{V, F\}$ et qui satisfait pour toutes formules bf \mathcal{A} et \mathcal{B} de L aux deux conditions :

- (i) $v(\mathcal{A}) \neq v(\sim\mathcal{A})$;
- (ii) $v(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) = F$ si et seulement si $v(\mathcal{A}) = T$ et $v(\mathcal{B}) = F$.

DÉFINITION 3.9 Une formule bf \mathcal{A} de L est une tautologie si pour toute valuation v de L , $v(\mathcal{A}) = V$.

THÉORÈME 3.10 (Théorème de sûreté (Soundness Theorem)) Tout théorème de L est une tautologie.

DÉFINITION 3.11 Une extension de L est un système formel L^* dans lequel on a altéré les axiomes et/ou on en a ajouté de nouveaux, de telle sorte que tous les théorèmes de L demeurent des théorèmes de L^* (et L^* contient possiblement de nouveaux théorèmes).

DÉFINITION 3.12 Une extension L^* de L est cohérente (ou consistante) si pour toute formule bf \mathcal{A} de L , \mathcal{A} et $\sim\mathcal{A}$ ne sont pas simultanément des théorèmes de L^*

PROPOSITION 3.13 L est cohérent.

PROPOSITION 3.14 Une extension L^* de L est cohérente si et seulement si il existe une formule bf \mathcal{A} qui n'est pas un théorème de L^* .

PROPOSITION 3.15 Soit L^* une extension cohérente de L et \mathcal{A} une formule bf de L qui n'est pas un théorème de L^* . Alors l'extension L^{**} de L obtenue en ajoutant à L^* l'axiome $(\sim\mathcal{A})$ est cohérente.

DÉFINITION 3.16 Une extension L^* de L est complète si pour toute formule bf \mathcal{A} de L , \mathcal{A} ou $\sim\mathcal{A}$ est un théorème de L^* .

THÉORÈME 3.17 Soit L^* une extension cohérente de L . Alors, il existe une extension cohérente et complète de L^* .

PROPOSITION 3.18 Soit L^* une extension cohérente de L . Alors, il existe une valuation v qui prend la valeur V sur chaque théorème de L^* .

THÉORÈME 3.19 (Théorème d'adéquation) Si \mathcal{A} est une formule bf de L et si \mathcal{A} est une tautologie, alors $\vdash_L \mathcal{A}$.

PROPOSITION 3.20 L est décidable, c'est-à-dire qu'il existe une méthode effective pour décider si une formule bf quelconque de L est un théorème de L .

4 Calcul informel des prédicats

4.1 Langage du premier ordre

Dans un langage du premier ordre \mathcal{L} on ne donne un alphabet de symboles :

- des variables x_1, x_2, \dots ,
- un ensemble (possiblement vide) de constantes individuelles a_1, a_2, \dots ,
- un ensemble (possiblement vide) de symboles représentant des prédicats, A_i^n , où n représente le nombre d'entrées du prédicat,
- un ensemble (possiblement vide) de symboles représentant des fonctions f_i^n , où n représente le nombre d'entrées de la fonction,
- les symboles de ponctuation $\langle \rangle, \langle \langle \rangle \rangle, \langle \langle \langle \rangle \rangle \rangle, \dots$,
- les connecteurs \sim et \rightarrow ,
- le quantificateur \forall .

DÉFINITION 4.1 Soit \mathcal{L} un langage du premier ordre. Un terme de \mathcal{L} est défini comme suit :

- (i) Une variable ou une constante individuelle est un terme.
- (ii) Si f_i^n est un symbole de fonction dans \mathcal{L} et t_1, \dots, t_n sont des termes de \mathcal{L} , alors $f_i^n(t_1, \dots, t_n)$ est un terme de \mathcal{L} .
- (iii) L'ensemble des termes de \mathcal{L} est généré par (i) et (ii).

