



FIGURE 1.13 – Les graphes de l'exercice 1.7

22. On considère le graphe $K_{2,3}$ où les sommets sont répartis dans les deux groupes $\{a, b\}$ et $\{x, y, z\}$.

(a) Combien y a-t-il de coloriage propres avec λ couleurs pour lesquels a et b sont de la même couleur ?

(b) Combien y a-t-il de coloriage propres avec λ couleurs pour lesquels a et b sont de couleur différente ?

(c) Quel est le polynôme chromatique de $K_{2,3}$? Quel est son nombre chromatique, $\chi(K_{2,3})$?

(d) Quel est le polynôme chromatique de $K_{2,n}$? Quel est son nombre chromatique, $\chi(K_{2,n})$?

23. Soit G_n le graphe obtenu du graphe complet K_n en enlevant une arête. Donner son polynôme chromatique et son nombre chromatique.

24. Soit G un graphe sans boucle ayant au moins une arête. Montrer que G est biparti si et seulement si $\chi(G) = 2$.

25. On considère les graphes de la figure 1.13.

(a) Sont-ils isomorphes ?

(b) Montrer, sans finaliser le calcul, que leurs polynômes chromatiques sont égaux.

(c) Donner leur polynôme chromatique.

26. On appelle W_n le graphe « roue » à $n + 1$ sommets : celui-ci est composé d'un cycle de longueur n avec sommets x_1, \dots, x_n (la roue), auquel on ajoute un sommet a au milieu du cycle (le moyeu), et des arêtes entre a et chacun des sommets x_i (les rayons).

(a) Dessiner ce graphe et donner son nombre d'arêtes.

- (b) Si C_n est le graphe correspondant à un cycle de longueur n , donner la relation entre $\chi(C_n)$ et $\chi(W_n)$.
- (c) On considère une pièce de forme pentagonale. De combien de couleurs au minimum doit-on disposer si on veut peindre les murs adjacents de couleurs différentes et le plafond d'une autre couleur ?