DÉFINITION 4.2 Soit \mathcal{L} un langage du premier ordre. Une formule atomique de \mathcal{L} est définie comme $A_i^k(t_1, \dots, t_k)$, où A_i^n est un symbole de prédicat de \mathcal{L} et t_1, \dots, t_n sont des termes de \mathcal{L} .

DÉFINITION 4.3 Une formule bf de \mathcal{L} est définie par :

- (i) Toute formule atomique de \mathcal{L} est une formule bf de \mathcal{L} .
- (ii) Si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont des formules bf de \mathcal{L} et x_i est une variable, alors $(\sim \mathcal{A})$, $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ et $(\forall x_i)\mathcal{A}$ sont des formules bf de \mathcal{L} .
- (iii) L'ensemble des formules bf de \mathcal{L} est généré par (i) et (ii).

NOTATION La notation $(\exists x_i)\mathcal{A}$ représente la formule $\sim(\forall x_i)\sim \mathcal{A}$.

DÉFINITION 4.4 Dans la formule bf $(\forall x_i)\mathcal{A}$, on dit que \mathcal{A} est le champ d'action du quantificateur. Plus généralement, si $(\forall x_i)\mathcal{A}$ apparaît comme sous-formule d'une formule bf \mathcal{B} , on dit que le champ d'action du quantificateur dans \mathcal{B} est \mathcal{A} . Une occurrence de la variable x_i dans une formule bf est dite liée si elle apparaît, soit dans le champ d'action d'un $(\forall x_i)$ dans la formule ou si elle est le x_i du $(\forall x_i)$. Dans le cas contraire, elle est libre.

DÉFINITION 4.5 Soit \mathcal{A} une formule bf de \mathcal{L} . Un terme t est dit libre pour x_i dans \mathcal{A} si pour toute variable x_j apparaissant dans t , x_i n'apparaît pas libre dans le champ d'action d'un $(\forall x_j)$.

4.2 Interprétations

DÉFINITION 4.6 Une interprétation I d'un langage \mathcal{L} est la donnée de :

- un ensemble non vide D_I , appelé domaine de I ,
- une collection d'éléments distingués $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots\}$ (\bar{a}_i est l'interprétation de a_i),
- une collection de fonctions \bar{f}_i^n , $i > 0$, $n > 0$ (\bar{f}_i^n est l'interprétation de f_i^n),
- une collection de relations \bar{A}_i^n , $i > 0$, $n > 0$ (\bar{A}_i^n est l'interprétation de A_i^n).

4.3 Satisfaction d'une formule bf dans une interprétation

DÉFINITION 4.7 Soit I une interprétation I d'un langage \mathcal{L} . Une valuation est une fonction v de l'ensemble des termes de \mathcal{L} dans D_I avec les propriétés suivantes

- (i) $v(a_i) = \bar{a}_i$ pour chaque constante individuelle a_i de \mathcal{L} .
- (ii) Si f_i^n est un symbole de fonction dans \mathcal{L} et t_1, \dots, t_n sont des termes de \mathcal{L} , alors $v(f_i^n(t_1, \dots, t_n)) = \bar{f}_i^n(v(t_1), \dots, v(t_n))$

DÉFINITION 4.8 Deux valuations v et v' sont i -équivalentes si $v(x_j) = v'(x_j)$ pour toute variable x_j , où $j \neq i$.

DÉFINITION 4.9 Soit \mathcal{A} une formule bf de \mathcal{L} et I une interprétation de \mathcal{L} . Une valuation v dans I satisfait à \mathcal{A} si on peut montrer par induction qu'elle satisfait à \mathcal{A} en utilisant les pas d'induction suivants :

- (i) v satisfait à la formule atomique $A_i^n(t_1, \dots, t_n)$ si $\bar{A}_i^n(v(t_1), \dots, v(t_n))$ est vraie dans D_I .
- (ii) v satisfait à $(\sim \mathcal{B})$ si v ne satisfait pas à \mathcal{B} .
- (iii) v satisfait à $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$ si v satisfait à $(\sim \mathcal{B})$ ou v satisfait à \mathcal{C} .
- (iv) v satisfait à $(\forall x_i)\mathcal{B}$, si pour toute valuation v' qui est i -équivalente à v , alors v' satisfait à \mathcal{B} .

PROPOSITION 4.10 Soit $\mathcal{A}(x_i)$ une formule bf dans laquelle x_i est libre, et soit t une terme qui est libre pour x_i dans $\mathcal{A}(x_i)$. Soit v une valuation et v' la valuation i -équivalente à v dans laquelle $v'(x_i) = v(t)$. Alors, v satisfait à $\mathcal{A}(t)$ si et seulement si v' satisfait à $\mathcal{A}(x_i)$.

DÉFINITION 4.11 Une formule bf \mathcal{A} est vraie dans une interprétation I si toute valuation dans I satisfait à \mathcal{A} . On notera $I \models \mathcal{A}$ si \mathcal{A} est vraie dans I . La formule \mathcal{A} est fausse si aucune valuation dans I ne satisfait à \mathcal{A} .

PROPOSITION 4.12 Si les formules bf \mathcal{A} et $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ sont vraies dans une interprétation I , alors \mathcal{B} est vraie dans I .

PROPOSITION 4.13 Soit \mathcal{A} une formule bf de \mathcal{L} et I une interprétation de \mathcal{L} . Alors, $I \models \mathcal{A}$ si et seulement si, pour toute variable x_i , $I \models (\forall x_i)\mathcal{A}$.

COROLLAIRE 4.14 Soit \mathcal{A} une formule bf de \mathcal{L} , I une interprétation de \mathcal{L} . Alors, $I \models \mathcal{A}$ si et seulement si, pour toute suite de variables y_1, \dots, y_n de \mathcal{L} , $I \models (\forall y_1) \dots (\forall y_n)\mathcal{A}$.

PROPOSITION 4.15 Soit \mathcal{A} une formule bf de \mathcal{L} et I une interprétation de \mathcal{L} . Alors, v satisfait à la formule $(\exists x_i)\mathcal{A}$ si et seulement si il existe au moins une valuation v' qui est i -équivalente à v et qui satisfait à \mathcal{A} .

DÉFINITION 4.16 On considère une formule bf \mathcal{A}_0 du langage formel L . Une formule \mathcal{A} obtenue en remplaçant chaque variable propositionnelle de \mathcal{A}_0 par une formule bf de \mathcal{L} est dite une matérialisation par substitution de \mathcal{A}_0 dans \mathcal{L} .

DÉFINITION 4.17 Une formule bf \mathcal{A} de \mathcal{L} est une tautologie si c'est la matérialisation par substitution d'une tautologie \mathcal{A}_0 de L .

PROPOSITION 4.18 Une formule bf \mathcal{A} de \mathcal{L} qui est une tautologie est vraie dans toute interprétation de \mathcal{L} .

DÉFINITION 4.19 Une formule bf \mathcal{A} de \mathcal{L} est fermée si elle ne contient pas de variables libres.

PROPOSITION 4.20 Soit I une interprétation de \mathcal{L} et \mathcal{A} , une formule bf de \mathcal{L} . Si v et w sont deux valuations de \mathcal{L} qui prennent la même valeur pour toute variable libre de \mathcal{A} , alors v satisfait à \mathcal{A} si et seulement si w satisfait à \mathcal{A} .

COROLLAIRE 4.21 Soit I une interprétation de \mathcal{L} et \mathcal{A} , une formule bf fermée de \mathcal{L} . Alors $I \models \mathcal{A}$ ou bien $I \models (\sim \mathcal{A})$.

DÉFINITION 4.22 Une formule bf \mathcal{A} de \mathcal{L} est logiquement valide si \mathcal{A} est vraie dans toute interprétation de \mathcal{L} . Elle est dite contradictoire si elle est fausse dans toute interprétation.